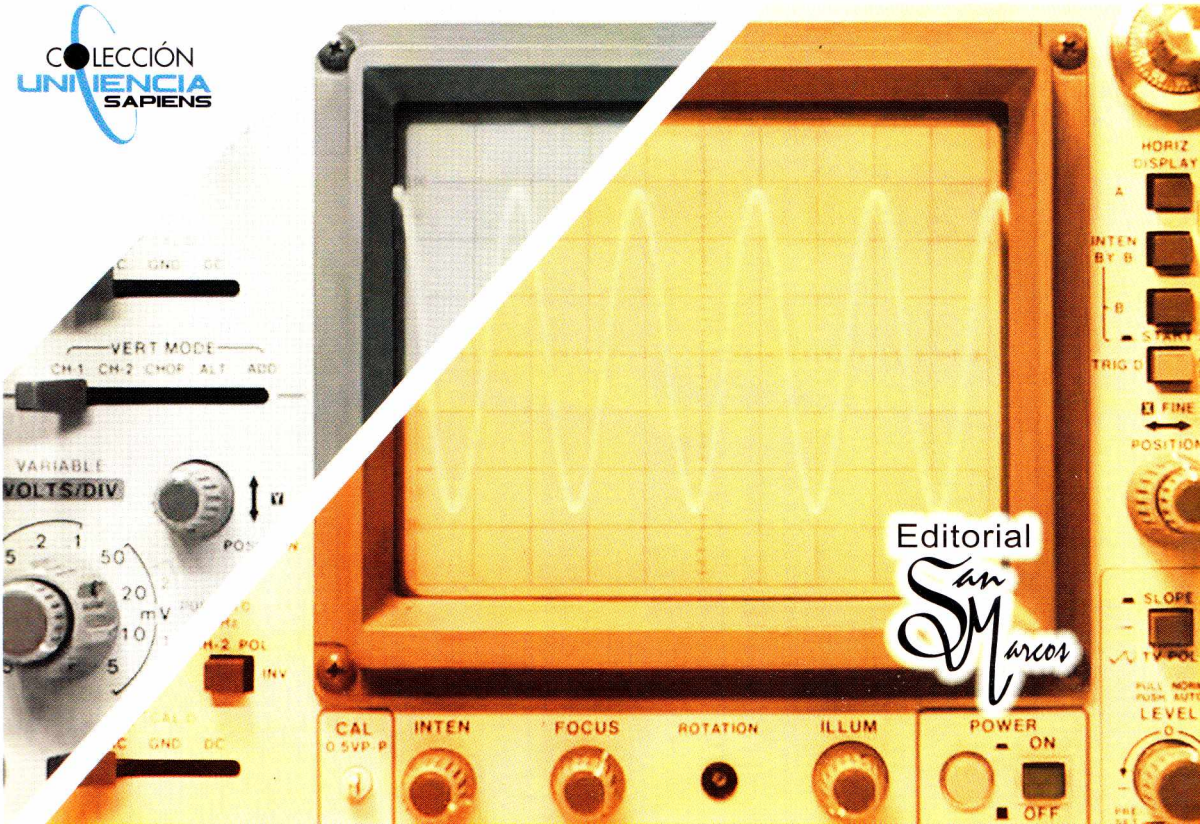
Rubén Alva Cabrera

TRIGONOMETRÍA

Teoría y práctica

- Exámenes UNI desarrollados por temas y con claves
- Actualizado según últimos prospectos
- Desarrollo completo de todo el curso
- Nuevos problemas resueltos y propuestos tipo UNI
- Claves para todos los problemas propuestos



TRIGONOMETRÍA

Teoría y práctica

Rubén Alva Cabrera

TRIGONOMETRÍA

Teoría y práctica

COLECCIÓN UNIVIENCIA SAPIENS

Editorial San Marcos

TRIGONOMETRÍA: TEORÍA Y PRÁCTICA
COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS
RUBÉN ALVA CABRERA

© Rubén Alva Cabrera, 2007
Asesoría académica: Salvador Timoteo V.

© Editorial San Marcos E. I. R. L., editor
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima, Lima, Lima
Teléfono: 331-1522
RUC: 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Diseño de portada: Gustavo Tuppia
Composición de interiores: Blanca Llanos
Responsable de edición: Alex Cubas

Primera edición: 2007
Segunda edición: 2014
Tercera edición: diciembre 2015
Tiraje: 2000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2015-17918
ISBN: 978-612-315-278-9
Registro de proyecto editorial N.° 31501001501403

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
sin previa autorización escrita del autor y del editor.

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Teléfono: 433-7611
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

Impresión:
Editorial San Marcos de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344
Marzo 2016

ÍNDICE

Presentación 11

CAPÍTULO 01: SISTEMA DE MEDICIÓN ANGULAR - SECTOR CIRCULAR

Biografía: Hiparco de NIcea 13
Ángulo trigonométrico 14
Sistema de medición angular 14
Relación de conversión de los tres sistemas 14
Factor de conversión 14
Regla de conversión 14
Relación entre los sistemas sexagesimal y centesimal 16
Ángulos coterminales 17
Sector circular 17
Trapecio circular 18
Problemas resueltos 21
Problemas de examen de admisión UNI 32
Problemas propuestos 34

CAPÍTULO 02: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Biografía: Al-Battani 39
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo 40
Teorema del complemento 40
Triángulos pitagóricos 41
Triángulos rectángulos notables 43
Resoluciones de triángulos rectángulos 44
Cálculo de razones trigonométricas de la mitad de un ángulo 45
Área de triángulo 46
Ángulos verticales y horizontales (ángulos de elevación y depresión) 47
Rosa náutica 47
Problemas resueltos 49
Problemas de examen de admisión UNI 65
Problemas propuestos 67

CAPÍTULO 03: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Biografía: Abu´l Wafa 75
Rectas dirigidas 76
Sistema coordenado sobre una recta 76
Sistema coordenado sobre un plano 76
Ángulos en posición normal 77
Ángulos cuadrantales 77
Representación particular de los ángulos cuadrantales 78
RT de ángulos en posición normal 79
Signos de las razones trigonométricas 80
RT àngulos coterminales 81
RT de ángulos negativos 81
Circunferencia trigonométrica 81
Líneas trigonométricas 82
Líneas auxiliares 82
RT de los principales ángulos cuadrantales 83

Cuadro de variación de las razones trigonométricas 83
Extensión de las razones trigonométricas 83
Razones trigonométricas de ángulos de la forma $(n\pi \pm \alpha) \vee [n(180°) \pm \alpha]$, $n \in \mathbb{Z}$ 85
Razones trigonométricas de ángulos de la forma: $\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right] \vee [(2n+1)(90°) \pm \alpha]; n \in \mathbb{Z}$ 86
Reducción al primer cuadrante 87
RT de ángulos notables 89
Problemas resueltos 93
Problemas de examen de admisión UNI 109
Problemas propuestos 111

CAPÍTULO 04: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Biografía: Johann Müller 121
Definición 122
Identidades principales 122
Identidades auxiliares 123
Tipos de problemas 123
Problemas resueltos 127
Problemas de examen de admisión UNI 139
Problemas propuestos 141

CAPÍTULO 05: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

Biografía: Edmund Gunter 147
Seno de la suma y diferencia de dos ángulos 148
Coseno de la suma y diferencia de dos ángulos 148
Tangente de la suma y diferencia de dos ángulos 148
Cotangente de la suma y diferencia de dos ángulos 148
Identidades auxiliares 150
Identidades trigonométricas de la suma de tres ángulos 152
Problemas resueltos 153
Problemas de examen de admisión UNI 165
Problemas propuestos 167

CAPÍTULO 06: ÁNGULOS MÚLTIPLES

Biografía: Aryabhata 173
Identidades trigonométricas del ángulo doble 174
Identidades auxiliares del ángulo doble 178
Identidades trigonométricas del ángulo mitad 178
Identidades trigonométricas del ángulo triple 182
Identidades auxiliares del ángulo triple 183
Problemas resueltos 186
Problemas de examen de admisión UNI 198
Problemas propuestos 199

CAPÍTULO 07: IDENTIDADES DEL PRODUCTO, SUMA Y DIFERENCIA DE SENO Y COSENO

Biografía: William Oughtred 205
Identidades de transformación de suma o diferencia de senos a producto 206
Identidades de transformación de suma o diferencia de cosenos a producto 206
Identidades de transformación de producto de seno y coseno a suma (o diferencia) de senos 209
Identidad de transformación de producto de cosenos a suma de cosenos 209
Identidad de transformación de producto de senos a diferencia de cosenos 209
Series trigonométricas 211
Productos trigonométricas 214

Problemas resueltos 215
Problemas de examen de admisión UNI 227
Problemas propuestos 229

CAPÍTULO 08: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Biografía: Georg Rheticus 235
Conceptos preliminares 236
Funciones 237
Gráfica de una función 238
Clasificación de las funciones 239
Funciones especiales 240
Análisis de las funciones trigonométricas básicas 241
Funciones trigonométricas compuestas 242
Multiplicación de la función por una constante 242
Multiplicación del argumento por una constante 243
Suma de una constante al valor de la función 244
Suma de una constante al argumento 244
Funciones auxiliares 247
Problemas resueltos 252
Problemas de examen de admisión UNI 267
Problemas propuestos 269

CAPÍTULO 09: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Biografía: Niels Abel 277
Conceptos preliminares 278
Funciones inversas 278
Función suryectiva o sobreyectiva 278
Función inyectiva o univalente 279
Función inversa 280
Gráfica de una función inversa 281
Funciones trigonométricas inversas 281
Gráfica, dominio y rango de las funciones trigonométricas inversas 281
Propiedades de las funciones trigonométricas inversas 285
Funciones trigonométricas inversas compuestas 287
Método práctico para hallar la ecuación de una curva 290
Problemas resueltos 293
Problemas de examen de admisión UNI 306
Problemas propuestos 308

CAPÍTULO 10: ECUACIONES E INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Biografía: François Viéte 315
Ecuaciones trigonométricas 316
Ecuaciones trigonométricas elementales 316
Ecuaciones trigonométricas no elementales 320
Sistema de ecuaciones trigonométricas 322
Inecuaciones trigonométricas 324
Problemas resueltos 332
Problemas de examen de admisión UNI 346
Problemas propuestos 347

CAPÍTULO 11: RESOLUCIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Biografía: Edward Kasner 355
Introducción 356

Resolución de triángulos rectángulos 356
Polígonos regulares 357
Resolución de triángulos oblicuángulos 359
Casos que se presentan en la resolución de triángulos oblicuángulos 360
Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo de un triángulo en términos de los lados 363
Elementos auxiliares de un triángulo 364
Área del triángulo 365
Otras relaciones entre los elementos de un triángulo 365
Cuadriláteros 368
Problemas resueltos 371
Problemas de examen de admisión UNI 384
Problemas propuestos 386

CAPÍTULO 12: GEOMETRÍA ANALÍTICA - COORDENADAS POLARES

Biografía: Joseph Gergonne 393
Sistema de coordenadas rectangulares 394
Distancia entre dos puntos 394
División de un segmento en una razón dada 395
Ángulo de inclinación, pendiente de una recta y ángulo entre dos rectas 397
La recta 399
Distancia de un punto a una recta 402
Área de una región triangular 402
Área de una región poligonal 402
La circunferencia 405
La parábola 409
La elipse 416
La hipérbola 423
Transformación de coordenadas 429
Coordenadas polares 434
Problemas resueltos 442
Problemas de examen de admisión UNI 451
Problemas propuestos 453

CAPÍTULO 13: LÍMITES Y DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Biografía: John Wallis 459
Nociones preliminares 460
Idea de límite 460
Límites trigonométricos 461
La sinusoide 465
La cicloide 466
Derivada de funciones 470
Derivada de funciones trigonométricas 470
Cálculo de límites 470
Problemas resueltos 472
Problemas propuestos 485

CAPÍTULO 14: NÚMEROS COMPLEJOS APLICADOS A LA TRIGONOMETRÍA

Biografía: Carl Gauss 489
Número complejo 490
Igualdad de números complejos 490
Conjugado de un número complejo 490
Operaciones con números complejos 490
Potencias de i: 491

Representación gráfica de los números complejos 491
Módulo o valor absoluto de un número complejo 491
Representación gráfica o geométrica de conjuntos especiales 492
Forma polar o trigonométrica de un número complejo 493
Operaciones con números complejos en forma polar 494
Forma exponencial de un número complejo 495
Operaciones con números complejos en forma exponencial 495
Teorema de Abraham de Moivre 495
Raíces de números complejos 496
Raíces enésimas de la unidad 497
Problemas resueltos 498
Problemas de examen de admisión UNI 505
Problemas propuestos 507

PRESENTACIÓN

El presente libro tiene como objetivo brindar al estudiante de la manera más didáctica posible una completa información acerca de la Trigonometría para su aprendizaje. Este texto propone el desarrollo de los conceptos más elementales del curso, para llegar a temas recientemente incorporados en los exámenes de admisión, según el prospecto de la UNI.

En cada capítulo se desarrollan los aspectos teóricos con mucha simplicidad, sacrificando en algunos casos el rigor matemático, con el propósito de que los conceptos y definiciones sean rápidamente asimilados. Además se incluye una gran variedad de problemas resueltos y propuestos de tal manera que el estudiante pueda afianzar sus conocimientos en la materia.

El presente libro de *Trigonometría* de la Colección Uniciencia Sapiens, tiene la particularidad de mostrar con sencillez la rigurosidad del curso, mediante cuantiosos ejemplos y problemas resueltos y propuestos por capítulo, que sirven a su vez de modelos para enfrentar con éxito otros tipos de `problemas. Los procedimientos aplicados se comunican siguiendo la secuencia lógica común en cualquier rama de la matemática, demostrándose gran cantidad de teoremas y propiedades. Además cuenta con problemas de examen de admisión a la UNI con respuestas y claves.

Esperamos que esta publicación logre convertirse en un importante auxiliar pedagógico para todos los estudiantes de educación secundaria, preuniversitaria y superior, además que logre aportar en su preparación para afrontar con éxito el examen de admisión y en su posterior desarrollo profesional. Si este texto logra ser parte fundamental en la construcción de un futuro profesional peruano, entonces nos daremos por satisfechos.

El Editor

Sistema de medición angular Sector circular

capítulo 01

Hiparco de Nicea (Nicea, 190 a. C.-120 a. C.) fue un astrónomo, geógrafo y matemático griego. Entre sus aportaciones cabe destacar: el primer catálogo de estrellas; la división del día en 24 horas de igual duración (hasta la invención del reloj mecánico en el siglo XIV, las divisiones del día variaban con las estaciones); el descubrimiento de la precesión de los equinoccios; la distinción entre año sidéreo y año trópico, mayor precisión en la medida de la distancia Tierra-Luna y de la oblicuidad de la eclíptica y de los conceptos de longitud y latitud geográficas.

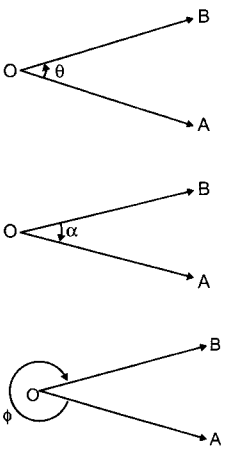
Por otra parte, Hiparco es el inventor de la trigonometría, cuyo objeto consiste en relacionar las medidas angulares con las lineales. Las necesidades de ese tipo de cálculos son muy frecuentes en Astronomía. Hiparco construyó una tabla de cuerdas que equivalía a una moderna tabla de senos. Con la ayuda de dicha tabla, pudo fácilmente relacionar los lados y los ángulos de todo triángulo plano. Ahora bien, los triángulos dibujados sobre la superficie de la esfera celeste no son planos, sino esféricos constituyendo la trigonometría esférica. Además, elaboró el primer catálogo de estrellas que contenía la posición en coordenadas eclípticas de 850 estrellas.

Fuente: Wikipedia

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

En geometría plana un ángulo se define como la figura formada por dos rayos que parten de un mismo punto. En Trigonometría generalmente se considera que un ángulo se genera por la rotación de un rayo alrededor de su origen (llamado: vértice) desde una posición inicial (llamado: lado inicial) hasta una posición terminal (llamado: lado final).

La medida de un ángulo es, si me permiten la expresión, la cantidad de rotación (o amplitud de rotación) que efectúa el rayo al girar en torno a su origen desde su posición inicial hasta su posición final. Esta medida será un número positivo si la rotación se efectúa en sentido antihorario y negativo en caso contrario.



- $\overrightarrow{OA}$: lado inicial
- $\overrightarrow{OB}$: lado final
- O: vértice
- θ: número que indica la medida del ángulo AOB.
- Comúnmente se suele llamar a un ángulo cuya medida es θ como: el ángulo θ.
- La flecha curva indica en qué sentido es la rotación.
- En las figuras adjuntas.
- θ es positivo, α es negativo, ϕ es negativo.
- Debemos tener presente que la medida de un ángulo trigonométrico no tiene límite.

Observacion:

Al ángulo generado al rotar un rayo en sentido antihorario hasta que coincida por primera vez con su posición inicial lo denominamos ángulo de una vuelta o ángulo de una revolución.

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

Sistema sexagesimal (sistema inglés)

En este sistema consideramos al ángulo de una vuelta dividido en 360 partes iguales y a cada parte se le denomina un "grado sexagesimal", a cada grado se le divide en 60 partes iguales y a cada parte de le denomina "minuto sexagesimal", a su vez a cada minuto se le divide en 60 partes iguales y a cada parte se le denomina "segundo sexagesimal".

NOTACIÓN	EQUIVALENCIAS
* 1 grado sexagesimal: 1°	* 1° = 60' = 3600"
* 1 minuto sexagesimal: 1'	* 1' = 60"
* 1 segundo sexagesimal: 1"	* $1° = \frac{m\angle 1\,\text{vuelta}}{360}$ ⇒ m∠1 vuelta = 360°

Sistema centesimal (sistema francés)

En este sistema consideramos al ángulo de una vuelta dividido en 400 partes iguales y a cada parte se le denomina un "grado centesimal", a cada grado se le divide en 100 partes iguales y a cada parte se le denomina "minuto centesimal", a su vez a cada minuto se le divide en 100 partes iguales y a cada parte se le denomina "segundo centesimal".

NOTACIÓN	EQUIVALENCIAS
* 1 grado centesimal: 1^g	* $1^g = 100^m = 10\,000^s$
* 1 minuto centesimal: 1^m	* $1^m = 100^s$
* 1 segundo centesimal: 1^s	* $1^s = \frac{m\angle 1\,\text{vuelta}}{400}$ ⇒ m∠1 vuelta = 400^g

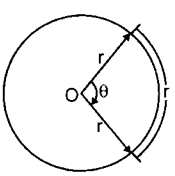
Sistema radial (sistema circular)

En este sistema la unidad angular es el radián. Un radián se define como la medida del ángulo central que subtiende en cualquier circunferencia un arco de longitud igual al radio.

(En la figura adjunta el ángulo θ mide un radián).

En este sistema el ángulo de una vuelta mide 2π radianes.

m∠1 vuelta = 2π rad



$\boxed{\therefore\ \theta = 1\ \text{rad}}$

RELACIÓN DE CONVERSIÓN DE LOS TRES SISTEMAS

Sean S, C y R los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente.

Sabemos que: $360° = 400^g = 2\pi$ rad

Entonces se cumple: $\frac{S}{360} = \frac{C}{400} = \frac{R}{2\pi}$

Simplificando: $\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$ Fórmula o relación de conversión.

Aplicaciones:

1. Convertir $\frac{\pi}{5}$ rad a grados sexagesimales.

   Resolución:

   $$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{S}{180} = \frac{\frac{\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow S = 36 \quad \therefore \frac{\pi}{5}\text{ rad} = 36°$$

2. Convertir 60^g a radianes.

   Resolución:

   $$\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{60}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{10} \quad \therefore 60^g = \frac{3\pi}{10}\text{ rad}$$

3. S, C y R son los números que indican la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, respectivamente, y se cumple que: $S + C = \frac{10R}{\pi} + 37$. Hallar la medida de dicho ángulo en radianes.

   Resolución:

   Sabemos que:

   $$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow S = \frac{180R}{\pi} \wedge \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow C = \frac{200R}{\pi}$$

   Entonces:

   $$S + C = \frac{10R}{\pi} + 37 \Rightarrow \frac{180R}{\pi} + \frac{200R}{\pi} = \frac{10R}{\pi} + 37$$

   $$\Rightarrow \frac{380R}{\pi} = \frac{10R}{\pi} + 37 \Rightarrow \frac{370R}{\pi} = 37$$

   $$\Rightarrow R = \frac{37\pi}{370} = \frac{\pi}{10} \quad \therefore R = \frac{\pi}{10}\text{ rad}$$

4. R, C y S son los números que indican la medida de un ángulo en los sistemas conocidos, y se verifica que: $\sqrt{C+S} + \sqrt{C-S} = \frac{R}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{19}+1)$. Hallar la medida de dicho ángulo en radianes. $(R \neq 0)$.

   Resolución:

   $$\sqrt{C+S} + \sqrt{C-S} = \frac{R}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{19}+1)$$

   $$\Rightarrow \sqrt{\frac{200R}{\pi} + \frac{180R}{\pi}} + \sqrt{\frac{200R}{\pi} - \frac{180R}{\pi}} = \frac{R}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{19}+1)$$

   $$\Rightarrow \sqrt{\frac{380R}{\pi}} + \sqrt{\frac{20R}{\pi}} = \frac{R}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{19}+1)$$

   $$\Rightarrow \sqrt{\frac{20R}{\pi}}(\sqrt{19}+1) = \frac{R}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{19}+1)$$

   Simplificando: $\sqrt{\frac{20R}{\pi}} = \frac{R}{\sqrt{\pi}}$, elevando al cuadrado se obtiene: $\frac{20R}{\pi} = \frac{R^2}{\pi} \Rightarrow R = 20$

   Por lo tanto, el ángulo mide 20 radianes.

5. S, C y R son los números que indican la medida de un ángulo en los sistemas conocidos. Si se cumple: $S^C = R^S$, calcular $\sqrt[9]{S}$.

   Resolución:

   Dato: $S^C = R^S$

   Sabemos: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} \Rightarrow C = \frac{200}{180}S \Rightarrow C = \frac{10}{9}S$

   Entonces: $(S)^{\frac{10}{9}S} = R^S$, simplificando: $S^{\frac{10}{9}} = R$

   Pero: $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi S}{180}$; entonces: $S^{\frac{10}{9}} = \frac{\pi S}{180}$

   $$\frac{S^{\frac{10}{9}}}{S} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow S^{\frac{1}{9}} = \frac{\pi}{180} \therefore \sqrt[9]{S} = \frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

FACTOR DE CONVERSIÓN

Una forma práctica para pasar de un sistema a otro es multiplicar a la medida dada por un "factor de conversión". Dicho factor consiste en una fracción equivalente a la unidad tal que en el numerador colocamos la unidad deseada y en el denominador la unidad a eliminar y los números que acompañan a estas unidades deben ser equivalentes.

Para utilizar este método debe recordar que:

$$\boxed{180° = 200^g = \pi\text{ rad}}$$

Aplicaciones:

1. Convertir $\frac{\pi}{6}$ rad a grados sexagesimales.

   Resolución:

   Unidad deseada: grados sexagesimales
   Unidad a eliminar: radianes
   Sabemos que: $180° = \pi$ rad

   $$\frac{\pi}{6}\text{ rad}\left(\frac{180°}{\pi\text{ rad}}\right) = 30°$$

2. Convertir 25^g a grados sexagesimales.

   Resolución:

   $$25^g\left(\frac{180°}{200^g}\right) = 22{,}5°$$

3. Convertir 80^g a radianes.

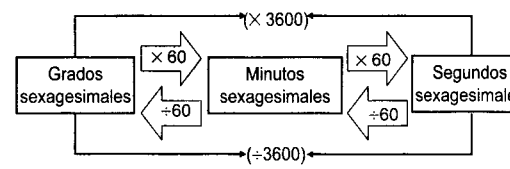
   Resolución:

   $$80^g\left(\frac{\pi\text{ rad}}{200^g}\right) = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$

REGLA DE CONVERSIÓN

En un sistema de medición dado, para pasar de una unidad superior a una inferior se multiplica por la equivalencia respectiva. Para pasar de una unidad inferior a una unidad superior se divide entre la equivalencia respectiva.

Por ejemplo, para el sistema sexagesimal hacemos el cuadro siguiente:



Aplicaciones:

1. Un ángulo mide 5°36'45" convertir a segundos sexagesimales.

   Resolución:

   5° = 5(3600)" = 18 000"
   36' = 36'(60)° = 2160"
   5°36'45" = 18 000" + 2160" + 45"
   ∴ 5°36'45" = 20 205"

2. Si un ángulo mide 17,3075° expresar dicha medida en grados, minutos y segundos sexagesimales.

   Resolución:

   17,3075° (nos quedamos con la parte entera): 17°
   0,3075° = 0,3075(60)' = 18,45' (parte entera): 18'
   0,45' = 0,45(60)" = 27"
   Luego: 17,3075° = 17°18'27"

3. Si un ángulo mide 29 268" expresar dicha medida en grados, minutos y segundos sexagesimales.

   Resolución:

   29 268 | 60
   526 487 | 60 ∴ 29 268" = 8°7'48"
   468 7 8
   48

4. La medida de un ángulo α es 40°37'52" y de θ es 20°30'28". Calcular $\alpha + \theta$ y $\alpha - \theta$

   Resolución:

   $\alpha + \theta$:

   40°37'52" +
   20°30'28"
   60°67'80"

   $\Rightarrow \alpha + \theta = 60°67'80" = 61°08'20"$

   $\alpha - \theta$:

   40°37'52" −
   20°30'28"
   20°07'24"

   $\Rightarrow \alpha - \theta = 20°07'24"$

Equivalencias usuales

$15° = \frac{\pi}{12}$ rad	$45° = \frac{\pi}{4}$ rad	$75° = \frac{5\pi}{12}$ rad	$180° = \pi$ rad
$18° = \frac{\pi}{10}$ rad	$54° = \frac{3\pi}{10}$ rad	$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	$225° = \frac{5\pi}{4}$ rad
$22°30' = \frac{\pi}{8}$ rad	$60° = \frac{\pi}{3}$ rad	$120° = \frac{2\pi}{3}$ rad	$270° = \frac{3\pi}{2}$ rad
$30° = \frac{\pi}{6}$ rad	$67°30' = \frac{3\pi}{8}$ rad	$135° = \frac{3\pi}{4}$ rad	$300° = \frac{5\pi}{3}$ rad
$36° = \frac{\pi}{5}$ rad	$72° = \frac{2\pi}{5}$ rad	$150° = \frac{5\pi}{6}$ rad	$360° = 2\pi$ rad

RELACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS SEXAGESIMAL Y CENTESIMAL

Sabemos que: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200}$; simplificando se obtiene:

$\boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10}}$ S: número de grados sexagesimales
C: número de grados centesimales

$\boxed{\frac{m}{27} = \frac{n}{50}}$ m: número de minutos sexagesimales
n: número de minutos centesimales

$\boxed{\frac{p}{81} = \frac{q}{250}}$ p: número de segundos sexagesimales
q: número de segundos centesimales

Aplicaciones

1. Sabiendo que α y θ son ángulos complementarios, que α mide $(8x)^g$ y θ mide $(2x - 2)°$. Hallar cuánto mide cada ángulo en el sistema radial.

   Resolución:

   En el sistema sexagesimal:
   $\alpha + \theta = 90°$; $\alpha = (8x)^g$ y $\theta = (2x - 2)°$
   Entonces pasamos α al sistema sexagesimal:
   $\alpha = (8x)^g\left(\frac{180°}{200^g}\right) = \left(\frac{36}{5}x\right)°$
   Luego: $\frac{36}{5}x + 2x - 2 = 90 \Rightarrow x = 10$
   Entonces: $\alpha = 72°$ y $\theta = 18°$, en radianes:
   $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ rad y $\theta = \frac{\pi}{10}$ rad

2. La medida de un ángulo en el sistema sexagesimal es $(20 + x)°$ y en el sistema centesimal $(20 - x)^g$. Calcular la medida de dicho ángulo en radianes.

   Resolución:

   Sabemos: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ entonces:
   $\frac{20 + x}{9} = \frac{20 - x}{10} \Rightarrow 200 + 10x = 180 - 9x$
   Luego: $x = -\frac{20}{19}$
   Entonces el ángulo mide: $\left(20 - \frac{20}{19}\right)° = \left(\frac{360}{19}\right)°$
   En radianes: $\left(\frac{360}{19}\right)° = \frac{2\pi}{19}$ rad

3. Convertir 2754 segundos sexagesimales a minutos centesimales.

   Resolución:

   Primero pasamos 2754" a segundos centesimales:
   $\frac{2754}{81} = \frac{q}{250} \Rightarrow 2754" = 8500^s$
   Pasamos ahora a minutos centesimales:
   $\frac{8500}{100} = 85$
   ∴ $2754" = 85^m$

4. La medida de un ángulo en el sistema sexagesimal es a°a' y la medida de otro ángulo en el sistema centesimal es $a^g a^m$. Si la suma de las medidas de dichos ángulos en el sistema sexagesimal es igual a

57°46'12", calcular su diferencia en el sistema inglés.

Resolución:

- $\alpha = a°a' \Rightarrow \alpha = \left(a + \frac{a}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{61a}{60}\right)^{\circ}$
- $\theta = a^g a^m \Rightarrow \theta = \left(a + \frac{a}{100}\right)^{g} = \left(\frac{101a}{100}\right)^{g}$
- $57°46'12" = 57{,}77°$

En el sistema sexagesimal: $\theta = \frac{9}{10}\left(\frac{101a}{100}\right)^{\circ}$

Dato: $\alpha + \theta = 57{,}77° \Rightarrow \frac{61a}{60} + \frac{909a}{1000} = 57{,}77$
$\Rightarrow a = 30$

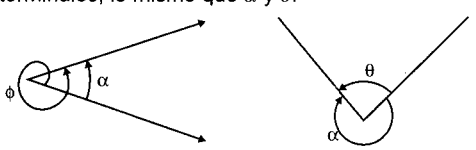
De donde:
$\alpha = 30°30' \wedge \theta = 27{,}27° = 27°\ 16'\ 12"$
$\therefore\ \alpha - \theta = 30°\ 29'\ 60" - 27°\ 16'\ 12" = 3°\ 13'\ 48"$

Nota:

- 1 radián = 57°17'44,81" = $63^g66^m19{,}77^s$
- 1 radián > $1° > 1^g$; $1' > 1^m$; $1" > 1^s$
- Para todo ángulo positivo: C > S > R

ÁNGULOS COTERMINALES

Se denomina de esta manera a todos aquellos ángulos que tienen los mismos elementos (vértice, lado inicial y lado final). En las figuras adjuntas α y ϕ son ángulos coterminales, lo mismo que α y θ.



Una característica fundamental de los ángulos coterminales es que se diferencian en un número entero de vueltas.
Si α y θ son dos ángulos coterminales, se cumple:

$\boxed{\alpha - \theta = k(360°)}$ Si α y θ están en grados sexagesimales, $(k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{\alpha - \theta = k(2\pi\ \text{rad})}$ Si α y θ están en radianes, $(k \in \mathbb{Z})$

Observacion:

En forma práctica para determinar si dos ángulos son coterminales:

- Restamos dichos ángulos.
- Dividimos la diferencia entre 360° o (2π rad)
- Si el resultado es un número entero entonces los ángulos son coterminales.

Ejemplo:

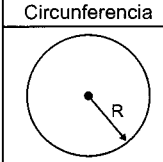
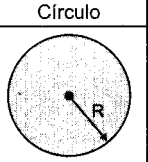
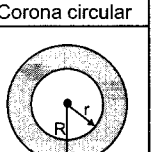
En cada uno de los casos siguientes determinar si los ángulos son coterminales (AC)

1. $80°$ y $440° \Rightarrow 80° - 440° = -360° \Rightarrow -\frac{360°}{360°} = -1$
   Si son AC.
2. $-150°$ y $570° \Rightarrow -150° - 570° = -720° \Rightarrow -\frac{720°}{360°} = -2$
   Si son AC.
3. $-750°$ y $-510°$ $-750° - (-510°) = 1260° \Rightarrow \frac{1260°}{360°} = 3{,}5$
   No son AC.
4. $\frac{7\pi}{6}$ rad y $\frac{5\pi}{6}$ rad $\Rightarrow \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad
   $\Rightarrow \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}$ No son AC.
5. $\frac{17\pi}{5}$ rad y $\frac{-13\pi}{5}$ rad
   $\Rightarrow \frac{17\pi}{5} - \left(\frac{-13\pi}{5}\right) = \frac{30\pi}{5} = 6\pi$ rad
   $\Rightarrow \frac{6\pi}{2\pi} = 3$ Si son AC
6. Dos ángulos α y θ son coterminales y además complementarios. Hallar la medida del ángulo α si $200° < \alpha < 300°$.

   Resolución:
   Como α y θ son coterminales:
   $\alpha - \theta = k(360°)$ ...(1)
   Como α y θ son complementarios:
   $\alpha + \theta = 90°$ ...(2)
   Sumando (1) + (2):
   $2\alpha = k(360°) + 90° \Rightarrow \alpha = k(180°) + 45°$
   Para: $k = 0 \Rightarrow \alpha = 45°$
   $k = 1 \Rightarrow \alpha = 225°$
   $k = 2 \Rightarrow \alpha = 405°$
   Por dato: $200° < \alpha < 300°$
   Entonces de los valores obtenidos el único que satisface la desigualdad es: $\alpha = 225°$

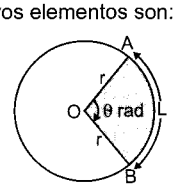
SECTOR CIRCULAR

Nociones preliminares

Circunferencia	Círculo	Corona circular
		
Longitud = $2\pi R$	Área = πR^2	Área = $\pi(R^2 - r^2)$

Sector circular

Es una porción de círculo limitado por dos radios, y el arco de circunferencia. En la figura adjunta AOB es un sector circular cuyos elementos son:



El arco AB, cuya longitud es L.
Los radios OA y OB, cuya longitud es r.
El ángulos central AOB, cuya medida es θ rad.

Longitud de arco: $\boxed{L = \theta r}$ $(0 < \theta \leq 2\pi)$

Nota:

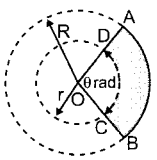
θ debe estar en radianes, sino se tiene que hacer la conversión...

Área del sector circular (A_{sc}):

$$\boxed{A_{SC} = \frac{RL}{2}} \quad \boxed{A_{SC} = \frac{\theta R^2}{2}} \quad \boxed{A_{SC} = \frac{L^2}{2\theta}}$$

TRAPECIO CIRCULAR

Es una porción de corona circular limitada por dos radios. En la figura adjunta la región sombreada es un trapecio circular. Elementos:



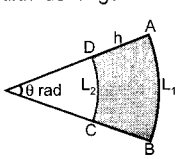
Los arcos AB y CD cuyas longitudes son L_1 y L_2; respectivamente.
Los radios mayor (R) y menor (r).
Los segmentos AD y BC; cuyas longitudes son: $R - r = h$

Área del trapecio circular (A_{TC})

$$\boxed{A_{TC} = \frac{\theta(R^2 - r^2)}{2}} \quad \boxed{A_{TC} = \frac{(L_1 + L_2)h}{2}} \quad \boxed{A_{TC} = \frac{L_1^2 - L_2^2}{2\theta}}$$

Nota:

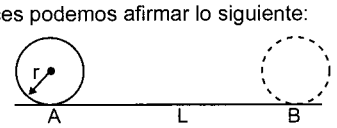
En la figura adjunta L_1 y L_2 son los arcos del trapecio circular ABCD, h es la diferencia de sus radios, θ rad es la medida del ángulo central. Se cumple:



$$\boxed{\theta = \frac{L_1 - L_2}{h}}$$

Casos prácticos

- Cuando una rueda (aro, disco, ...) gira o va rodando sobre una superficie plana desde una posición. Entonces podemos afirmar lo siguiente:



$$\boxed{n = \frac{\theta_g}{2\pi}} \quad \boxed{\theta_g = \frac{L}{r}} \quad \boxed{n = \frac{L}{2\pi r}}$$

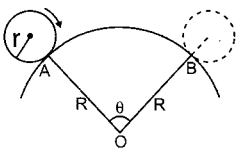
n: número de vueltas que da la rueda al ir de A hasta B.

θ_g: número de radianes del ángulo que gira la rueda.

L: longitud que recorre la rueda (o que se desplaza el centro de la rueda.

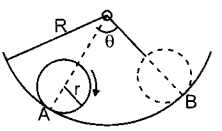
- Cuando la rueda (aro, disco, ...) gira o va rodando sobre una superficie curva, se presentan dos casos:

Caso I:



$$\boxed{n = \frac{\theta(R + r)}{2\pi r}}$$

Caso II:



$$\boxed{n = \frac{\theta(R - r)}{2\pi r}}$$

n : número de vueltas que da la rueda al ir de A hasta B.

θ : número de radianes del ángulo que describe el "centro" de la rueda con respecto al centro de la superficie al ir de A hasta B.

R : radio de la superficie curva.

r : radio de la rueda (aro, disco, ...).

- Cuando se tienen ruedas (discos, engranajes, ...) unidos mediante una faja tangencial (como en las figuras 1 y 2) o están en contactos (figura 3).

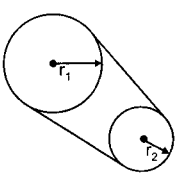


Figura (1)

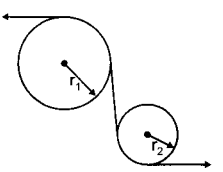


Figura (2)

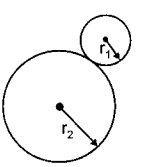


Figura (3)

Entonces se cumple que:

$$\boxed{\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2} \quad \boxed{n_1 r_1 = n_2 r_2}$$

θ_1 y n_1: número de radianes del ángulo de giro y número de vueltas de la rueda de radio r_1.

θ_2 y n_2: número de radianes del ángulo de giro y número de vueltas de la rueda de radio r_2.

- Cuando se tienen ruedas (discos, engranajes, ...) unidos por sus centros (como en las figuras 4 y 5).

En este caso se verifica que:

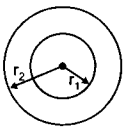


Figura (4)

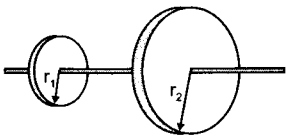
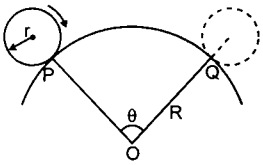


Figura (5)

$\boxed{\theta_1 = \theta_2}$ $\boxed{n_1 = n_2}$

Aplicaciones:

1. En la figura adjunta calcular el número de vueltas que da la rueda al ir desde P hasta Q, sabiendo que su radio es un tercio del radio de la superficie sobre la cual se desplaza. (El ángulo θ mide 90°).

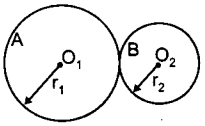


Resolución:

Dato: $r = \frac{1}{3}R$; $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$

Entonces: $n = \dfrac{\frac{\pi}{2}\left(R + \frac{1}{3}R\right)}{2\pi\left(\frac{R}{3}\right)} \Rightarrow n = 1$

2. Determinar cuánto mide el radio del engranaje A si cuando este gira 120° entonces B gira 2π rad (O_1O_2 = 80 cm)



Resolución:

Como los engranajes están en contacto: $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$

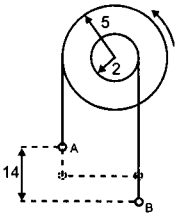
Datos: $\theta_1 = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad; $\theta_2 = 2\pi$ rad

$r_1 + r_2 = 80$ ...(1)

Entonces: $\frac{2\pi}{3}r_1 = (2\pi)r_2 \Rightarrow \frac{r_1}{3} = r_2$

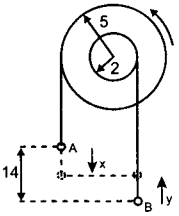
Reemplazando en (1): $r_1 + \frac{r_1}{3} = 80 \Rightarrow r_1 = 60$ cm

3. En el sistema adjunto, cuánto medirá el ángulo (en radianes) que debemos girar para que los centros de las esferas A y B se encuentren a la misma altura si inicialmente dicha diferencia es de 14.



Resolución:

Observamos que cuando la esfera A baja una longitud x la esfera B sube una longitud y.



Entonces:

$x + y = 14$ ...(1)

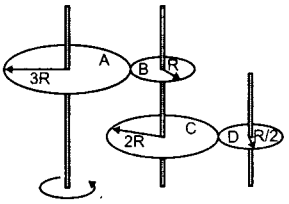
Los engranajes son concéntricos, entonces giran el mismo ángulo (θ).

Entonces: $x = 5\theta$ e $y = 2\theta$

Reemplazando en (1): $5\theta + 2\theta = 14 \Rightarrow \theta = 2$

Por lo tanto, debemos girar 2 radianes.

4. En el sistema de engranajes adjunto, el mayor gira a 600 r.p.m. ¿Cuántas vueltas da el engranaje menor en una hora?



Resolución:

Los engranajes A y B están en contacto:

$n_A r_A = n_B r_B \Rightarrow n_B = \frac{n_A r_A}{r_B}$

Los engranajes B y C están unidos por un eje:

$n_C = n_B \Rightarrow n_C = \frac{n_A r_A}{r_B}$

Los engranajes C y D están en contacto:

$n_C r_C = n_D r_D \Rightarrow n_D = \frac{n_C r_C}{r_D} = \frac{r_C}{r_D}\left(\frac{n_A r_A}{r_B}\right) = \frac{r_A r_C}{r_B r_D} n_A$ ... (1)

En 1 hora: $n_A = 600(60) = 36\,000$ vueltas.

En (1): $n_D = \dfrac{(3R)(2R)}{(R)\left(\frac{R}{2}\right)}(36\,000) = 432\,000$ vueltas

5. En un cierto ángulo se cumple que el número de segundos sexagesimales menos 3 veces el número de minutos centesimales es igual a 29 400. Hallar su número en radianes.

Resolución:

Transcribiendo el dato:

$3600S - 3(100C) = 29\,400$

$36S - 3C = 294 \Rightarrow 12S - C = 98$

$$12\left(\frac{180R}{\pi}\right) - \frac{200R}{\pi} = 98$$

$$\Rightarrow \frac{20R}{\pi}(12(9) - 10) = 98 \quad \therefore R = \frac{\pi}{20} \text{ rad}$$

6. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden: $5x^g$ y $(4x + 5)°$. Hallar la medida del tercer ángulo en el sistema internacional.

Resolución:

Del dato: $5x^g = (4x + 5)°\left(\frac{10^g}{9}\right)$

$\Rightarrow 45x = 40x + 50 \Rightarrow x = 10$

Por lo tanto, los ángulos iguales miden 45°; el tercer ángulo medirá: $90° = \frac{\pi}{2}$ rad

7. Reducir la siguiente expresión:

$$T = \left[\frac{11^g + 22^g + 33^g + ... + 770^g}{2\text{ rad} + 4\text{ rad} + 6\text{ rad} + ... + 140\text{ rad}}\right]\frac{400}{\pi}$$

Resolución:

Factorizando:

$$T = \frac{11^g(1 + 2 + 3 + ... + 70)}{2\text{ rad}(1 + 2 + 3 + ... + 70)} = \frac{11^g}{2\text{ rad}}$$

$$T = \frac{11^g\left(\frac{\pi\text{ rad}}{200^g}\right)}{2\text{ rad}} = \frac{11\pi}{400} \Rightarrow T = \left[\frac{11\pi}{400}\right]\frac{400}{\pi} \quad \therefore T = 11$$

8. Si se cumple que: $50°40'30'' <> \overline{a6}^g\,\overline{b0}^m\,\overline{c5}^s$
Hallar: $a + b + c$

Resolución:

$$50°40'30'' = 50° + \frac{40°}{60} + \frac{30°}{3600}$$

$$= 50° + \frac{2°}{3} + \frac{1°}{120} = \frac{6000° + 80° + 1°}{120}$$

$$= 56.30555...^g$$

$$= 56^g30^m55^s <> \overline{a6}^g\,\overline{b0}^m\,\overline{c5}^s$$

$\Rightarrow a = 5;\ b = 3;\ c = 5$

$\therefore a + b + c = 13$

9. Siendo S, C y R la medida de un ángulo convertido y además se cumple: $S = 3x + 6$; $C = 7x - 8$. Hallar el número de radianes.

Resolución:

Recordando: $\frac{S}{C} = \frac{9}{10} = \frac{3x + 6}{7x - 8}$

$\Rightarrow 63x - 72 = 30x + 60 \Rightarrow 33x = 132 \Rightarrow x = 4$

De donde:

$S = 18 \Rightarrow R = \frac{\pi S}{180} = \frac{\pi}{10}$ rad

10. Calcular $a + b$, sabiendo que:

$$\left(\frac{a^ga^m}{a^m}\right)^g\left(\frac{b^gb^m}{b^m}\right)^m = a^gb^m;\ \text{si: } a > b$$

Resolución:

Todo a minutos: $\left(\frac{101a^m}{a^m}\right)^g\left(\frac{101b^m}{b^m}\right)^m = a^gb^m$

$\Rightarrow 101^g101^m = a^gb^m = 102^g1^m$

$\Rightarrow a = 102 \ \wedge\ b = 1$

Piden: $a + b = 103$

11. Sabiendo que la diferencia entre el número de grados sexagesimales de un ángulo; menos el número de grados centesimales de otro es igual a 104. Determinar el menor ángulo en radianes si ellos son suplementarios.

Resolución:

De los datos:

$S_1 - C_2 = 104$ ...(1)

$C_1 + C_2 = 200$ ...(2)

(1) + (2): $S_1 + C_1 = 304$

$S_1 + \frac{10S_1}{9} = 304 \Rightarrow 19S_1 = 2736$

$S_1 = 144 \Rightarrow S_2 = 36$

S_2 radianes: $R_2 = \frac{\pi}{5}$ rad

12. Se idean 2 nuevos sistemas de medidas angulares C; V. Sabiendo que la unidad de medida de C es la quinta parte de la unidad de medida en el sistema sexagesimal; y que 20 grados V es 10^g.
Hallar la relación entre C y V.

Resolución:

Dato:

$1^C = \frac{1°}{5} = \left(\frac{10}{45}\right)^g \Rightarrow 10^g = 45^C$ ...(1)

$20^V = 10^g$ ...(2)

(1) = (2): $45^C = 20^V \Rightarrow \frac{C}{45} = \frac{V}{20}$

$\therefore \frac{C}{9} = \frac{V}{4} \ \vee\ C = 2{,}25V$

13. Calcular:

$$S = \frac{20x° + \left(\frac{3x}{5}\right)\pi\text{ rad} + 80x^g}{\frac{2x\pi}{9}\text{ rad} + (50^g)x + 15x°}$$

Resolución:

Pasando a grados sexagesimales:

$$S = \frac{20x° + 108x° + 72x°}{40x° + 45x° + 15x°} = \frac{200x°}{100x°} \quad \therefore S = 2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si x es la 30.ª parte de 4° e y es la 36.ª parte de 2^g.

Calcular: $T = \dfrac{3x + 4y}{5x - 4y}$

Resolución:

De los datos: $x = \dfrac{4°}{30}$; $y = \dfrac{2^g}{36}$

$$T = \frac{\frac{4°}{10} + \frac{2^g}{9}}{\frac{4°}{6} - \frac{2^g}{9}} = \frac{\frac{4°}{10} + \frac{2^g}{9}(\frac{9°}{10^g})}{\frac{4°}{6} - \frac{2^g}{9}(\frac{9°}{10^g})}$$

$$T = \frac{\frac{3°}{5}}{\frac{14°}{30}} = \frac{3(6)}{14} \qquad \therefore\ T = \frac{9}{7}$$

2. Hallar el error en radianes si se escribe 36^g en lugar de escribir 36°.

Resolución:

El error será:

$$36° - 36^g = 36°(\frac{10^g}{9°}) - 36^g = 40^g - 36^g$$

$$= 4^g = 4^g(\frac{\pi\ rad}{200^g}) = \frac{\pi}{50}\ rad$$

3. Reducir: $P = \dfrac{\pi C + \pi S + 20R}{200R}$; siendo S, C y R lo convenido.

Resolución:

Sabemos: C = 200K; S = 180K; R = πK

$$P = \frac{200\pi K + 180\pi K + 20\pi K}{200\pi K}$$

$$P = \frac{400\pi K}{200\pi K} \quad \therefore\ P = 2$$

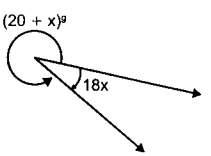
4. Si: $40° = \overline{aa}^g\ \overline{aa}^m\ \overline{aa}^s$; determinar: a

Resolución:

Convirtiendo: $40° = 40(\frac{10^g}{9}) = \left(\frac{400}{9}\right)^g$

$40° = (44{,}4444)^g = 44^g 44^m 44^s \qquad \therefore\ a = 4$

5. Hallar x del gráfico mostrado:



Resolución:

Del gráfico: $(20 + x)^g - 18x° = 400^g$

$(20 + x)^g - 20x^g = 400^g \Rightarrow 19x = -380$

$\therefore\ x = -20$

6. Se tienen 3 ángulos tal que la suma del primero con el segundo es 20°; del segundo con el tercero es 40^g y del primero con el tercero es 5π/9 rad. Hallar el mayor de dichos ángulos.

Resolución:

Datos: sea α, β y θ los ángulos

$\alpha + \beta = 20°$ ...(1)

$\beta + \theta = 40^g = 36°$ ...(2)

$\alpha + \theta = \dfrac{5\pi}{9}\ rad = 100°$ ...(3)

(1) + (2) + (3): $2(\alpha + \beta + \theta) = 156°$

$\alpha + \beta + \theta = \dfrac{156°}{2} = 78°$

$\theta = 78° - 20° = 58°$

$\beta = 36° - 58° = -22°$

$\alpha = 100° - 58° = 42°$

Por lo tanto el mayor será: $58° = \left(\dfrac{580}{9}\right)^g \equiv \dfrac{29\pi}{90}$ rad

7. Sabiendo que S, C y R son el número de grados sexagesimales, centesimales y radianes de un ángulo. Hallar: $T = \sqrt[3]{6(\sqrt{3} - \sqrt{2})SCR}$

si: $\sqrt[3]{\dfrac{180}{S}} + \sqrt[3]{\dfrac{200}{C}} + \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{R}} = 3 \quad (\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2})$

Resolución:

En la condición:

$$\sqrt[3]{\frac{180}{180k}} + \sqrt[3]{\frac{200}{200k}} + \sqrt[3]{\frac{\pi}{\pi k}} = 3$$

$$3(\sqrt[3]{\frac{1}{k}}) = 3 \Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[3]{6(\sqrt{3} - \sqrt{2})180(200)\pi}$$

$$\therefore\ T = \sqrt[3]{6^3(10)^3(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = 60$$

8. Si: $\dfrac{R + \pi}{R - \pi} = \dfrac{C + S}{C - S}$;

Hallar el ángulo en radianes.

Resolución:

Sabiendo que: R = πk; S = 180k; C = 200k

En la condición: $\dfrac{k + 1}{k - 1} = 19$

$\Rightarrow k + 1 = 19k - 19 \Rightarrow k = \dfrac{10}{9} \quad \therefore\ R = \dfrac{10\pi}{9}$ rad

9. Siendo S, C y R lo convenido, determinar R; además: $SCR = \dfrac{\pi}{162}$

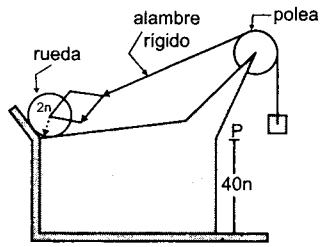
Resolución:

Del dato: $\dfrac{180R(200R)R}{\pi^2} = \dfrac{\pi}{27(6)}$

$$R^3 = \frac{\pi^3}{9(2)(10)(2)(10)(10)(27)(6)}$$

$$R^3 = \frac{\pi^3}{36 \times 10^3(3)^3(6)} \quad \therefore\ R = \frac{\pi}{180}\ rad$$

10. En el gráfico mostrado, calcular el número total de vueltas que da la rueda cuando el bloque se baja completamente por enésima vez desde la posición P:



Resolución:

Notamos que si el bloque baja 40n la rueda recorre también 40n como la cuerda es rígida entonces, cuando el bloque sube 40n la rueda también recorre 40n (retrocede).

1.ª vez baja: $N = \dfrac{40n}{2\pi(2n)} = \dfrac{10}{\pi}$

sube: $N = \dfrac{40n}{2\pi(2n)} = \dfrac{10}{\pi}$

Total de vueltas: $\dfrac{20}{\pi}$

2.ª vez baja: $N = \dfrac{40n}{4\pi n} = \dfrac{10}{\pi}$

sube: $N = \dfrac{40n}{4\pi n} = \dfrac{10}{\pi}$

Total de vueltas: $\dfrac{20}{\pi}$

Enésima vez baja: $N = \dfrac{40n}{4\pi n} = \dfrac{10}{\pi}$

Total de vueltas: $\dfrac{10}{\pi}$

El n.° de vueltas totales es:

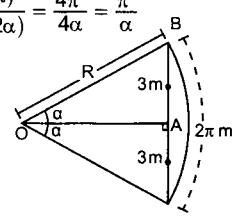
$$N_T = \underbrace{\frac{20}{\pi} + \frac{20}{\pi} + \ldots + \frac{20}{\pi}}_{(n-1)\text{veces}} + \frac{10}{\pi}$$

$$N_T = (n-1)\frac{20}{\pi} + \frac{10}{\pi} \quad \therefore \; N_T = (2n-1)\frac{10}{\pi}$$

11. Calcular el área de un sector circular cuyo arco es 2π m y de cuyos extremos se subtiende una cuerda de 6 m.

Resolución:

$$A_{SC} = \frac{(2\pi)^2}{2(2\alpha)} = \frac{4\pi^2}{4\alpha} = \frac{\pi^2}{\alpha} \quad \ldots(1)$$



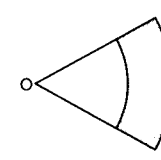
Como: $2\pi = (2\alpha)R \Rightarrow \pi = \alpha R \Rightarrow \dfrac{\pi}{\alpha} = R \quad \ldots(2)$

Del △,OAB: $\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{R} \Rightarrow R = \dfrac{3}{\text{sen}\alpha} \quad \ldots(3)$

$(2) = (3) \Rightarrow \dfrac{\pi}{\alpha} = \dfrac{3}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \dfrac{3\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

En (1) $\therefore \; S = \dfrac{\pi^2}{\frac{\pi}{6}} = 6\pi \text{ m}^2$

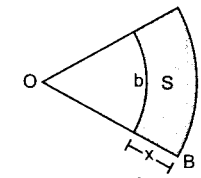
12. Si el perímetro del trapecio circular es 2p. Hallar su área cuando sea máxima.



Resolución:

Dato: $2p = a + b + 2x$

$\Rightarrow (a + b) = 2p - 2x \quad \ldots(1)$



Cálculo del área:

$A_{TC} = S = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)x \quad \ldots(2)$

(1) en (2): $S = \left(\dfrac{2p-2x}{2}\right)x \Rightarrow S = px - x^2$

Luego: $S = \dfrac{p^2}{4} - \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2$

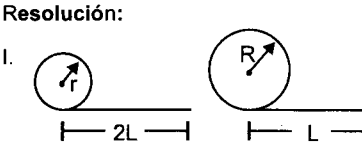
Para que el área sea máxima: $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 = 0$

$\therefore \; S_{máx} = \dfrac{p^2}{4}$

13. Dos ruedas de radios r y R ($r < R$) recorren espacios, la primera el doble de la segunda. Hallar el radio de una tercera rueda, para que al recorrer un espacio igual a la suma de las dos anteriores, dé un número de vueltas igual a la diferencia del número de vueltas que existe entre la primera y la segunda rueda.

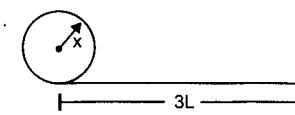
Resolución:

I.



$Nr = \dfrac{2L}{2\pi r} \qquad NR = \dfrac{L}{2\pi R}$

II.



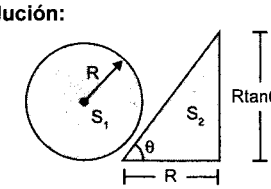
$Nx = \dfrac{3L}{2\pi x}$

Dato: $Nx = Nr - NR$

$$\frac{3L}{2\pi x} = \frac{2L}{2\pi r} - \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow \therefore \; x = \frac{3Rr}{2R - r}$$

14. El cateto de un triángulo rectángulo es el radio de un círculo. Si ambas figuras tienen la misma área, calcular la tangente de la octava parte de la tangente de uno de los ángulos agudos del triángulo.

Resolución:



$S_1 = S_2 \Rightarrow \pi R^2 = \frac{R^2}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = 2\pi$

$\therefore \tan\left(\frac{\tan\theta}{8}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

15. Si la diferencia de segundos centesimales y segundos sexagesimales que mide un ángulo es 27 040, calcular la medida (en rad) de dicho ángulo.

Resolución:

Dato: [n.° seg . cent] − [n.° seg . sex.] = 27 040

10 000C − 3600S = 27 040

Sea el ángulo pedido: θ, donde:

$S = 9k$; $C = 10k$; $R = \pi k/20$

Reemplazamos:

$1000(10k) - 360(9k) = 2704$

$10k(1000 - 324) = 2704$

$10k(676) = 2704 \Rightarrow k = 2/5$

Por lo tanto, el ángulo será: $\theta = \frac{\pi}{20}(\frac{2}{5}) = \frac{\pi}{50}$ rad

16. Si S, C y R son la medida de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, respectivamente; hallar el valor de: 6A + B;

si $A = \sqrt{\frac{3S+5C}{4S} + \frac{23}{36}}$ y $B = \sqrt{\frac{3840R}{\pi(2S+3C)}}$

Resolución:

- $A = \sqrt{\frac{3S+5C}{4S} + \frac{23}{36}}$

  Sea: $S = 9k$; $C = 10k$

  $A = \sqrt{\frac{27k+50k}{36k} + \frac{23}{36}}$

  $A = \sqrt{\frac{77k}{36k} + \frac{23}{36}} \Rightarrow A = \frac{10}{6}$

- $B = \sqrt{\frac{3840R}{\pi(2S+3C)}}$

  Sea: $S = 180k$; $C = 200k$; $R = \pi k$

  $\Rightarrow B = \sqrt{\frac{3840\pi k}{\pi(360k+600k)}} = \sqrt{\frac{3840k}{960k}} = 2$

$\therefore 6A + B = 12$

17. ¿Cuántos grados sexagesimales mide un ángulo no nulo si los números que expresan su medida en grados sexagesimales (S) y centesimales (C) están definidos por:

$S = (2n^2 + 3n + 1)$ y $C = (3n^2 + n - 2)$

Resolución:

Conocemos que:

$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$

$\Rightarrow \frac{2n^2+3n+1}{9} = \frac{3n^2+n-2}{10}$

$20n^2 + 30n + 10 = 27n^2 + 9n - 18$

$n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow (n-4)(n+1) = 0$

Si: $n = 4 \Rightarrow s = 45$ (√)

Si: $n = -1 \Rightarrow s = 0$ (×)

Por lo tanto, la medida del ángulo es: 45°

18. Un ángulo trigonométrico θ se puede representar como $\theta = x^g = y°z'$, donde x, y, z pertenecen a $\mathbb{Z}^+$ ($y > z$). Si los dos últimos números se diferencian en 3 y los números de grados centesimales y sexagesimales se diferencian en 5. Determinar el ángulo en radianes.

Resolución:

$\theta = x^g = y°z'$; $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$; $(y > z)$

Por condición: $y - z = 3 \wedge x - y = 5$

$\Rightarrow \theta = (y+5)^g = y° + (y-3)$

$(y+5)^{g(}\frac{9°}{10^g}) = y° + (y-3)'(\frac{1}{60'})$

$\frac{9}{10}(y+5)° = y° + \frac{1}{60}(y-3)°$

Despejando: $y = 39^g \wedge x = 44^g$

La medida del ángulo será:

$\theta = 44^g(\frac{\pi\,rad}{200^g}) \quad \therefore \theta = \frac{11\pi}{50}$ rad

19. El número de grados sexagesimales que tiene un ángulo es $\overline{mn}$ y su número de grados centesimales es $\overline{n0}$. Determinar la medida radial del ángulo.

Resolución:

Sea el ángulo θ

Donde:

$\theta = \overline{mn}° = \overline{m0}^g \Rightarrow \overline{mn}°(\frac{10^g}{9°}) = \overline{n0}^g$

$\frac{\overline{mn}}{\overline{n0}} = \frac{9}{10} = \frac{18}{20} = \frac{45}{50}$

Así: $m = 4 \wedge n = 5$

$\therefore \theta = 45° <> \frac{\pi}{4}$ rad

20. Si los números S, C y R representan la medida de un ángulo en los sistemas ya conocidos y que cumplen:

$xS = yC = zR = \pi$ ...(1)

$\frac{1}{xyz}\left(\frac{180x+\pi}{200}\right)\left(\frac{200y+\pi}{180}\right) = \frac{27}{8}\left(\frac{1}{z+1}\right)$ ...(2)

Determinar la medida de dicho ángulo.

Resolución:

De: $xS = yC = zR$

$x = \pi/S$; $y = \pi/C$; $z = \pi/R$

Reemplazamos:

$$\frac{1}{\frac{\pi^3}{SCR}}\left(\frac{180\frac{\pi}{S}+\pi}{200}\right)\left(\frac{200\frac{\pi}{C}+\pi}{180}\right) = \frac{27}{8}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{R}+1}\right)$$

$$\frac{SCR}{\pi^3}\frac{\pi\left(\frac{180}{S}+1\right)}{200}\frac{\pi\left(\frac{200}{C}+1\right)}{180}\left(\frac{\pi}{R}+1\right)=\frac{27}{8}$$

$$\left(\frac{S}{180}\right)\left(\frac{C}{200}\right)\left(\frac{R}{\pi}\right)\left(\frac{180}{S}+1\right)\left(\frac{200}{C}+1\right)\left(\frac{\pi}{R}+1\right)=\frac{27}{8}$$

Conocemos que: $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}=k$

Reemplazamos:

$$(k)(k)(k)\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+1\right)=\frac{27}{8}$$

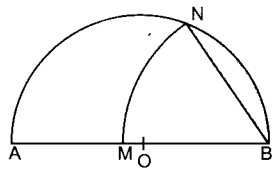
$$\Rightarrow k\left(\frac{1}{k}+1\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Luego la medida del ángulo será:

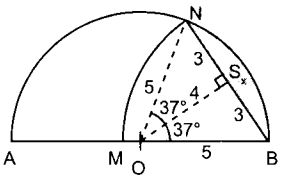
$$\frac{C}{200}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=100$$

Por lo tanto, la medida del ángulo es: 100^g

21. La semicircunferencia ANB tiene como radio OA = 5, con centro en B se traza el sector circular MBN con radio BM = 6. Calcular el área de la región comprendida por el segmento circular sombreado.



Resolución:

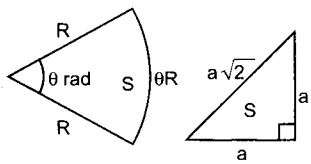


Del gráfico: $S_x = S_{\lhd BON} - S_{\triangle BON}$

$$S_x=\frac{74(5)^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)-\frac{6(4)}{2}\quad\therefore\ S_x=\frac{185\pi}{36}-12$$

22. Un sector circular de ángulo central θ tiene un área igual a la de un triángulo rectángulo isósceles. Si sus perímetros son también iguales, calcular $P=\theta+\frac{4}{\theta}$

Resolución:



Datos:

- $2p_{sector\lhd} = 2p_{\triangle isósceles}$

$2R+\theta R=2a+a\sqrt{2}$

$R(2+\theta)=a(\sqrt{2}+2)$ ...(1)

- $S_{sector\lhd} = S_{\triangle isósceles}$

$\frac{\theta R^2}{2}=\frac{a^2}{2}\Rightarrow \theta R^2=a^2$ ...(2)

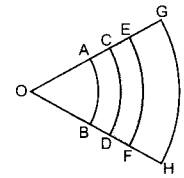
De (1): $R^2=\frac{a^2(\sqrt{2}+2)^2}{(2+\theta)^2}$

Reemplazamos en (2):

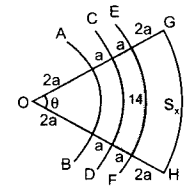
$$\theta\frac{a^2(\sqrt{2}+2)^2}{(2+\theta)^2}=a^2\Rightarrow(\sqrt{2}+2)^2\theta=(2+\theta)^2$$

$$\Rightarrow(2+4\sqrt{2})\theta=\theta^2+4\quad\therefore\ \theta+\frac{4}{\theta}=4\sqrt{2}+2$$

23. Si AOB, COD, EOF y GOH son sectores circulares y OA = EG = 2AC = 2CE y además se sabe que el área de la región CEFD es 14. Determinar el área de la región EGHF.



Resolución:



Del gráfico:

- $S_{\lhd OEF} - S_{\lhd OCD} = 14$

$$\frac{\theta(4a)^2}{2}-\frac{\theta(3a)^2}{2}=14$$

$$\theta\left(\frac{7a^2}{2}\right)=14\Rightarrow\theta a^2=4$$

- $S_{\lhd OGH} - S_{\lhd OEF} = S_x \Rightarrow \frac{\theta(6a)^2}{2}-\frac{\theta(4a)^2}{2}=S_x$

$10\theta a^2 = S_x \therefore S_x = 40$

24. Dos ángulos centrales de una circunferencia cumplen:

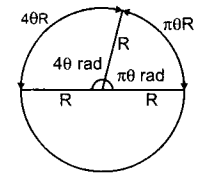
I. Son suplementarias.

II. La diferencia de la longitud de los arcos que subtienden es 2 cm.

III. La razón entre la medida de los ángulos es $4/\pi$

Hallar (en cm) la longitud del radio de la circunferencia.

Resolución:



Datos:

- $4\theta R-\pi\theta R=2$

$\Rightarrow R=\frac{2}{\theta(4-\pi)}$

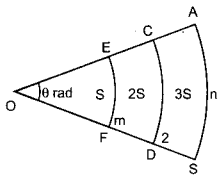
- Pero: $(4\theta+\pi\theta)=\pi$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{(4+\pi)}$

Luego, reemplazamos θ en R:

$$\therefore R=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)(4-\pi)}=\frac{2(4+\pi)}{\pi(4-\pi)}$$

25. De la figura: AOB, COD y EOF son sectores circulares. Si el área de dichas regiones es 6A, 3A y A, respectivamente, hallar $\frac{m}{n}$. Si $L_{\widehat{AC}}=2$



Resolución:

Del gráfico: $S = \dfrac{m^2}{2\theta}$ ...(1)

También: $3S = \dfrac{2^2}{2\theta} \Rightarrow S = \dfrac{2}{3\theta}$ ...(2)

Tenemos: $6S = \dfrac{n^2}{2\theta}$ ...(3)

(2) en (1): $\dfrac{2}{3\theta} = \dfrac{m^2}{2\theta} \Rightarrow m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(2) en (3) : $6\left(\dfrac{2}{3\theta}\right) = \dfrac{n^2}{2\theta} = n = 2\sqrt{2}$

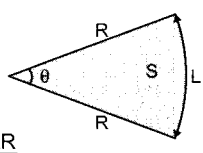
$\Rightarrow \dfrac{m}{n} = \left(\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\right) \therefore \dfrac{m}{n} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

26. Si R, L, S son el radio, la longitud de arco y el área de un sector circular cuyo ángulo central mide θ rad. Hallar el valor de x en: $\dfrac{R}{\theta} + \dfrac{R^2}{L} + \dfrac{L}{\theta^2} = \dfrac{xS}{\theta L}$

Resolución:

Como: $L = \theta R \wedge S = \dfrac{LR}{2}$

Reemplazamos:

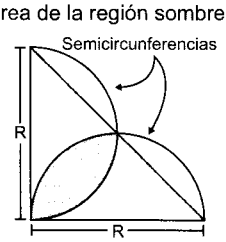


$\dfrac{R}{\theta} + \dfrac{R^2}{\theta R} + \dfrac{\theta R}{\theta^2} = \dfrac{x}{\theta}\left(\dfrac{\frac{LR}{2}}{\theta R}\right)$

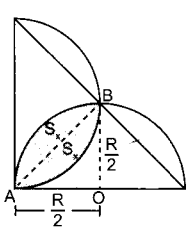
$\dfrac{R}{\theta} + \dfrac{R}{\theta} + \dfrac{R}{\theta} = \dfrac{xR}{2\theta} \Rightarrow \dfrac{3R}{\theta} = \dfrac{xR}{2\theta}$

$\therefore x = 6$

27. Hallar el área de la región sombreada



Resolución:



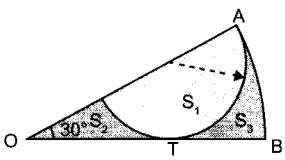
Notamos que: $S_x = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOB}$

$$S_x = \frac{\frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} - \frac{\frac{R}{2}\left(\frac{R}{2}\right)}{2}$$

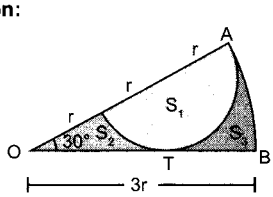
$$S_x = \frac{\pi R^2}{16} - \frac{R^2}{8} = \frac{R^2}{16}(\pi - 2)$$

$$\therefore 2S_x = \frac{R^2}{8}(\pi - 2)$$

28. El siguiente gráfico muestra el sector circular AOB. Calcular $E = \dfrac{S_1}{S_2 + S_3}$, si T es punto de tangencia.



Resolución:



- $S_1 + S_2 + S_3 = S_{\triangle AOB}$

  $S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{\pi}{6}(3r)^2\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}\pi r^2$ ....(1)

- $S_1 = S_{\triangle} \Rightarrow S_1 = \dfrac{\pi r^2}{2}$ ....(2)

Sustituimos (2) en (1):

$\dfrac{\pi r^2}{2} + S_2 + S_3 = \dfrac{3\pi}{4}r^2 \Rightarrow S_2 + S_3 = \dfrac{\pi}{4}r^2$

$\Rightarrow E = \dfrac{S_1}{S_2 + S_3} = \dfrac{\frac{\pi r^2}{2}}{\frac{\pi r^2}{4}} \quad \therefore E = 2$

29. Si: $\dfrac{1}{C + \dfrac{1}{S - \frac{90}{C}}} = \dfrac{1}{C - \dfrac{1}{S - \frac{35}{C}}}$

Siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo, hallar la medida de éste ángulo en radianes.

Resolución:

$$\frac{1}{\boxed{C + \dfrac{1}{S - \frac{90}{C}}}} = \frac{1}{\boxed{C - \dfrac{1}{S - \frac{35}{C}}}}$$

$$\Rightarrow C + \frac{1}{S - \frac{90}{C}} = C - \frac{1}{S - \frac{35}{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S - \frac{90}{C}} = \frac{-1}{\left(S - \frac{35}{C}\right)} \Rightarrow \frac{1}{S - \frac{90}{C}} = \frac{1}{\frac{35}{C} - S}$$

$$\Rightarrow S - \frac{90}{C} = \frac{35}{C} - S \Rightarrow 2S = \frac{125}{C}$$

$$\Rightarrow 2SC = 125 \quad ...(1)$$

Recordamos que para un mismo ángulo S, C y R se relacionan del siguiente modo:

$S = 9k,\ C = 10k,\ R = \frac{k\pi}{20}$

Reemplazando en (1):

$\Rightarrow 2(9k)(10k) = 125$

$36k^2 = 25 \Rightarrow K = \frac{5}{6}$

Luego se pide: $R = \frac{k\pi}{20} = \left(\frac{5}{6}\right)\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{24}$

Por lo tanto, la medida será: $\frac{\pi}{24}$ rad

30. Se inventan tres nuevos sistemas de medición angular O, M, I en el cual 27 grados O equivalen a un ángulo recto, 36 grados M equivalen a 60° y 63° grados I equivalen a $\frac{\pi}{4}$ rad. Hallar una relación entre los nuevos sistemas.

Resolución:

Según el enunciado:

$$\begin{cases} 27 \text{ grados O} = \frac{\pi}{2} \text{ rad (medida de un ángulo recto en Rad)} \\ 36 \text{ grados M} = 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ 63 \text{ grados I} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54 \text{ grados O} = \pi \text{ Rad} \\ 108 \text{ grados M} = \pi \text{ Rad} \\ 252 \text{ grados I} = \pi \text{ Rad} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 54 grados O = 108 grados M = 252 grados I

$$\Rightarrow \frac{54 \text{ grados O}}{9} = \frac{108 \text{ grados M}}{9} = \frac{252 \text{ grados I}}{9}$$

$$\frac{6 \text{ grados O}}{12} = \frac{12 \text{ grados M}}{12} = \frac{28 \text{ grados I}}{12}$$

$$\frac{1 \text{ grados O}}{2(7)} = \frac{1 \text{ grados M}}{1(7)} = \frac{7 \text{ grados I}}{3(7)}$$

$$\frac{1 \text{ grados O}}{14} = \frac{1 \text{ grados M}}{7} = \frac{1 \text{ grados I}}{3}$$

$$\therefore \frac{O}{14} = \frac{M}{7} = \frac{I}{3}$$

31. En un triángulo ABC; se cumple: $A + B = \frac{4\pi}{5}$ rad; $B + C = 80^g$, calcular: $M = \frac{3B + 2A}{A - 2C}$

Resolución:

Expresaremos los datos en un mismo sistema de medida:

$A + B = \frac{4\pi}{5}\text{rad}\left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right);\ B + C = 80^g\left(\frac{9°}{10^g}\right)$

$A + B + C = 180°$ (suma de ángulos internos del △ABC)

$A + B = 144°$ ...(1)

$B + C = 72°$ ...(2)

$\underbrace{A + B}_{144°} + \underbrace{C}_{36°} = 180°$ ...(3)

$\Rightarrow C = 36°$

Pero de (2): $\underbrace{B}_{36°} + \underbrace{C}_{36°} = 72° \Rightarrow B = 36°$

Pero de (1): $\underbrace{A}_{108°} + \underbrace{B}_{36°} = 144° \Rightarrow A = 108°$

Luego reemplazando en lo pedido:

$$M = \frac{3(36°) + 2(108°)}{(108°) - 2(36°)} = \frac{324°}{36°} = 9$$

$\therefore M = 9$

32. Si $9a° + 10a^g = \pi b$ rad, calcular:

$M = (a + b)^2(a - 10b)^{1/2}$

Resolución:

$\Rightarrow 9a° + 10a^g = \pi b$ rad

Transformando en una misma medida (rad).

$$\Rightarrow 9a°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) + 10a^g\left(\frac{\pi \text{ rad}}{200^g}\right) = \pi b \text{ rad}$$

$$\frac{a\pi}{20} \text{ rad} + \frac{a\pi}{20} \text{ rad} = \pi b \text{ rad}$$

$$\frac{2a\pi}{20} = \pi b$$

$$a = 10b \quad ...(1)$$

Se pide: $M = (a + b)^2 (\underbrace{a}_{10b} - 10b)^{1/2}$, pero $a = 10b$

$$M = (a + b)^2 \underbrace{(10b - 10b)}_{0} 1/2$$

$\Rightarrow M = (a + b)^2(0) \quad \therefore M = 0$

33. Simplificar:

$$K = \frac{\overbrace{a° + 3a° + 5a° + ...}^{\text{"n" terminos}} + \pi a° + \pi^2 a°}{\underbrace{a^g + 3a^g + 5a^g + ...}_{\text{"n" terminos}} + \pi a^g + \pi^2 a^g}$$

Resolución:

Recordamos: $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ..}_{\text{"n" terminos}} = n^2$

Luego:

$$k = \frac{a\overbrace{(1 + 3 + 5 + 7 + ...)}^{\text{"n" terminos}} + \pi a \ + \pi^2 a}{a^g\underbrace{(1 + 3 + 5 + 7 + ...)}_{\text{"n" terminos}} + \pi a^g + \pi^2 a^g}$$

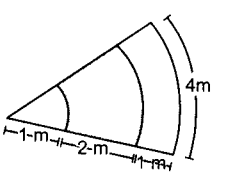
$$k = \frac{a°n^2 + \pi a° + \pi^2 a°}{a°\pi^2 + \pi a^g + \pi^2 a^g} = \frac{a°(n^2 + \pi + \pi^2)}{a^g(n^2 + \pi + \pi^2)}$$

$k = \frac{a°}{a^g}$ pero si cambiamos de unidades a a°.

$$\Rightarrow a°\left(\frac{10^g}{9°}\right) = \frac{10}{9}a^g \Rightarrow k = \frac{\frac{10a^g}{9}}{\frac{a^g}{1}} = \frac{10}{9}$$

$\therefore k = \frac{10}{9}$

34. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

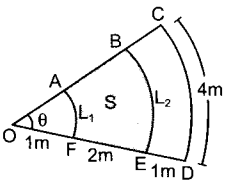
Para $\widehat{CD}$: $4 = \theta(4)$

$\Rightarrow \theta = 1$ rad

Calculando L_1 y L_2:

$L_1 = \underbrace{\theta}_{1\,rad}(1) = 1$

$L_2 = \underbrace{\theta}_{1\,rad}(3) = 3$



Luego el área del trapecio circular ABFE:

$S = \frac{(1+3)}{2}2 = 4\ m^2$

$\therefore S = 4\ m^2$

35. Calcule la medida del ángulo expresado en radianes, sabiendo que S, C y R representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, respectivamente; además: $\sqrt{10CS} + \sqrt{\pi R} = 603{,}1416$.

Resolución:

Sabemos que: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k^2$

$$\left.\begin{array}{ll} S = 180k^2 & ...(1) \\ C = 200k^2 & ...(2) \\ R = \pi k^2 & ...(3) \end{array}\right\} \quad ...(\alpha)$$

De la condición: $\sqrt{10CS} + \sqrt{\pi R} = 603{,}1416 \quad ...(\theta)$

Reemplazando la expresión (α) en (θ):

$\sqrt{10(200)k^2(180)k^2} + \sqrt{(\pi)\pi k^2} = 603{,}1416$

$\sqrt{360\,000(k^2)^2} + \sqrt{(\pi k)^2} = 603{,}1416$

$\sqrt{(6)^2(100)^2(k^2)^2} + \sqrt{(\pi k)^2} = 603{,}1416$

$600k^2 + \pi k = (600 + 3{,}1416)$

$k(600k + \pi) = 1(600 + \pi)$

Por comparación: $k = 1$

Pero: $R = \pi k^2 \Rightarrow R = \pi(1)^2 \quad \therefore R = \pi$ rad

36. El número de vueltas que da una rueda de radio $\sqrt{2}$, respecto de su centro, es: $8(\sqrt{6} - 2)$

Hallar la longitud de la trayectoria que genera su centro.

Resolución:

$n = \frac{L_c}{2\pi r} \Rightarrow L_c = 2\pi nr$

$L_c = 2\pi(8)(\sqrt{6} - 2)\sqrt{2}$

$L_c = 16\pi(\sqrt{12} - 2\sqrt{2})$

$L_c = 16\pi(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2});\ \pi \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$L_c = 32\underbrace{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}_{1}$

$\therefore L_C = 32$

37. Al simplificar: $E = \frac{10^g}{9°} + \frac{27'}{50^m} + \frac{250^s}{81''}$

Se obtiene:

Resolución:

Sabemos que:

S: (°) $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow 9° = 10^g$

C: (^{g})

x: (') $\frac{x}{27} = \frac{y}{50} \Rightarrow 27' = 50^m \quad ...(1)$

y: (^{m})

m: (") $\frac{m}{81} = \frac{n}{250} \Rightarrow 81'' = 250^s$

n: (^{s})

Debemos simplificar: $E = \frac{10^g}{9°} + \frac{27'}{50^m} + \frac{250^s}{81°}$

Reemplazando los valores de (1) en (2) tenemos:

$E = \frac{9°}{9°} + \frac{50^m}{50^m} + \frac{81''}{81''}$

$E = 1 + 1 + 1 \quad \therefore E = 3$

38. Dos ruedas con centros fijos, se encuentran en contacto. Si la primera gira S rad teniendo radio 25. Hallar el diámetro de la segunda, si esta gira C rad. (S y C son los números de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo).

Resolución:

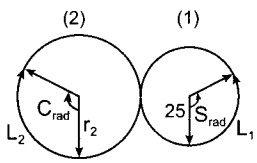
Por propiedad: $L_1 = L_2$

$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$

$25S = Cr_2$

$9n(25) = 10nr_2$

$\Rightarrow r_2 = \frac{45}{2}$



Luego: Diámetro de (L_2) : $2r_2 \therefore 2r_2 = 45$

39. En un triángulo ABC se cumple que:

$A + B = 3\frac{\pi}{4}$ rad; $B + C = 135°$. Dicho triángulo es:

Resolución:

Dato: $A + B + C = 180° \quad ...(I)$

$A + B = \frac{3\pi}{4}\ rad\left(\frac{180°}{\pi\ rad}\right) = 135°$

Reemplazando en (I)

$135° + C = 180° \Rightarrow C = 45°$

$B + C = 135°$

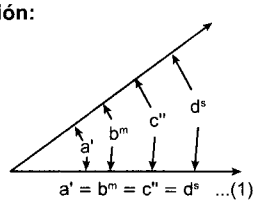
Reemplazando en (I)

$135° + A = 180° \Rightarrow A = 45°;\ B = 90°$

Por lo tanto, es un triángulo isósceles rectángulo.

40. Si a, b, c y d son los valores de la medida de un mismo ángulo, expresados en minutos sexagesimales, minutos centesimales, segundos sexagesimales y segundos centesimales, respectivamente, entonces, al calcular $T = \frac{a}{5b} + \frac{c}{d} + \frac{142}{250}$, se obtiene

Resolución:



Sabemos que: $\frac{m}{27} = \frac{n}{50}$ ...(2)

Reemplazamos la expresión (1) en (2):

$\frac{a}{27} = \frac{b}{50} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{27}{50}$ ...(3)

Sabemos que: $\frac{p}{81} = \frac{q}{250}$ ...(4)

Reemplazando la expresión (1) en (4) tenemos:

$\frac{c}{81} = \frac{d}{250} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{81}{250}$ ...(5)

Piden: $T = \frac{1}{5}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{c}{d} + \frac{142}{250}$ ...(6)

Reemplazando las expresiones (3) y (5) en (6):

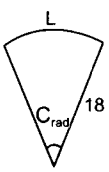
$T = \frac{1}{5}\left(\frac{27}{50}\right) + \frac{81}{250} + \frac{142}{250}$

$\therefore T = 1$

41. El ángulo central que subtiende un arco de radio 18, mide C rad si se disminuye dicho ángulo hasta que mide S rad ¿Cuánto se debe aumentar el radio para que la longitud de dicho arco no varíe?
(C: cent., S: sexag.)

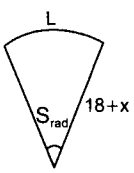
Resolución:

Inicialmente:



$L = 18C$ ...(1)

Luego:



$L = S(18 + x)$ ...(2)

Igualando: $S(18 + x) = 18C$

$\Rightarrow (9n)(18 + x) = 18(10n)$

$\Rightarrow 18 + x = 20$

$\therefore x = 2$

42. Si: $\sqrt{5S} + \sqrt[3]{5C} = 40$

Calcular: $T = (\sqrt{5S} - \sqrt{3C})R$

Resolución:

Reemplazando $S = 180k$ y $C = 200k$

en el dato: $\sqrt{900k} + \sqrt[3]{1000k} = 40$

$30\sqrt{k} + 10\sqrt[3]{k} = 40$ cumple para : $k = 1$

Luego: $S = 180$, $C = 200$ y $R = \pi$

Reemplazando en T

$T = (\sqrt{900} - \sqrt{600})\pi = (30 - 10\sqrt{6})\pi$

$T = 10\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})\pi$

pero: $\pi \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$T = 10\sqrt{3}\underbrace{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}_{(\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2)}$

Finalmente: $T = 10\sqrt{3}(1)$

$\therefore T = 10\sqrt{3}$

43. Calcular la medida de un ángulo en grados sexagesimales, si la diferencia del número de segundos centesimales y 100 veces el número de minutos sexagesimales, es igual a 138 000.

Resolución:

Se desea hallar S°

Sea: m: n.° de segundos centesimales

n: n.° de minutos sexagesimales

Dato: $m - 100n = 138\,000$ ...(1)

pero sabemos que: $m = 10\,000C$ y $n = 60S$

En (1): $10\,000\,C - 100(60S) = 138\,000$

Simplificando: $10C - 6S = 138$ ...(2)

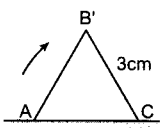
Pero: $S = 9n$, $C = 10n$

En (2): $10(10n) - 6(9n) = 138$

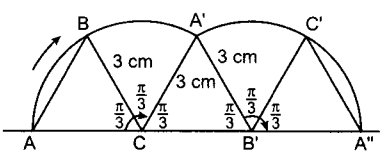
Operando: $n = 3$ y como: $S = 9n$

$\therefore S° = 27°$

44. En la figura mostrada, el triángulo equilátero ABC de lado igual a 3 cm, rueda sin resbalar hasta que el punto A vuelva a tocar el piso. Calcule, la longitud recorrida por el punto A.



Resolución:



La longitud recorrida por el punto A será:

$L = L_{\widehat{AA'}} + L_{\widehat{A'A''}}$ ...(1)

En el sector circular ACA'

$L_{\widehat{AA'}} = \frac{2\pi}{3}(3) = 2\pi$ ...(2)

En el sector circular A'B'A"

$L_{\widehat{A'A''}} = \frac{2\pi}{3}(3) = 2\pi$ ...(3)

Reemplazando los resultados de (2) y (3) en (1) tenemos:

$L = 2\pi$ cm $+ 2\pi$ cm

$\therefore L = 4\pi$ cm

45. Calcular la medida en grados centesimales de un ángulo que cumple lo siguiente:

$R^2 = S(\pi - 200) + C(180 - \pi) + R(20 + \pi)$

Siendo S, C y R lo convencional

Resolución:

De la relación: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k$

Se tiene: $S = 180k, C = 200k, R = \pi k$

En la condición

$R^2 = S(\pi - 200) + C(180 - \pi) + R(20 + \pi)$

$(\pi k)^2 = 180k(\pi - 200) + 200k(180 - \pi) + \pi k(20 + \pi)$

$\pi^2 k = 180\pi - 200(180) + 200(180) - 200\pi + 20\pi + \pi^2$

$\pi^2 k = \pi^2 \Rightarrow k = 1$

Por lo tanto, la medida del ángulo en centesimales es 200^g.

46. Si: $CR = 20 + SR$

Donde:

S: es el número de grados sexagesimales.

C: es el número de grados centesimales.

R: es el número de radianes.

Hallar la medida del ángulo.

Resolución:

De la condición: $CR - SR = 20$

$R(C - S) = 20 \quad ...(1)$

Recordando: $S = \dfrac{180R}{\pi}$, $C = \dfrac{200R}{\pi}$

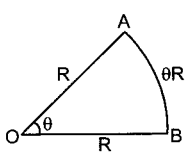
Sustituyendo en (1): $R\left(\dfrac{20R}{\pi}\right) = 20$

$\Rightarrow R = \pm\sqrt{\pi}$

Por lo tanto, edida del angulo es: $\sqrt{\pi}$ rad

47. Un terreno tiene la forma de un sector circular cuyo perímetro mide 1000 m ¿Cuál debe ser la medida del radio para que el área del sector circular sea máxima?

Resolución:



Sea: $m\angle AOB = \theta$

$\Rightarrow L(\widehat{AB}) = \theta R$

A: Área del terreno

Dato: Perímetro

$1000 = R + R + \theta R$

$1000 = R(2 + \theta)$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{1000}{R} - 2 \quad ...(1)$

Sabemos que: $A = \theta\dfrac{R^2}{2} \quad ... (2)$

Reemplazando la expresión de (1) en (2) tenemos:

$A = \left(\dfrac{1000}{R} - 2\right)\dfrac{R^2}{2}$

$A = \dfrac{1000}{R}\left(\dfrac{R^2}{2}\right) - 2\left(\dfrac{R^2}{2}\right)$

$A = 500R - R^2$

$A = -(R^2 - 500R)$, ahora completando cuadrados

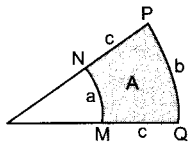
$A = -((R - 250)^2 - (250)^2)$

$\underbrace{A}_{\substack{max \\ Dato}} = (250)^2 - \underbrace{(R - 250)^2}_{0}$

$R - 250 = 0 \quad \therefore R = 250$ m

48. Una malla de longitud L se utiliza para cercar un terreno que tiene la forma de un trapecio circular. Calcule el área máxima del terreno que se puede cercar con dicha malla.

Resolución:



A: Área del terreno a cercar

Dato:

$L = a + b + +2c$

$\Rightarrow (a + b) = L - 2c \quad ...(1)$

Sabemos que:

$A = \dfrac{(a + b)}{2}c \quad ... (2)$

$A = \dfrac{(L - 2c)}{2}c$

$2A = Lc - 2c^2$

$\Rightarrow 2c^2 - Lc + 2A = 0$

$C_{1,2} = \dfrac{-(-L) \pm \sqrt{(-L)^2 - 4(2)(2A)}}{2(2)}$

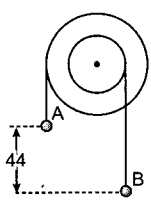
$C_{1,2} = \dfrac{L \pm \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$

$L^2 - 16A \geq 0$ para que C_1 y $C_2 \in \mathbb{R}$

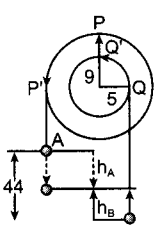
$L^2 \geq 16A \Rightarrow 16A \leq L^2$

$A \leq \dfrac{L^2}{16} \quad \therefore A_{máx} = \dfrac{L^2}{16}$

49. En el gráfico se tienen 2 poleas de radios 9 y 5. Calcular la medida del ángulo que debe girar la polea menor, para que las bolitas A y B se encuentren a igual altura.



Resolución:



Sea θ el ángulo que gira las poleas A y B. (deben girar igual ángulo).

Para estar a igual altura, A debe descender y B debe subir.

Luego: $h_A + h_B = 44 \quad ...(1)$

pero: $h_A = \widehat{PP'} = 9\theta$

$h_B = \widehat{QQ'} = 5\theta$

en(1): $9\theta + 5\theta = 44 \Rightarrow \theta = \dfrac{22}{7}$ rad

$\Rightarrow$ aproximadamente: $\theta = \pi$rad

$\therefore \theta = \pi$ rad

50. Expresar en grados centesimales

$x = 2(a - b + c)$

Si: $a = 21°27'14''$
$b = 11°42'37''$
$c = 23''$

Resolución:

$a = 21° + 27' + 14'', b = 11° + 42' + 37''$
$\Rightarrow a - b = 10° - 15' - 23''$
y como $c = 23''$
$x = 2(a - b + c) = 2(10° - 15')$
$x = 20° - 30' = 20° - 0{,}5° = 19{,}5°$
a grados centesimales:
$\therefore x = 19{,}5°\left(\frac{10^g}{9°}\right) = \frac{195^g}{9} = 21{,}\widehat{6}^g$

51. Siendo "S" y "C" los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo que cumple: $S^{-1} = C^{-1} + C^{-2} + C^{-3} + \ldots$
Calcular la medida de dicho ángulo en radianes.

Resolución:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{C^3} + \ldots$$

Factorizando $\frac{1}{C}$ en el segundo miembro

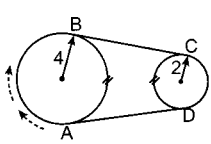
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{C}\left(1 + \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + \ldots\right).$$

$$\frac{C}{S} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{C} + \frac{1}{C^2} + \ldots\right)}_{\frac{1}{S}}$$

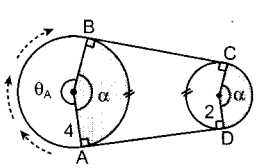
$$\frac{C}{S} = \frac{S+1}{S} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{S+1}{S}$$

$\Rightarrow S = 9$ Por lo tanto, el ángulo es: $\frac{\pi}{20}$ rad

52. En el gráfico, el arco menor AB, es de igual longitud que el arco mayor CD. Si el punto A pasa a la posición del punto B, ¿Cuántas vueltas da la otra rueda?



Resolución:



Por dato:
arco mayor AB = arco menor CD
$\Rightarrow 4\alpha = 2(2\pi - \alpha)$
$2\alpha = 2\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = 2\frac{\pi}{3}$ rad

Finalmente, el punto A debe llegar hasta B, arco mayor AB = un arco L en la rueda menor

$\Rightarrow 4\theta_A = 2\theta$

$2\left(2\pi - 2\frac{\pi}{3}\right) = \theta$ (siendo θ, el número de radianes del ángulo que gira la rueda menor)

Luego: $\theta = 8\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow n = \frac{\theta}{2\pi} \quad \therefore n = \frac{4}{3}$

53. Se ha creado un nuevo sistema de medida angular UNI (U) en donde un grado U equivale a la 1000 ava parte del ángulo de una vuelta.¿A cuántos grados U equivale 0,00314 rad. ($\pi = 3{,}14$)?

Resolución:

Nuevo Sistema UNI (U)
Dato: un grado UNI = 1^u.

$1^u = \frac{1\,\text{vuelta}}{1000}$ (1 vuelta = 2π rad)

$1^u = \frac{2\pi\,\text{rad}}{1000} = \frac{\pi}{500}\text{rad}$

Transformando 0,00314 rad:
Por factor de conversión

$0{,}00314\text{ rad}\left(\frac{1^u}{\frac{\pi}{500}\text{rad}}\right) = 0{,}5^u$

$\therefore$ 0,00314 rad = $0{,}5^u$

54. Si m representa al número de minutos sexagesimales y n al número de segundos centesimales de un mismo ángulo calcular: $E = 10\sqrt[3]{40\frac{m}{n}}$

Resolución:

m: n.° de minutos sexagesimales
n: n.° de segundos centesimales
Sabemos: m = 60S; n = 10 000C

Reemplazando en: $E = 10\sqrt[3]{40\frac{m}{n}}$

$E = 10\sqrt[3]{40\frac{(60S)}{10\,000C}}$

Simplificando: $E = 10\sqrt[3]{\frac{24(S)}{100(C)}}$

pero: S = 9k; C = 10k

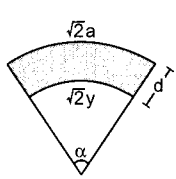
$E = 10\sqrt[3]{\frac{24}{100}\left(\frac{9k}{10k}\right)} = 10\sqrt[3]{\frac{6^3}{10^3}}$

$\therefore E = 6$

55. En un trapecio circular, sus arcos miden $\sqrt{2}$a y $\sqrt{2}$y, (a > y).
Si su área es $\frac{a^2 - y^2}{2}$, calcular la medida del ángulo central del sector circular al cual pertenece.

Resolución:

Área del trapecio:



$A_t = \left(\frac{\sqrt{2}a + \sqrt{2}y}{2}\right)d$

$\frac{a^2 - y^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + y)d$

$(a + y)(a - y) = \sqrt{2}(a + y)d$

$\Rightarrow a - y = \sqrt{2}d$

Ángulo central

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}a - \sqrt{2}y}{d} = \frac{\sqrt{2}}{d}(a - y)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{d}(\sqrt{2}d) \quad \therefore \alpha = 2°$$

56. Calcular: $T = \sqrt{\frac{c+s}{c-s} + \sqrt{\frac{c+2s}{c-s} + \sqrt{\frac{c+6s}{c-s}}}}$

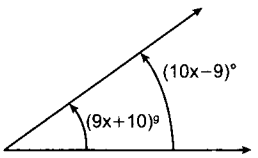
Resolución:

Como: $S = 9n$ y $c = 10n$

Luego: $T = \sqrt{\frac{19n}{n} + \sqrt{\frac{28n}{n} + \sqrt{\frac{64n}{n}}}}$

$$T = \sqrt{19 + \sqrt{28 + 8}} = \sqrt{19 + 6} \quad \therefore T = 5$$

57. Obtener el valor de x del ángulo trigonométrico mostrado.



Resolución:

Del gráfico, igualando la medida del ángulo y multiplicando por $\left(\frac{10^g}{9°}\right)$

$$\Rightarrow (9x + 10)^g = (10x - 9)°\left(\frac{10^g}{9°}\right)$$

$81x + 90 = 100x - 90$

$180 = 19x \quad \therefore x = \frac{180}{19}$

58. Siendo $\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$ rad, la medida de un ángulo central en un sector circular de radio 4 m, cuya longitud del arco subtendido es x m, hallar la medida del ángulo central.

Resolución:

Recordando la relación para un sector circular.

$L = \alpha r$

sustituyendo datos:

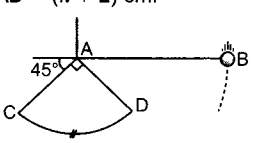
$$x = 4\left(x - \frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow x = 4x - \frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{15}$$

Luego: $\alpha = \frac{2\pi}{15} - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{30}$

$\therefore \alpha = 6°$

59. Calcular el radio del cuadrante ACD, sabiendo que la esferita al soltarse del punto B, llega al punto C; además: $AB = (\pi + 2)$ cm.



Resolución:

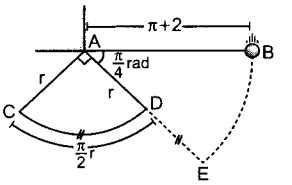
Del gráfico:

$AE = AB$

$\frac{\pi}{2}r + r = \pi + 2$

$\frac{r(\pi + 2)}{2} = \pi + 2$

$\therefore r = 2$



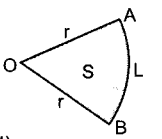
60. ¿Para cuál valor del radio, se hace máximo el área de un sector circular de perímetro 2p?

Resolución:

Graficando el sector circular

Se sabe que:

$S = \frac{Lr}{2}$ (I)



Por condición

$2p = 2r + L \Rightarrow L = 2p - 2r$ (II)

Reemplazando (II) en (I): $S = r(p - r)$

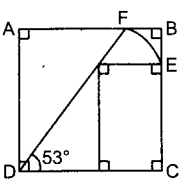
Para maximizar S, completamos cuadrados

$$S = \frac{p^2}{4} - \left(r - \frac{p}{2}\right)^2$$

Si S es máximo

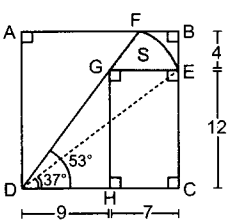
$$\Rightarrow r - \frac{p}{2} = 0 \quad \therefore r = \frac{p}{2}$$

61. Del gráfico ABCD es un cuadrado; sea S el número que representa el área de la reglón sombreada. Calcular: S+ 42, siendo FE un arco con centro en D. Dato: $\overline{EC} = 3\overline{BE} = 12$



Resolución:

Dato: $EC = 3BE = 12$



En ⊿DCE: DE = 20

Relacionando áreas:

$S = S_{DFE} + S_{DCE} - S_{DHG} - S_{HGEC}$

$$S = \frac{4\pi}{45}\frac{(20)^2}{2} + \frac{16(2)}{2} - \frac{12(9)}{2} - 7(12)$$

$$\therefore S + 42 = \frac{160}{9}\pi$$

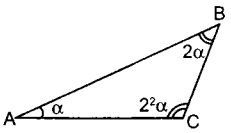
62. Si los ángulos de un triángulo se encuentran en progresión geométrica de razón 2; calcular la me-

dida del menor ángulo en un sistema "M" de medición angular, cuya unidad (1^M) es la medida de un ángulo central en una circunferencia cuando el arco que subtiende resulta ser la séptima parte del radio de dicha circunferencia.

Resolución:

Dato:

Ángulos en progresión geométrica de razón 2



Si: α está en radianes

Tenemos:

$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = \pi$ rad

$\alpha = \frac{\pi}{7}$ rad

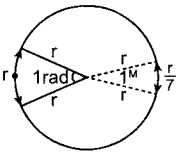
Para el sistema M tenemos:

Del gráfico:

1 rad → r

$1^M = \frac{r}{7}$

1 rad <> 7^M



Convirtiendo el menor ángulo a unidades M:

$\alpha = \frac{\pi}{7}\text{ rad}\left(\frac{7^M}{1\text{rad}}\right) = \frac{7\pi^M}{7}$

$\therefore\ \alpha = \pi^M$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2010 - II)

Si S y C representan los valores de un ángulo en grados sexagesimales y centesimales, respectivamente, y se cumple que:

$$C^2 + S^2 = 2C^3 - 5SC^2 + 4S^2C - S^3 - 2SC$$

Calcule el valor de C.

A) $\frac{361}{11}$ B) $\frac{3111}{11}$ C) $\frac{3610}{11}$

D) $\frac{3670}{11}$ E) $\frac{3680}{11}$

Resolución:

Nos piden: C = 10k

Por dato:

$C^2 + S^2 = \underbrace{2C^3 - 5SC^2 + 4S^2C - S^3}_{P(C)} - 2SC$ ...(I)

Sea: $P(C) = 2C^3 - 5SC^2 + 4S^2C - S^3$

Observar que: P(C) = 0

Factorizando P(C) por divisores binómicos, tenemos:

	2	−5S	$4S^2$	$-S^3$
S		2S	$-3S^2$	S^3
	2	−3S	S^2	0

$\Rightarrow P(C) = (C - S)(2C^2 - 3SC + S^2)$

2C −S

C −S

Luego: $P(C) = (C - S)(2C - S)(C - S)$

Reemplazando en (I):

$C^2 + S^2 = (C - S)(2C - S)(C - S) - 2SC$

$\Rightarrow C^2 + 2SC + S^2 = (C - S)^2(2C - S)$

$(C + S)^2 = (C - S)^2(2C - S)$

Reemplazando S = 9k; C = 10k:

$(19k)^2 = k^2(11k) \Rightarrow k = \frac{361}{11}$

Piden: $C = 10k = 10\left(\frac{361}{11}\right)$ $\therefore\ C = \frac{3610}{11}$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Los números $S = k^3 - \frac{1}{19}$ y $C = k^3 + \frac{1}{19}$ son las medidas de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal, respectivamente. Determine la medida del ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{200}$ B) $\frac{\pi}{180}$ C) $\frac{\pi}{190}$

D) $\frac{\pi}{250}$ E) $\frac{3\pi}{200}$

Resolución:

De la fórmula: S = 9k R = $\frac{\pi k}{20}$

C = 10k

Datos: $S = k^3 - \frac{1}{19}$

$C = k^3 + \frac{1}{19}$ (−)

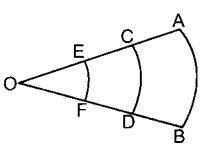
$k = \frac{2}{19}$

$\therefore\ R = \frac{\pi k}{20} = \frac{\pi}{190}$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

De la figura mostrada, AOB, COD y EOF son sectores circulares, donde el área de las regiones EOF, COD y AOB son: s, 3s, 6s, respectivamente. Si $L_{\widehat{AB}} = 4$, calcule $L_{\widehat{CD}} + \sqrt{3}L_{\widehat{EF}}$

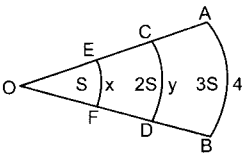


A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

Resolución:

1.°) $6S = \frac{4^2}{2\theta}$, $3S = \frac{y^2}{2\theta}$ $\Big\}\ y = \frac{4}{\sqrt{2}}$



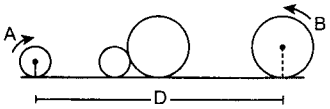
2.° $6S = \frac{4^2}{2\theta}$, $S = \frac{x^2}{2\theta}$ $\Big\}\ y = \frac{4}{\sqrt{6}}$

3.° Reemplazando: $\frac{4}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right) = 4\sqrt{2}$

Clave: C

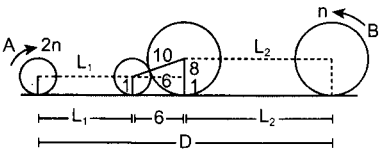
PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

En la figura mostrada, las ruedas A y B dan 2n y n vueltas respectivamente ($n > 2$) desde su posición inicial, hasta el instante en que llegan a tocarse: además: $r_A = 1$ y $r_B = 9$. Calcule D.



A) $10n\pi$ B) $15n\pi + 1$
C) $20n\pi + 2$ D) $22n\pi + 4$
E) $22n\pi + 6$

Resolución:



Del gráfico:

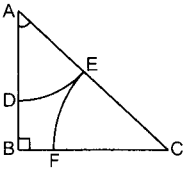
- $2n = \frac{L_1}{2\pi(1)} \Rightarrow L_1 = 4n\pi$
- $n = \frac{L_2}{2\pi(9)} \Rightarrow L_2 = 18n\pi$
- $D = L_1 + 6 + L_2$

$\therefore\ D = 22n\pi + 6$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

La figura adjunta representa sectores circulares en el triángulo rectángulo isósceles ABC. Calcule (en cm) la suma de las longitudes de los arcos $\widehat{DE}$ y $\widehat{EF}$ si AC = 1 cm.



A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2π

Resolución:

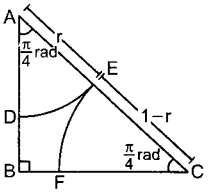
$\triangle ABC$: Isósceles: $m\angle BAC = m\angle BCA = \frac{\pi}{4}$ rad

Aplicando: $L = \theta r$

- $L_{\widehat{DE}} = \frac{\pi}{4} r$
- $L_{\widehat{FE}} = \frac{\pi}{4}(1 - r)$

Piden: $L_{\widehat{DE}} + L_{\widehat{FE}} = \frac{\pi}{4}(r + 1 - r)$

$\therefore\ L_{\widehat{DE}} + L_{\widehat{FE}} = \frac{\pi}{4}$ cm



Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos ruedas de radios R y r (R > r) recorren un espacio igual. ¿Cuál debe ser el radio de una tercera rueda para que recorriendo el mismo espacio, su número de vueltas elevado al cuadrado sea igual al producto del número de vueltas de las 2 primeras ruedas.

A) $\sqrt{\frac{r^3}{R}}$ B) $\sqrt{\frac{R^3}{r}}$ C) $\frac{R-r}{R-r}$
D) $\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}$ E) $\sqrt{Rr}$

2. Dos ruedas de radios R y r (R > r) recorren la misma longitud horizontal k; si la diferencia del número de vueltas de la menor y la mayor es $\left(\frac{k}{8r}\right)$calcular$\left(\frac{r}{R}\right)$.

A) $\frac{\pi-2}{4}$ B) $\frac{4-\pi}{4}$ C) $\frac{\pi-3}{5}$
D) $\frac{4+\pi}{6}$ E) $\frac{\pi-3}{6}$

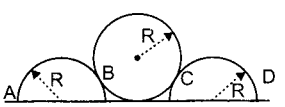
3. Un ciclista recorre una curva de medio kilómetro de radio, con una velocidad de 20 km/h. Hallar el ángulo aproximado en sexagesimales que recorre en 10 s.

A) 4° 21' 58" B) 6° 21' 58" C) 3° 21' 58"
D) 1° 21' 58" E) 5° 1' 58"

4. Del siguiente esquema, calcular la longitud de la curva mayor ABCD, si R = 7 cm (considere $\pi = 22/7$).

A) 65 cm B) 62 cm C) 45 cm
D) 56 cm E) 66 cm

5. Calcular el ángulo que hacen una circunferencia y una recta secante si la longitud de la cuerda que se determina y la longitud de la circunferencia están en la relación de 3 a π



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) 64°

6. Se tiene un triángulo ABC (B = 90°) de catetos 3 y 4, se toma sobre la hipotenusa los puntos M y N de tal forma que BAN y BCM son sectores circulares con centro en A y C respectivamente. Calcular aproximadamente el área del triángulo mixtilíneo MBN.

A) $\frac{333\pi}{120} - 6$ B) $\frac{1069\pi}{360} - \frac{58}{10}$
C) $\frac{333\pi}{120} - \frac{58}{10}$ D) $\frac{1069\pi}{360} - 6$
E) $\frac{1069\pi}{120} - \frac{58}{7}$

7. Se tienen 2 ángulos que cumplen las condiciones: suman $\overline{a(b-1)}^g$ o $\overline{(a-1)(b+1)}^\circ$ y difieren en $\overline{ba}^\circ$; hallar luego los ángulos.

A) 46° y 35° B) 45° y 36°
C) 27° y 18° D) 45° y 27°
E) 20° y 18°

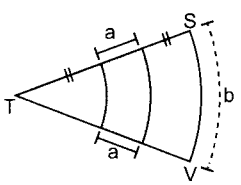
8. Hallar la medida de un ángulo en radianes tal que su medida puede expresarse como:
$\underbrace{[4+8+12+....]}_{n/2 \text{ términos}}{}^g$ o $\underbrace{[1+2+3+...]}_{n \text{ términos}}{}^\circ$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$

A) $\pi/35$ B) $\pi/37$ C) $2\pi/9$
D) $\pi/5$ E) $4\pi/9$

9. En un nuevo sistema angular la unidad de medida 1^x es (1/760) parte del ángulo de una vuelta, además hay 2 submúltiplos 1^y, 1^z tales que 80 de ellos forman la unidad inmediata superior, respectivamente. Convertir $66^g77^m88^s$ al nuevo sistema.

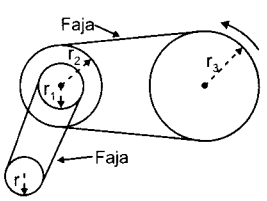
A) $126^x 70^y 30^z$ B) $137^x 70^y 50^z$
C) $116^x 40^y 30^z$ D) $126^x 30^y 70^z$
E) $137^x 50^y 70^z$

10. Del gráfico STV es un sector circular con centro en T. Calcular el área del trapecio circular en función de a y b.



A) $\sqrt{ab}$ B) 2ab C) ab/3
D) ab/2 E) ab/4

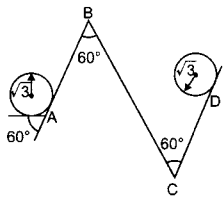
11. Del siguiente sistema de poleas, la polea de radio r_3 gira 240°.



Calcular el número de radianes que gira la polea de radio r. Dato: $\frac{r_3 r_1}{r_2 r} = 3$

A) $\pi/2$ B) $3\pi/2$ C) 3π
D) $3\pi/5$ E) 4π

12. En el gráfico, determinar el número de vueltas que da la ruedita de radio $\sqrt{3}$ al ir desde A hasta D. Si: AB = 24 y BC = CD = 45.

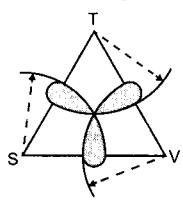


A) $\frac{107}{\pi\sqrt{3}}+\frac{1}{3}$ B) $\frac{107}{2\pi\sqrt{3}}+\frac{1}{3}$ C) $\frac{207}{2\pi\sqrt{3}}+\frac{1}{3}$
D) $\frac{105}{2\pi\sqrt{3}}+\frac{1}{3}$ E) $\frac{105}{\pi\sqrt{5}}+\frac{1}{3}$

13. En un sector circular, su perímetro es constante y su área es máxima. ¿Cuánto mide el ángulo central de dicho sector?

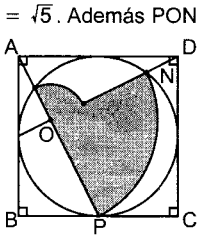
A) 1 rad B) 2 rad C) 0,5 rad
D) 4 rad E) 0,15 rad

14. A partir del gráfico, hallar el área de la región sombreada, si STV es un triángulo equilátero de lado 6.



A) 61π B) $\left[\frac{75\pi}{2}-9\sqrt{3}(2\pi+1)\right]$
C) $(6\pi+18\pi\sqrt{3})$ D) $\left(\frac{75\pi}{2}-18\sqrt{3}\pi\right)$
E) $[63\pi-3\sqrt{3}(12\pi+3)]$

15. A partir del gráfico, hallar el área de la región sombreada, siendo $r=\sqrt{5}$. Además PON es un sector circular.



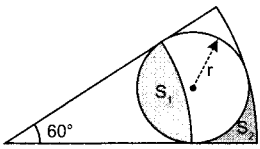
A) 2π
B) 3π
C) 4π
D) $7\pi/2$
E) $5\pi/2$

16. Hallar el número de vueltas que da una moneda de radio 1 cm, sobre un camino en forma de espiral ubicado en una mesa. Se sabe que dicho camino está formado por los arcos de tres sectores circulares sucesivos. Además que los ángulos centrales de los sectores aumentan al doble del anterior y sus radios se van reduciendo a la mitad del anterior.

(Radio mayor = 8 cm y ángulo menor = $\frac{\pi}{9}$ rad)

A) 27/18 B) 3/17 C) 31/9
D) 31/15 E) 31/18

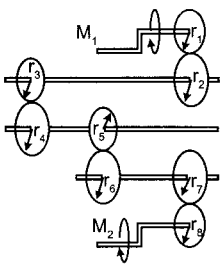
17. En la figura, calcular: $\frac{S_1}{S_2}$



A) 1 B) 2 C) 1/3 D) 3/2 E) 2/3

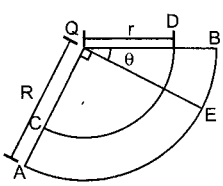
18. En el sistema mostrado, después que la manivela M_1 gira α^o, la manivela M_2 gira α^g.

Calcular: $T=\frac{r_1r_3r_5r_7}{r_2r_4r_6r_8}$



A) 9/10 B) 10/9 C) 9/5
D) 5/9 E) 9/20

19. Si en el gráfico: $L_{\widehat{AE}}-L_{\widehat{EB}}=\frac{1}{2}L_{\widehat{CD}}$. Hallar: θ



A) $\frac{\pi(2R-r)}{2R+r}$ B) $\frac{\pi(R-r)}{R+r}$ C) $\frac{\pi(2R-r)}{2(2R+r)}$
D) $\frac{\pi(2R+r)}{2(2R-r)}$ E) $\frac{\pi(2R-r)}{2(2R+r)}$

20. Los radios de tres ruedas de una locomotora están en la relación 1; 3; 5. Cuando la menor gira 4320°, ¿cuál es la suma de los números de vueltas que dan las otras ruedas?

A) 5,6 B) 3,2 C) 7,8
D) 6,4 E) 8,4

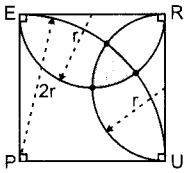
21. Los radios de las ruedas de una bicicleta son: r y R, sabiendo que el número que expresa la medida del ángulo barrido por la rueda r en el sistema sexagesimal, es al número que expresa la medida del ángulo barrido por la rueda de radio R en el sistema centesimal como 5 es a 2.

Calcular: $\sqrt{\frac{R}{r}}$

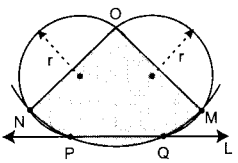
A) 3/2 B) 5/2 C) 8/5 D) 5/3 E) 7/4

22. Hallar el perímetro de la región sombreada.

A) $53\pi/180$
B) $53\pi r/90$
C) $37\pi r/90$
D) $37\pi r/180$
E) $74\pi r/45$



23. Del gráfico, determinar el área del sector circular sombreado. Si O es el centro del arco MN, además P y Q son puntos de tangencia con la recta L.
$r = (\sqrt{6} - \sqrt{2})$



A) $\pi/2$ B) $3\pi/4$ C) π D) $3\pi/2$ E) 2π

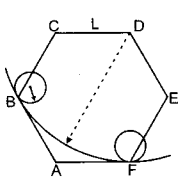
24. Dos postes de luz iguales, están separados una distancia de $(105\sqrt{3})$ dm. Debido a un movimiento sísmico, ambos postes se parten en un mismo instante, dejando en pie los 3/8 partes de su altura. Caen uno en dirección del otro (uno contra el otro), chocando en cierto punto los extremos superiores de ambos postes. Si al caer dichos extremos superiores describen un arco de 110 dm (ambos postes), hasta el momento que chocan, calcular la longitud del arco que hubiera descrito uno de los extremos superiores si el otro poste no hubiera estado $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

A) 180 dm B) 210 dm C) $282,\widehat{83}$ dm
D) $232,\widehat{83}$ dm E) 244,52 dm

25. Los radios de las ruedas de una bicicleta son R y r. (R > r). Al recorrer una cierta distancia, la menor da n vueltas más que la mayor. ¿Cuál sería la suma de los números de vueltas que dan ambas ruedas?

A) $\frac{nR}{1}$ B) $\frac{nr}{R}$ C) $n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)$
D) $n\left(\frac{R-r}{R+r}\right)$ E) $\frac{nRr}{R^2-r^2}$

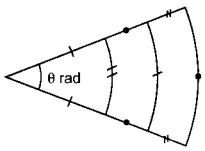
26. ABCDEF es un hexágono regular, de lado igual a L. Si el número de vueltas que da la rueda de radio $\sqrt{3}$ al desplazarse de B a F es 7/6.
Calcule: L



A) 6,5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

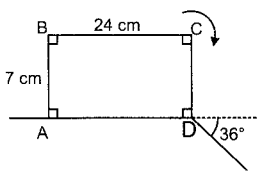
27. Del gráfico, calcular: $T = \frac{1+\theta^3}{1-\theta}$

A) 1
B) 2
C) 1/2
D) 4
E) 1/4



28. En el gráfico mostrado, calcular la longitud de la trayectoria descrita por el punto B, después que la placa rectangular gire en el sentido indicado y descanse sobre $\overline{DC}$ en la superficie inclinada $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

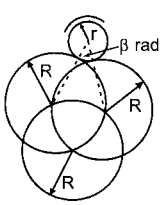
A) 33 cm
B) 44 cm
C) 55 cm
D) 66 cm
E) 110 cm



29. Se tienen dos aros conectados tangencialmente de radios 2 m y 3 m. Calcular el número de vueltas que da una rueda de radio de 1 m al recorrer, exteriormente, el sistema por primera vez.

A) 901/180 B) 953/180 C) 323/180
D) 413/180 E) 503/180

30. En la figura, se observan tres circunferencias de radios iguales a R. Hallar el número de vueltas que da la rueda de radio r, luego de recorrer el contorno exterior de las tres circunferencias, si esta vuelve a su posición inicial por primera vez.
(3r = 2R)



A) $\frac{5}{4\pi}(2\pi + 3\beta)$ B) $\frac{5}{4\pi}(2\pi + 5\beta)$
C) $\frac{5}{4\pi}(\pi + 3\beta)$ D) $\frac{5}{4\pi}(\pi + 4\beta)$
E) $\frac{5}{4\pi}(\pi + 2\beta)$

31. Determinar la distancia que avanza un ciclista al hacer girar α radianes los pedales, siendo:

r_1: radio de la catalina soldada a los pedales.
r_2: radio de la catalina soldada a la rueda trasera.
R: radio de la rueda buena.

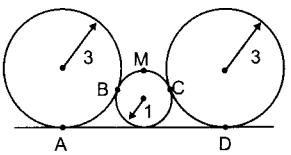
Además, que las catalinas están rodeadas por una cadena perfectamente tensa.

A) $\alpha\left(\frac{r_1r_2}{R}\right)$ B) $\alpha\left(\frac{r_1R}{r_2}\right)$ C) $\alpha\left(\frac{r_2R}{r_1}\right)$

D) $\alpha\left(\frac{r_1+r_2}{R}\right)$ E) $\alpha\left(\frac{R}{r_1+r_2}\right)$

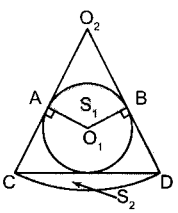
32. Del gráfico, calcular la longitud del arco ABMCD

A) $7\pi/6$
B) $8\pi/3$
C) $\pi/3$
D) $5\pi/2$
E) $5\pi/6$



33. Del gráfico mostrado, calcular la relación de las regiones S_1 y S_2, respectivamente.

A) $\sqrt{3}$
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
D) $\sqrt{\frac{1}{3}}$
E) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

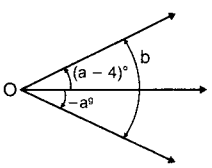


34. ¿Cuántos segundos centesimales están contenidos en un ángulo que equivale a la milésima parte del ángulo de una vuelta?

A) 2700 B) 4300 C) 3000
D) 4000 E) 3700

35. En el siguiente gráfico, obtener el valor de 114a − b

A) 260
B) 240
C) 210
D) 200
E) 180



36. Los números que representan la medida en sexagesimal y centesimal de un ángulo se encuentran en progresión aritmética; si además su número de grados sexagesimales y radianes están en progresión geométrica de la misma razón, calcular el ángulo en sexagesimales.

A) $(\pi/20)°$ B) $(\pi/30)°$ C) $(\pi/18)°$
D) $(\pi/40)°$ E) $(\pi/45)°$

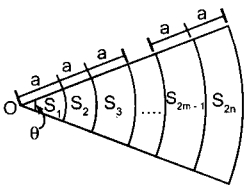
37. Si las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son los números de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo, hallar el número de radianes de dicho ángulo, en términos de b y c.

A) $-\frac{1800c}{19\pi b}$ B) $-\frac{19c\pi}{1800b}$ C) $\frac{19\pi b}{1800c}$

D) $19\pi bc$ E) $\frac{-b\pi}{180a}$

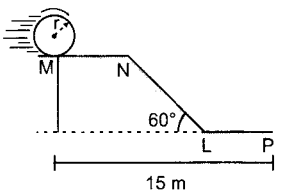
38. Del gráfico adjunto, O es centro de los sectores circulares. Reducir la expresión: $T = \sum_{k=1}^{n}(S_{2k} - S_{2k-1})$

A) $\frac{\theta a^2 n}{2}$
B) $\theta\pi a^2 n$
C) $\frac{\theta a^2}{3}$
D) $4\theta a^2 n$
E) $6\theta a^2 n$



39. Del gráfico mostrado, calcular $\pi(6n - 1)$ siendo n el número de vueltas que genera la rueda (r = 30 cm) al recorrer de M a P, sin resbalar. Dato: MN = NL = LP

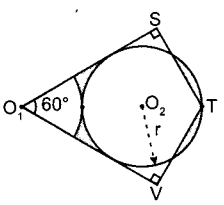
A) $140 - \sqrt{2}$
B) $180 - 2\sqrt{3}$
C) $360 - 3\sqrt{3}$
D) $180 - 6\sqrt{2}$
E) $90 + 2\sqrt{3}$



40. Una ruleta está dividida en 24 partes iguales, comenzando del 1 y llegando al 24 siguiendo el sentido horario. Si partiendo del 9 la aguja de la ruleta gira un ángulo de $(-103\pi/4)$ radianes ¿cuál será el número premiado?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 16 E) 12

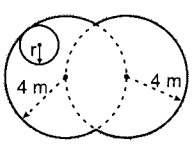
41. Del gráfico mostrado, calcular el perímetro de la reglón sombreada si O_1 y O_2 son centros.



A) $r\left(5\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\right)$ B) $r\left(\frac{5\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$ C) $r\left(2\frac{\pi}{3} + 3\sqrt{2}\right)$

D) $2r(2\pi + 1)$ E) $2r\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$

42. Calcular la longitud recorrida por el centro de la rueda de r = 1 m de radio, cuando recorre, por primera vez, el interior del circuito mostrado sobre un mismo plano.



A) $\frac{26\pi}{3}$ m B) $22\frac{\pi}{6}$ m C) $20\frac{\pi}{3}$ m

D) $\frac{16\pi}{5}$ m E) $\frac{25\pi}{3}$ m

43. Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal están dados por:
$S = ax - b$ y $C = ax + b$
halle el complemento de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{(5-a)\pi}{4}$ B) $\frac{(5-b)\pi}{10}$ C) $\frac{(5+b)\pi}{5}$
D) $\frac{(5-a)\pi}{5}$ E) $\frac{(a-b)\pi}{5}$

44. Si la raíz cuadrada de la décima parte del producto de los números de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo, excede a $(20/\pi)$ veces su número de radianes en 2, halle el suplemento de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{80}$ B) $\frac{19\pi}{20}$ C) $\frac{21\pi}{40}$
D) $\frac{2\pi}{5}; \frac{19\pi}{20}$ E) $\frac{19\pi}{20}; \frac{41\pi}{40}$

45. Se idean dos sistemas de medidas angulares tal que la unidad de medida del primero es $(1/30\theta)$ parte del ángulo de una vuelta y la unidad de medida del segundo es los $\frac{4}{200+\pi}$ veces el promedio de las unidades de medida del sistema francés e internacional, luego si un ángulo mide x unidades del primer sistema e y unidades del segundo sistema, entonces se cumple.

A) $\frac{x}{150} = \frac{y}{100} = \frac{R}{\pi}$ B) $\frac{x}{150} = \frac{y}{81} = \frac{R}{\pi}$
C) $\frac{x}{150} = \frac{y}{50\pi} = \frac{R}{\pi}$ D) $\frac{x}{20} = \frac{y}{19} = \frac{R}{\pi}$
E) $\frac{x}{150} = \frac{y}{100\pi} = \frac{R}{\pi}$

46. Se ha medido un ángulo positivo en los tres sistemas conocidos, si respecto a los números de dichas medidas se plantea lo siguiente. Si al número mayor le restamos el número intermedio, da los mismo que si restásemos el recíproco de $\frac{36\pi}{25}$ al producto del intermedio y menor número. Halle la medida de dicho ángulo en radianes.

A) 0,431 B) 0,148 C) 0,774
D) 0,447 E) 0,139

47. Siendo S, C y R los convencionales para un ángulo trigonométrico antihorario, calcule el mínimo valor que admite la expresión.
$\frac{(S+x)(C+y^2)(R+z^4)}{\sqrt{x}\,yz^2}$; si x; y; $z \in R^+$
Además el ángulo mide $(0{,}01\pi)^{2/3}$ rad.

A) 48 B) $48\sqrt{10}$ C) 4,8
D) $4{,}8\sqrt{10}$ E) 480

48. Siendo S y C los números convencionales tal que: $\sqrt[S]{S} = \sqrt[C]{C}$. Calcular: $\sqrt[9]{S} + \sqrt[10]{C}$

A) 20/9 B) 181/90 C) 9/5
D) 90/181 E) 10/9

49. Si el número de segundos sexagesimales del ángulo cuya medida $\overline{ab}^m$ es 2754, calcule a/b.

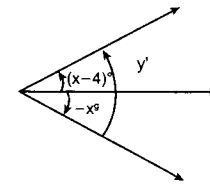
A) 2,3 B) 1,4 C) 1,6
D) 1,3 E) 2,0

50. ¿Cuántos segundos centesimales están contenidos en un ángulo que equivale a la milésima parte del ángulo de una vuelta?

A) 2900 B) 4300 C) 3000
D) 4000 E) 3700

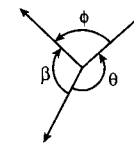
51. En el siguiente gráfico, obtenga el valor de $114x - y$

A) 220
B) 240
C) 210
D) 200
E) 180



52. Se tiene los ángulos trigonométricos:
$\theta = (1 + x - x^2)$ rad; $\beta = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ rad
Según el gráfico calcule ϕ, cuando θ tome su máximo valor.
Considere 1 rad = 57°17'44"

A) 245°24'32"
B) 188°08'44"
C) 245°20'18"
D) 229°54'36"
E) 188°06'48"



CLAVES

1. E	8. D	15. E	22. B	29. B	36. A	43. B	50. D
2. B	9. A	16. E	23. C	30. A	37. B	44. E	51. B
3. B	10. D	17. B	24. D	31. B	38. B	45. E	52. E
4. E	11. E	18. A	25. C	32. B	39. B	46. E	
5. A	12. B	19. E	26. D	33. D	40. D	47. D	
6. D	13. B	20. D	27. B	34. D	41. B	48. A	
7. D	14. B	21. A	28. C	35. B	42. A	49. C	

Razones trigonométricas de ángulos agudos

02 capítulo

Al-Battani (858 d. C.-929 d. C.) fue un príncipe, astrónomo, astrólogo y matemático árabe. Es muy conocido por haber logrado una determinación precisa del año solar como 365 días, 5 horas, 46 minutos y 24 segundos. Realizó muchos y muy importantes trabajos en astronomía: corrigió cálculos orbitales realizados por Claudio Ptolomeo usando la trigonometría, calculó con gran precisión la duración del año solar, con solo una diferencia de 2 minutos y 26 segundos con respecto a la medición actual y describió la inclinación de la eclíptica y su relación con las estaciones.

Al-Battani también realizó excelentes observaciones de los eclipses lunares y solares, descubrió la existencia de los eclipses solares anulares y comprobó que el apogeo solar –distancia máxima entre la Tierra y el Sol– no es constante.

En el campo de la Matemática y Trigonometría aportó soluciones muy ingeniosas para algunos problemas trigonométricos usando los métodos de proyección ortográfica. Ganó gran fama con el uso de las relaciones trigonométricas que todavía hoy se encuentran en uso y fue el primero en reemplazar las cuerdas griegas por los senos. También desarrolló el concepto de cotangente. Escribió muchos libros de Astronomía y Trigonometría.

Fuente: Wikipedia

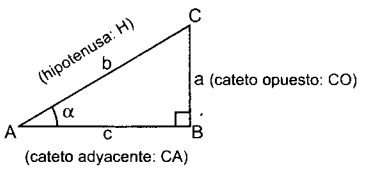
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Se denomina razón trigonométrica (RT) al cociente que se establece entre las longitudes de dos de los lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.

Las razones trigonométricas son seis y se denominan: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; su notación es la siguiente:

- senA : seno del ángulo A o seno de A
- cosA : coseno del ángulo A o coseno de A
- tanA : tangente del ángulo A o tangente de A
- cotA : cotangente del ángulo A o cotangente de A
- secA : secante del ángulo A o secante de A
- cscA : cosecante del ángulo A o cosecante de A

Sea ABC un triángulo rectángulo (B = 90°), las razones trigonométricas de α se definen:



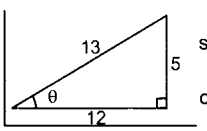
$$\text{sen}\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{CA}{CO} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{c}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{H}{CA} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{c} \qquad \csc\alpha = \frac{H}{CO} = \frac{b}{a}$$

Ejemplo:

Hallar las razones trigonométricas de θ.



$$\text{sen}\theta = \frac{5}{13};\ \tan\theta = \frac{5}{12};\ \sec\theta = \frac{13}{12}$$

$$\cos\theta = \frac{12}{13};\ \cot\theta = \frac{12}{5};\ \csc\theta = \frac{13}{5}$$

Observaciones

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. (Teorema de Pitágoras).

- A las razones $\cot\alpha$ y $\tan\alpha$; $\sec\alpha$ y $\cos\alpha$; $\csc\alpha$ y $\text{sen}\alpha$ se les denomina "razones trigonométricas recíprocas".

  $$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha};\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};\quad \csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

- También es correcto afirmar que:

  $\cot\alpha\tan\alpha = 1$; $\sec\alpha\cos\alpha = 1$; $\csc\alpha\,\text{sen}\alpha = 1$

Ejemplos:

- $\text{sen}20°\csc20° = 1$;
- $\tan75°\cot75° = 1$;
- $\sec2°\cos2° = 1$

Ejemplo:

Hallar α (α: agudo) en cada caso.

- $\text{sen}\alpha\csc10° = 1 \Rightarrow \alpha = 10°$
- $\cot85°\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 85°$
- $\cos\alpha\sec62° = 1 \Rightarrow \alpha = 62°$

Observación

En todo triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de los catetos, entonces se cumple:

$0 < \text{sen}\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$; $\sec\alpha > 1$; $\csc\alpha > 1$

Ejemplo:

Marcar lo incorrecto: (α, ϕ y θ son agudos).

- $\text{sen}\theta = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
- $\cos\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
- $\sec\alpha = \sqrt{7} - \sqrt{5}$
- $\csc\phi = 8/3$
- $\cos\theta = 1/19$

Resolución:

- $\text{sen}\theta = \sqrt{5} - \sqrt{3} < 1$ (correcto)
- $\sec\alpha = \sqrt{7} - \sqrt{5} < 1$ (incorrecto)
- $\cos\theta = \frac{1}{19} > 1$ (correcto)
- $\cos\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ (correcto)
- $\csc\phi = \frac{8}{3} > 1$ (correcto)

Observación

La razón coseno es la co-razón de la razón seno y viceversa, la cotangente es la co-razón de la tangente y viceversa, la cosecante es la co-razón de la secante y viceversa.

El valor de las RT solo dependen de la medida del ángulo.

TEOREMA DEL COMPLEMENTO

Cualquier razón trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la co-razón del ángulo complementario. Si α es un ángulo agudo entonces:

$$\boxed{\text{RT}(\alpha) = \text{co-RT (complemento de } \alpha)}$$

Ejemplos:

- $\text{sen}20° = \cos70°$
- $\csc\frac{\pi}{8} = \sec\frac{3\pi}{8}$
- $\cos40° = \text{sen}50°$
- $\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
- $\tan10° = \cot80°$
- $\csc(90° - \phi) = \sec\phi$
- $\text{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$
- $\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$
- $\tan\frac{\pi}{5} = \cot\frac{3\pi}{10}$

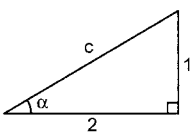
Observación

Como las razones trigonométricas solo dependen de la medida del ángulo, entonces si conocemos el valor de solo una de ellas, las restantes se pueden calcular construyendo un triángulo rectángulo.

Aplicaciones:

1. Si $\tan\alpha = 0{,}5$ (α: agudo), calcular: $\csc\alpha$ y $\sec\alpha$

Resolución:



Dato: $\tan\alpha = 1/2$

Teorema de Pitágoras:

$c^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

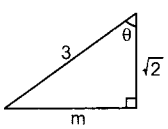
$\Rightarrow \csc\alpha = \frac{c}{1} = \sqrt{5}$ y $\sec\alpha = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2. Si $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (θ: agudo), calcular $\tan\theta$ y $\csc\theta$

Resolución:

Teorema de Pitágoras:

$3^2 = m^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow m = \sqrt{7}$



$\tan\theta = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\csc\theta = \frac{3}{m} = \frac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow \csc\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

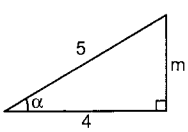
3. Si $\sec\alpha = 1{,}25$, calcular: $R = 4\cot\alpha + \csc\alpha$ (α: agudo)

Resolución:

Teorema de Pitágoras:

Dato: $\sec\alpha = 1{,}25 = 5/4$

$5^2 = m^2 + 4^2 \Rightarrow m = 3$



$\cot\alpha = \frac{4}{m} = \frac{4}{3}$

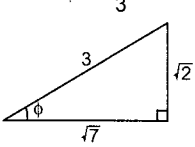
Entonces: $R = 4\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow R = 7$

4. Si $\operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{2}}{3}$ y $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{5}$ (θ y ϕ: ángulos agudos) calcular: $R = \dfrac{\tan\theta\cot\phi + \cos\phi\sec\theta}{\csc\theta\csc\phi - \cot\theta\cot\phi}$

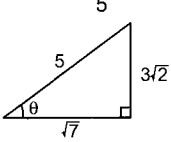
Resolución:

Con los valores indicados construimos un triángulo rectángulo para cada ángulo:

- $\operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{2}}{3}$



- $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{5}$



Luego:

$$R = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right)}{\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{3}}{\frac{5}{2} - \frac{7}{6}} = \frac{7}{2}$$

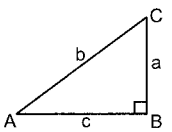
$\Rightarrow R = 3{,}5$

5. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se cumple que $\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C = \frac{1}{8}$. Calcular: $\tan A + \tan C$

Resolución:

$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow 8ac = b^2$



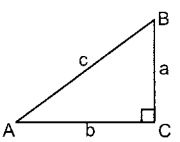
$\tan A + \tan C = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2 + c^2}{ac}$

$\tan A + \tan C = \frac{b^2}{ac} = \frac{8ac}{ac} = 8$

6. Si A y B son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo; simplificar: $R = \left(\frac{\operatorname{sen}A}{\csc B} + \frac{\cos A}{\sec B}\right)\csc B\csc A$

Resolución:

$R = \left(\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{c}{b}} + \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{c}{a}}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$



$R = \left(\frac{2ab}{c^2}\right)\left(\frac{c^2}{ab}\right) \quad \therefore R = 2$

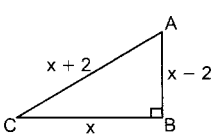
7. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, los lados están en progresión aritmética de razón 2. Hallar tanA. (A > C)

Resolución:

Teorema de Pitágoras:

$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2$

$\Rightarrow x = 8$



$\tan A = \frac{x}{x - 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

8. Reducir:

$$R = \frac{\sec 70^\circ \cos 25^\circ \operatorname{sen} 50^\circ}{\csc 20^\circ \operatorname{sen} 65^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\cot\frac{\pi}{10}\csc\frac{3\pi}{8}\cos\frac{11\pi}{24}}{\sec\frac{\pi}{8}\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\tan\frac{2\pi}{5}}$$

Resolución:

Aplicamos el teorema del complemento:

$\csc 20^\circ = \sec 70^\circ \qquad \sec\frac{\pi}{8} = \csc\frac{3\pi}{8}$

$\operatorname{sen} 65^\circ = \cos 25^\circ \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{24} = \cos\frac{11\pi}{24}$

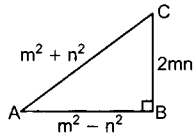
$\cos 40^\circ = \operatorname{sen} 50^\circ \qquad \tan\frac{2\pi}{5} = \cot\frac{\pi}{10}$

$\Rightarrow R = 1 + 1 \quad \therefore R = 2$

TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

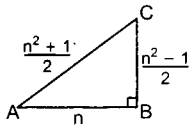
Se denomina de esta manera a aquellos triángulos rectángulos cuya medida de sus lados está expresada por números enteros.

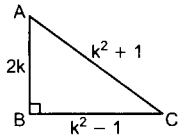
Los lados de todo triángulo pitagórico tienen la siguiente forma:



m y n son números enteros positivos.
$m > n$

De la forma general se deducen casos particulares:

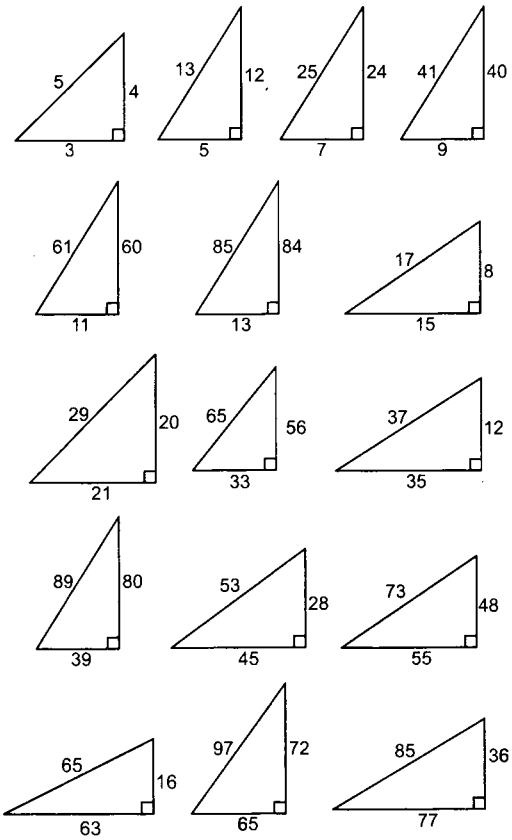




- n: impar ($n > 1$)
- AB: cateto menor

- k: par ($k > 2$)
- AB: cateto menor

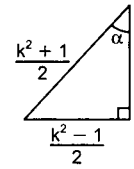
Algunos triángulos pitagóricos son:



Ejemplo:

El área de un triángulo pitagórico (cuyos lados son de la forma: k, $\frac{k^2-1}{2}$, $\frac{k^2+1}{2}$), es numéricamente igual a su perímetro. Calcular la tangente de su mayor ángulo agudo.

Resolución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2}k\left(\frac{k^2-1}{2}\right)$$

$$\text{Perímetro} = k + \frac{k^2-1}{2} + \frac{k^2+1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro} = k + k^2 = k(k+1)$$

Dato: Área = Perímetro (numéricamente)

$$\frac{1}{4}k(k^2-1) = k(k+1) \Rightarrow k(k^2-1) = 4k(k+1)$$

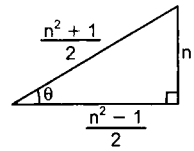
$$(k-1)(k+1) = 4(k+1) \Rightarrow k - 1 = 4 \Rightarrow k = 5$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{k^2-1}{2k} = \frac{12}{5}$$

Nota

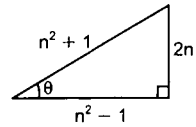
Una fórmula práctica para calcular la medida del menor ángulo de un triángulo pitagórico (De las formas particulares estudiadas anteriormente) es la siguiente:

- n: impar ($n > 1$)



$$\theta = \left(\frac{n}{3n^2+1}\right)(344°)$$

- n: par ($n > 2$)



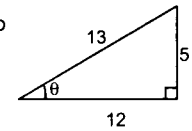
El error que se comete al aplicar esta fórmula práctica es menor de 50" (en valor absoluto).

Ejemplos:

1. Calcular la medida del menor ángulo de un triángulo pitagórico de lados 5, 12, 13.

Resolución:

Este es un triángulo pitagórico de la forma: n; $\frac{n^2-1}{2}$; $\frac{n^2+1}{2}$



En este caso: $n = 5$

Aplicando la fórmula práctica para hallar θ:

$$\theta = \frac{344°(5)}{3(5)^2+1} = 22{,}63157895° <> \theta = 22°37'\,53{,}68''$$

Nota

Si utilizamos $\tan\theta = 5/12 \Rightarrow \theta = \arctan(5/12)$ y mediante una calculadora hallamos este valor, obtenemos $\theta = 22°37'11{,}51''$, como podemos observar hay una gran aproximación con el valor hallado mediante la fórmula práctica.

2. Calcular cuánto miden los ángulos agudos de un triángulo pitagórico cuyos lados miden: 8;15;17

Resolución:

Este es un triángulo pitagórico de la forma:
$2n,\ n^2 - 1,\ n^2 + 1$. En este caso $n = 4$

$$\alpha = \frac{344°(4)}{3(4)^2 + 1} = 28{,}08163265 <> \alpha = 28°4'53{,}68''$$

β es el complemento de α

$\Rightarrow \beta = 90° - 28°4'20{,}95''$

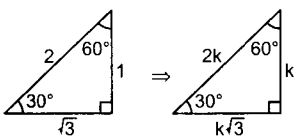
$\Rightarrow \beta = 61°55'6{,}12''$

Nota

Si calculamos estos valores mediante una calculadora obtenemos: $\alpha = 28°4'20{,}95''$ y $\beta = 61°55'39{,}05''$, observar que tan aproximados son los valores hallados mediante la fórmula práctica.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

- RT de 30° y 60°

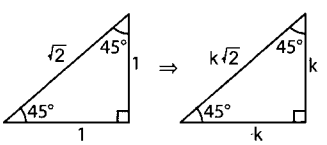


$\text{sen}30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$ $\quad$ $\cot 30° = \sqrt{3} = \tan 60°$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}60°$ $\quad$ $\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \csc 60°$

$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot 60°$ $\quad$ $\csc 30° = 2 = \sec 60°$

- RT de 45°

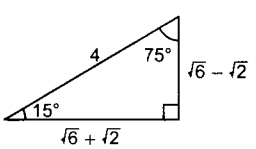


$\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$ $\quad$ $\tan 45° = 1 = \cot 45°$

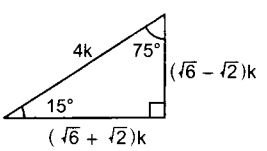
$\sec 45° = \sqrt{2} = \csc 45°$

Triángulo rectángulo de 15° y 75°

Triángulo básico

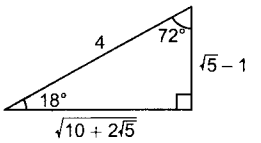


Triángulo genérico



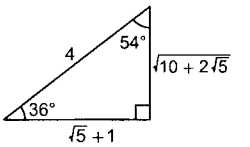
Triángulo rectángulo de 18° y 72°

Triángulo básico



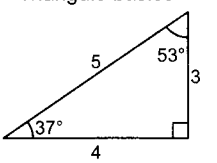
Triángulo rectángulo de 36° y 54°

Triángulo básico

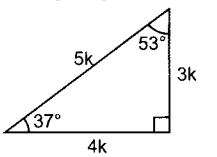


Triángulo rectángulo de 37° y 53°

Triángulo básico

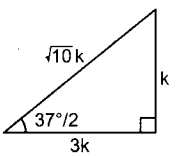


Triángulo genérico

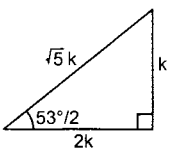


Triángulo rectángulo de 37°/2 y 53°/2

Triángulo genérico

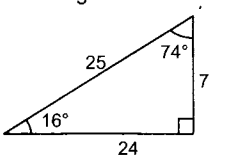


Triángulo genérico

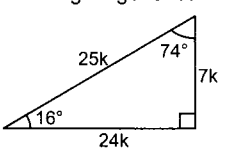


Triángulo rectángulo de 16° y 74°

Triángulo básico

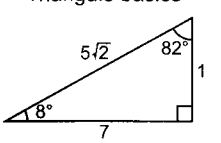


Triángulo genérico

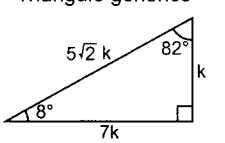


Triángulo rectángulo de 8° y 82°

Triángulo básico



Triángulo genérico



Aplicaciones:

1. Si $\alpha = 15°$; calcular:

$$L = \text{sen}\alpha\,\text{sen}2\alpha\,\text{sen}3\alpha\,\text{sen}4\alpha\,\sec 5\alpha$$

Resolución:

$L = \text{sen}15°\text{sen}30°\text{sen}45°\text{sen}60°\sec 75°$

$L = \text{sen}15°\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sec 75°$

Como: $\text{sen}15°\csc 15° = 1 \ \wedge\ \csc 15° = \sec 75°$

$\Rightarrow \text{sen}15°\sec 75° = 1$

$\therefore L = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$

2. Si: $\sec\alpha = \csc 2\phi$, hallar:

$R = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2} + \phi\right) + \sec(330° - 3\alpha - 6\phi)$

Resolución:

$\sec\alpha = \csc 2\phi \Rightarrow \alpha + 2\phi = 90°$

$R = \tan\left(\dfrac{\alpha + 2\phi}{2}\right) + \sec[330° - 3(\alpha + 2\phi)]$

$R = \tan\left(\dfrac{90°}{2}\right) + \sec[330° - 3(90°)]$

$R = \tan 45° + \sec 60° = 1 + 2 \Rightarrow R = 3$

3. Si: $\text{sen}(\alpha - 20°) = \cos(\theta - 30°)$, α y θ son ángulos agudos, calcular:

$$R = \frac{\tan\left(\dfrac{\alpha + \theta}{4}\right) + \cot\left(\dfrac{\alpha + \theta}{2}\right)}{\cot(\alpha + \theta - 85°) + \tan(\alpha + \theta - 120°)}$$

Resolución:

$\text{sen}(\alpha - 20°) = \cos(\theta - 30°) \Rightarrow \alpha - 20° + \theta - 30° = 90°$

$$R = \frac{\tan\left(\dfrac{140°}{4}\right) + \cot\left(\dfrac{140°}{2}\right)}{\cot(140° - 85°) + \tan(140° - 120°)}$$

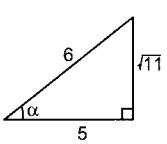
$$R = \frac{\tan 35° + \cot 70°}{\cot 55° + \tan 20°} = \frac{\tan 35 + \cot 70°}{\tan 35 + \cot 70°} = 1$$

4. Si: $\cos\alpha = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{6} + \text{sen}\dfrac{\pi}{3}}{\sqrt{1 + \sec^2\dfrac{\pi}{4}}}$, calcular:

$R = \dfrac{\text{sen}\alpha + \tan\alpha}{\text{sen}\alpha - \tan\alpha}$ (α: agudo)

Resolución:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{\dfrac{5\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3}} = 5/6$$



$$\therefore R = \frac{\dfrac{\sqrt{11}}{6} + \dfrac{\sqrt{11}}{5}}{\dfrac{\sqrt{11}}{6} - \dfrac{\sqrt{11}}{5}} = \frac{\dfrac{11\sqrt{11}}{30}}{-\dfrac{\sqrt{11}}{30}} \Rightarrow R = -11$$

5. Si $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ rad; calcular:

$R = \text{sen}2\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\csc 3\theta$

Resolución:

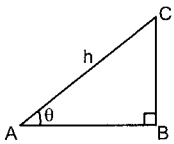
$R = \text{sen}\left[2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12}\right)\sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{12}\right)\csc\left[3\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

$R = \text{sen}\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{3}\sec\dfrac{\pi}{6}\csc\dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)(\sqrt{2})$

$\therefore R = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

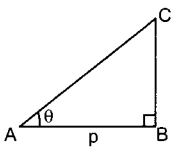
RESOLUCIONES DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Caso I: Datos: ángulo (θ), hipotenusa (h)
Incógnitas: catetos AB y BC



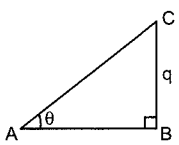
- $\dfrac{BC}{h} = \text{sen}\theta \Rightarrow BC = h\text{sen}\theta$
- $\dfrac{AB}{h} = \cos\theta \Rightarrow AB = h\cos\theta$

Caso II: Datos: ángulo (θ), cateto adyacente (p)
Incógnita: hipotenusa (AC) y cateto (BC)



- $\dfrac{AC}{p} = \sec\theta \Rightarrow AC = p\sec\theta$
- $\dfrac{BC}{p} = \tan\theta \Rightarrow BC = p\tan\theta$

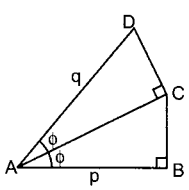
Caso III: Datos: ángulo (θ), cateto opuesto (q)
Incógnita: Hipotenusa (AC) y cateto (AB)



- $\dfrac{AC}{q} = \csc\theta \Rightarrow AC = q\csc\theta$
- $\dfrac{AB}{q} = \cot\theta \Rightarrow AB = q\cot\theta$

Aplicaciones:

1. De la figura adjunta expresar p en términos de q y ϕ.



Resolución:

De la figura:

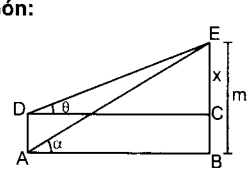
$\triangle ACD$: $AC = q\cos\phi$ ...(1)

$\triangle ABC$: $p = AC\cos\phi$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $p = q\cos^2\phi$

2. Sobre el lado CD de un rectángulo ABCD se construye el triángulo rectángulo DCE, sabiendo que $m\angle EDC = \theta$, $m\angle EAB = \alpha$ y EB = m. Hallar EC.

Resolución:



$\triangle ABE$: $AB = m\cot\alpha$ ...(1)

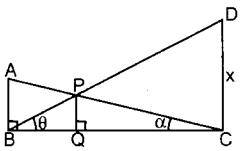
También DC = AB

$\triangle$DCE: $x = DC\tan\theta$ ...(2)

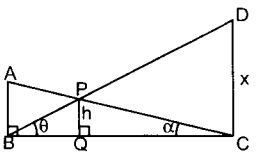
Reemp. (1) en (2):

$x = m\cot\alpha\tan\theta$

3. Si DC = x, expresar PQ en términos de α, θ y x.



Resolución:



Sea PQ = h

$\triangle$DCB: $BC = x\cot\theta$ ...(1)

$\triangle$BQP: $BQ = h\cot\theta$ ...(2)

$\triangle$PQC: $QC = h\cot\alpha$ ...(3)

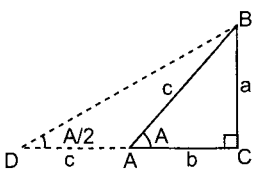
De (2) y (1):

$BC = BQ + QC = h(\cot\theta + \cot\alpha)$

De (1):

$h(\cot\theta + \cot\alpha) = x\cot\theta \Rightarrow h = \dfrac{x\cot\theta}{\cot\alpha + \cot\theta}$

CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA MITAD DE UN ÁNGULO



Una forma práctica para calcular las razones trigonométricas de la mitad de un ángulo agudo es la siguiente: Partimos de un triángulo rectángulo ABC (ver fig.).

Si queremos las razones trigonométricas de (A/2) entonces prolongamos el cateto CA hasta un punto D tal que AD = AB. Luego el triángulo DAB es isósceles $m\angle BDA = A/2$

$$\boxed{\cot\frac{A}{2} = \frac{c+b}{a}}$$

Entonces:

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\cot\frac{A}{2} = \csc A + \cot A}$$

Análogamente:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a} \Rightarrow \boxed{\tan\frac{A}{2} = \csc A - \cot A}$$

Aplicaciones:

1. $\cot 8° = \cot\dfrac{16°}{2} = \csc 16° + \cot 16° = \dfrac{25}{7} + \dfrac{24}{7} = \dfrac{49}{7}$

   $\cot 8° = 7$ (aprox.)

2. $\tan 18°30' = \tan\dfrac{37°}{2} = \csc 37° - \cot 37° = \dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

   $\tan 18°30' = \dfrac{1}{3}$ (aprox.)

3. $\cot 26°30' = \cot\dfrac{53°}{2} = \csc 53° + \cot 53° = \dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4} = 2$

   $\cot 26°30' = 2$ (aprox.)

4. $\cot 15° = \cot\dfrac{30°}{2} = \csc 30° + \cot 30° = 2 + \sqrt{3}$

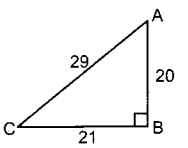
   $\cot 15° = 2 + \sqrt{3}$

5. $\tan 22°30' = \tan\dfrac{45°}{2} = \csc 45° - \cot 45° = \sqrt{2} - 1$

   $\tan 22°30' = \sqrt{2} - 1$

6. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), a = 21 y c = 20. Calcular: $\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{A}{2}$

   Resolución:

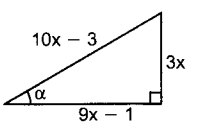


$$\tan\frac{C}{2} = \csc C - \cot C = \frac{29}{20} - \frac{21}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \csc A - \cot A = \frac{29}{21} - \frac{20}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{29}{35}$$

7. De la figura adjunta, calcular: $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$



Resolución:

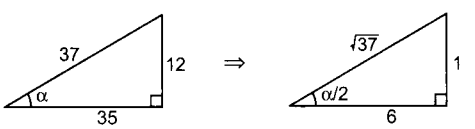
T. de Pitágoras: $(10x - 3)^2 = (3x)^2 + (9x - 1)^2$

$\Rightarrow 100x^2 - 60x + 9 = 9x^2 + 81x^2 - 18x + 1$

Simplificando:

$5x^2 - 21x + 4 = 0 \Rightarrow (5x - 1)(x - 4) = 0 \quad \therefore x = 4$

Entonces:



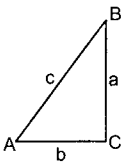
$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{37 + 35}{12} = \frac{72}{12} = 6 \qquad \therefore \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{37}}{37}$$

8. Los lados de un triángulo rectángulo ABC (recto en C) son a, b y c, respectivamente. Calcular M y N si se cumple que:

$$M\cot\frac{A}{2} = \frac{a+b+c}{a+c-b} \quad y \quad N\tan\frac{A}{2} = \frac{a+b-c}{b+c-a}$$

Resolución:

- $M\left(\frac{b+c}{a}\right) = \frac{a+b+c}{a+c-b}$



$$\Rightarrow M = \frac{a}{b+c}\left(\frac{a+b+c}{a+c-b}\right)$$

$$M = \frac{a^2 + a(b+c)}{(a+c-b)(b+c)}$$

$$M = \frac{(c^2-b^2)+a(b+c)}{a(b+c)+(c^2-b^2)} \quad \therefore M = 1$$

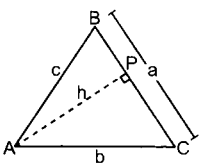
- $N\left(\frac{a}{b+c}\right) = \frac{a+b-c}{b+c-a} \Rightarrow N = \frac{b+c}{a}\left(\frac{a+b-c}{b+c-a}\right)$

$$N = \frac{a(b+c)+(b^2-c^2)}{a(b+c-a)} = \frac{a(b+c-a)}{a(b+c-a)} \quad \therefore N = 1$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto de dos de sus lados multiplicado por el seno del ángulo que forman dichos lados.

Demostración:



- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah$ ...(1)
- ◺APC: h = bsenC; reemplazando en (1):

$$\boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}absenC}$$

Aplicaciones:

1. Se tiene un triángulo ABC tal que AB = 6,5 y AC = 12. Calcular el área de dicho triángulo si tanA = 5/12

Resolución:

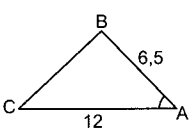
tanA = 5/12

senA = 5/13

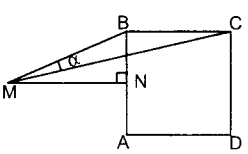
$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)senA$

$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(6,5)(12)\left(\frac{5}{13}\right)$

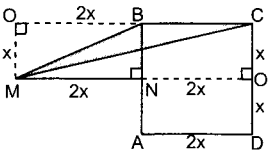
$\therefore A_{\Delta ABC} = 15$



2. En la figura adjunta, ABCD es un cuadrado. N es punto medio y MN = AB. Calcular: senα



Resolución:



◺MOC: $MC = \sqrt{(4x)^2+(x)^2} \Rightarrow MC = \sqrt{17}x$

◺MNB: $MB = \sqrt{(2x)^2+(x)^2} \Rightarrow MB = \sqrt{5}x$

Área del ΔMBC: $A = \frac{1}{2}(MB)(MC)sen\alpha$ ...(1)

Y su área la podemos calcular de la siguiente manera:

$A_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}(x)(BC)$ ...(2)

Luego (1) = (2): $\frac{1}{2}(\sqrt{5}x)(\sqrt{17}x)sen\alpha = \frac{1}{2}x(2x)$

Simplificando: $\sqrt{85}\,sen\alpha = 2 \Rightarrow sen\alpha = \frac{2\sqrt{85}}{85}$

Nota

Ya se mencionó que conociendo el valor de solo una de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α se pueden hallar las demás, construyendo un triángulo rectángulo con el valor dado. Pero esto solo se hace cuando se desea hallar las Razones Trigonométricas de α.

3. Si: $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ (α: agudo); hallar: $\sec\alpha + \csc\alpha$

Resolución:

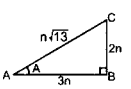
$$\sec\alpha + \csc\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{1} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

Cuando de dato hay longitudes ya no se hace lo anterior. El procedimiento a seguir se explica en el siguiente ejemplo.

4. En un ◺ABC (B = 90°), tanA = 2/3 y la longitud del cateto mayor es 21. Calcular el área del triángulo.

Resolución:

$\tan A = \frac{2}{3} = \frac{CB}{BA} \Rightarrow \begin{matrix} CB = 2n \\ BA = 3n \end{matrix}$



Observemos que el cateto mayor es 3n, por dato 3n = 21 ⇒ n = 7

El área del ◺ABC = $\frac{1}{2}(3n)(2n) = 3n^2$

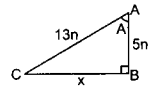
$\Rightarrow 3(7)^2 = 147$

5. El perímetro de un triángulo rectángulo ABC (B = 90°) es 180 m, calcular su área si la secante de su mayor ángulo agudo es 2,6.

Resolución:

Sea A el mayor ángulo agudo.

$A = 2{,}6 = \frac{13}{5} = \frac{CA}{BA} \Rightarrow \begin{matrix} CA = 13n \\ BA = 5n \end{matrix}$



$x^2 = (13n)^2 - (5n)^2 \Rightarrow x^2 = 144n^2$

$x = 12n$

Dato:

$13n + 12n + 5n = 180$

$\Rightarrow n = 6 \Rightarrow AB = 30$ y $BC = 72$

Área: $A_{\triangle ABC} = \frac{(30)(72)}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 1080\ m^2$

ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES (ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN)

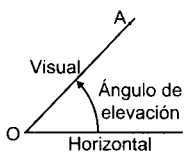
Se denomina ángulos verticales a aquellos contenidos en un plano vertical y ángulos horizontales a aquellos contenidos en un plano horizontal. A continuación definiremos dos nuevos términos, ángulo de elevación y ángulo de depresión. Por convención denominaremos visual a la línea imaginaria que une el punto de observación con el punto observado.

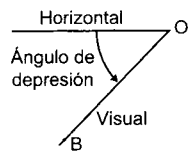
Ángulo de elevación

Se denomina de esta manera al ángulo vertical formado por la línea horizontal y la visual que pasan por el punto de observación cuando el punto observado está por encima de la horizontal.

Ángulo de depresión

Se denomina de esta manera al ángulo vertical formado por la línea horizontal y la visual que pasan por el punto de observación cuando el punto observado está por debajo de la horizontal.





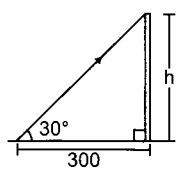
* O pto. de observación

* A y B ptos. observados

Ejemplos:

1. Desde el punto A situado a 300 m de la base de una torre se observa la parte más alta de ésta con un ángulo de elevación de 30°. Calcular la altura de la torre.

Resolución:



$\frac{h}{300} = \tan 30° \Rightarrow h = 300\tan 30°$

$h = 300\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \therefore h = 100\sqrt{3}\ m$

2. Desde lo alto de un acantilado de 45 m de altura los ángulos de depresión de dos botes que están en el mar y en una misma dirección del observador miden 60° y 45°. ¿Qué distancia hay entre los botes?

Resolución:

Sean A y B las posiciones de los botes.

Observar que: $m\angle PAQ = 60°$ y $m\angle PBQ = 45°$

$\triangle PQB$: como $m\angle PBQ = 45°$

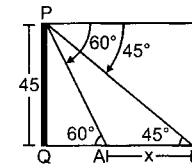
$\Rightarrow PQ = QB = 45\ m$

$\triangle PQA$: $\frac{QA}{45} = \cot 60°$

$\frac{QA}{45} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow QA = 15\sqrt{3}\ m$

$AB = x = QB - QA$

$\therefore x = (45 - 15\sqrt{3})\ m$

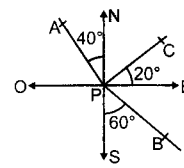


Continuando con las definiciones veamos ahora lo siguiente:

Dirección y rumbo

Se denomina de esta manera al ángulo horizontal que forma la dirección de un punto respecto de otro tomando como referencia el eje norte-sur.

Ejemplo:

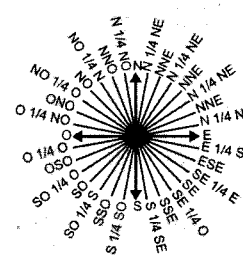


- El rumbo de A respecto de P es: 40° al oeste del norte.
- El rumbo de B respecto de P es: 60° al este del sur.
- El rumbo de C respecto de P es: 70° al este del norte.

ROSA NÁUTICA

Gráfico que muestra las 32 direcciones notables, tomando como referencia los puntos cardinales norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O).

Observaciones



En el gráfico podrá observar la notación: NNE, NE 1/4 N, NE y otras; la forma de leer es la siguiente:

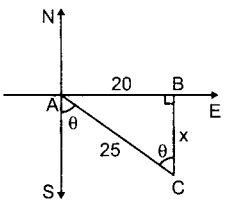
NE	nordeste	SSE	sursudeste
NNO	nornoroeste	SO 1/4 O	sur-oeste-1/4-oeste
NE 1/4 N	nor-este-1/4-norte	S 1/4 SO	sur-oeste
N 1/4 NE	norte-1/4-nor-este	SSO	sursudoeste
SO	sudoeste	NNE	nornordeste

- El menor ángulo formado por dos direcciones contiguas mide 11°15', por ejemplo si Ud. del gráfico toma dos direcciones (contiguas) NE y NE 1/4 E el ángulo que forman mide 11°15'.
- De la observación anterior se deduce que para determinar el menor ángulo que forman dos direcciones cualesquiera de la Rosa Náutica, se tiene que determinar el número de espacios entre ésta y multiplicarlo por 11°15', por ejemplo el menor ángulo formado por las direcciones N y NNO mide 22°30' ya que entre éstas hay dos espacios (ver el gráfico); entre las direcciones O 1/4 SO y SE 1/4 O hay diez espacios (ver el gráfico) entonces el menor ángulo que forman mide: 10(11°15') = 112°30'.
- La dirección NE es equivalente a escribir N45°E y viceversa, la dirección S 1/4 SO es equivalente a S11°15'O, la dirección NO 1/4 O es equivalente a N56°15'O y viceversa.

Aplicaciones:

1. Dos ciudades A y B están separadas 20 km, además B se encuentra al este de A, una ciudad C se encuentra al sur de B y a una distancia de 25 km de A. Hallar la distancia de B y C y cuál es el rumbo de C respecto de A.

Resolución:



Observar que:

$x = \sqrt{(25)^2 - (20)^2}$

$x = \sqrt{625 - 400}$

$x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$ km

Además del triángulo rectángulo se observa que:

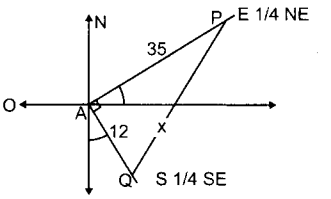
$\tan\theta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53°$

Entonces el rumbo de C respecto de A es: S53°E

2. Dos móviles P y Q parten de un mismo punto, P recorre 35 km con rumbo E 1/4 NE y Q recorre 12 km con rumbo S 1/4 SE. Calcular la distancia entre P y Q.

Resolución:

Observar que el ángulo PAQ mide 90°



Entonces ◺(PAQ):

$x^2 = (35)^2 + (12)^2 \Rightarrow x = \sqrt{1369} \Rightarrow x = 37$

Por lo tanto, la distancia entre P y Q es de 37 km.

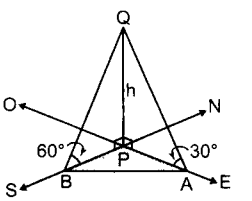
Nota

Es necesario que usted se de cuenta que para resolver los problemas de ángulos de elevación, depresión o de la rosa náutica es importante hacer el gráfico respectivo.

3. Desde un punto A situado al este de un edificio se observa la parte más alta de este con un ángulo de elevación de 30° y desde un punto B situado al sur del edificio se observa el mismo punto con un ángulo de elevación de 60°, si la distancia de A a B es de 60 m, calcular la altura del edificio.

Resolución:

Por la base del edificio (P) trazamos los ejes norte-sur, este-oeste y ubicamos los puntos A y B.



◺BPQ: BP = hcot60° ∧ ◺APQ: AP = hcot30°

◺BPA: $(AB)^2 = (BP)^2 + (AP)^2$

$(60)^2 = (h\cot 60°)^2 + (h\cot 30°)^2$

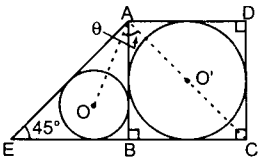
$3600 = h^2\left(\frac{1}{3}\right) + h^2(3) \Rightarrow 3600 = \frac{10h^2}{3} \Rightarrow h = \sqrt{1080}$

$\therefore h = 6\sqrt{30}$ m

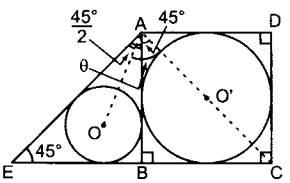
PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura ABCD es un cuadrado y ABE un triángulo rectángulo isósceles. Calcular: $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Usa: $\tan\alpha = \csc(2\alpha) - \cot(2\alpha)$

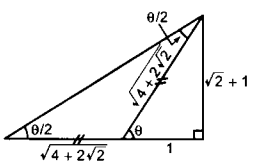


Resolución:



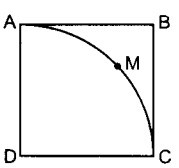
$\tan\theta = \tan\frac{135°}{2} = \csc 135° - \cot 135°$

$\tan\theta = \sqrt{2} - (-1) \quad \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{2} + 1$



$\therefore$ Del gráfico: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1}$

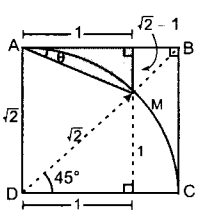
2. En la figura mostrada: ABCD es un cuadrado ADC un sector circular y M punto medio de AC. Calcular la tangente del ángulo MAB.



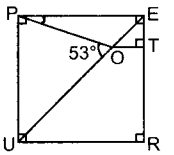
Resolución:

Del ◺sombreado:

$\therefore \tan\theta = \sqrt{2} - 1$



3. En la figura, PERU es un cuadrado cuyo lado mide 8 cm. Si $\tan 8° = 1/7$, determinar el valor de OT (en cm).

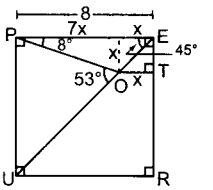


Resolución:

Del gráfico:

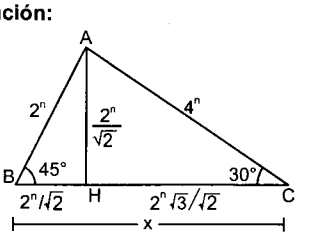
$7x + x = 8$

$\therefore x = 1$ cm



4. En un triángulo ABC, $m\angle B = 45°$ y $m\angle C = 30°$ se tiene que: $AB = 2^n$ y $AC = 4^n$. Calcular BC.

Resolución:



Note que: $x = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}(\sqrt{3})$

$x = \frac{2^n}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}) \qquad ...(\alpha)$

◺AHC: $\text{sen}30° = \frac{\frac{2^n}{\sqrt{2}}}{4^n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^n}{4^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow 4^n(\sqrt{2}) = 2^{n+1}$

$\Rightarrow 2^{2n+1/2} = 2^{n+1} \Rightarrow 2n + 1/2 = n + 1 \quad \Rightarrow n = 1/2$

En (α): $x = \frac{2^{1/2}}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}) \therefore x = 1 + \sqrt{3}$

5. Dado el triángulo rectángulo ABC cuyos lados están en progresión aritmética, cuya razón es cuatro. Determinar la mayor razón trigonométrica de uno de los ángulos agudos del triángulo.

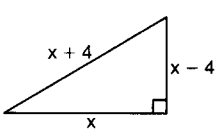
Resolución:

Calculo de x:

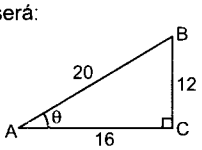
$(x + 4)^2 = x^2 + (x - 4)^2$

$(x + 4)^2 - (x - 4)^2 = x^2$

$4(x)(4) = x^2 \Rightarrow x = 16$



Luego el ◺ será:



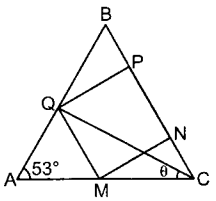
Luego la mayor razón trigonométrica de θ será:

mayor lado $\longrightarrow$ $\frac{20}{12} = \csc\theta$

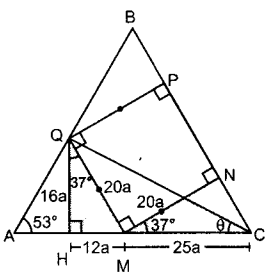
menor lado $\longrightarrow$

$\therefore\ \csc\theta = 5/3$

6. En la figura mostrada, ABC es un triángulo isósceles (AB = BC), MNPQ es un cuadrado, $m\angle BAC = 53°$, $m\angle MCQ = \theta$. Calcular: $\tan\theta$.



Resolución:



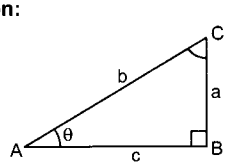
Sea: QP = 20a

$\triangle QHC$: $\therefore\ \tan\theta = \frac{16a}{37a} = \frac{16}{37}$

7. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si: $\tan A\cos C = 3$.

Calcular el valor de: $M = \sqrt{\sec^2 A - 3\csc C}$.

Resolución:



Condición: $\tan A\cos C = 3$

$\Rightarrow \frac{a}{c}\left(\frac{a}{b}\right) = 3 \Rightarrow a^2 = 3bc \quad ...(\alpha)$

Se pide:

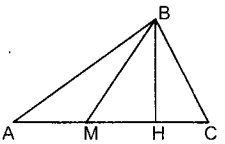
$M = \sqrt{\sec^2 A - 3\csc C}$

$M = \sqrt{\frac{b^2}{c^2} - 3\left(\frac{b}{c}\right)} = \sqrt{\frac{b^2 - 3bc}{c^2}}$

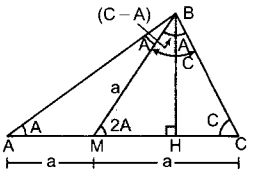
Reemplazamos (α):

$M = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2}} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{c^2}{c^2}} \quad \therefore\ M = 1$

8. La figura muestra un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B. Desde B se traza la mediana $\overline{BM}$ y la altura $\overline{BH}$. Si $\tan A = 1/4$, hallar $\tan(C - A)$.



Resolución:



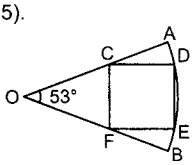
En el triángulo sombreado: 2A $\wedge$ (C − A) son complementarios.

$\Rightarrow \tan(C - A) = \cot 2A \Rightarrow \tan(C - A) = \frac{1 - \tan^2 A}{2\tan A}$

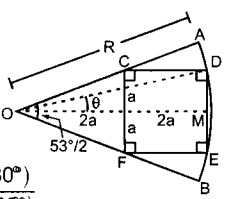
Reemplazamos: $\tan(C - A) = \frac{1 - (1/4)^2}{2(1/4)} = \frac{15/16}{1/2}$

$\therefore\ \tan(C - A) = 15/8$

9. En la figura AOB es un sector circular y CDEF es un cuadrado. Determinar aproximadamente la razón entre las longitudes de los arcos DE y AB ($\tan 14° = 0{,}25$).



Resolución:



$\triangle ODM$: $\tan\theta = \frac{a}{4a}$

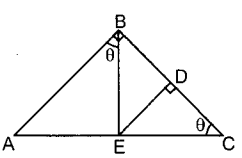
$\Rightarrow \theta = 14°$

$m\angle DOE$: 28°

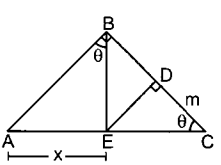
Luego: $\frac{L_{\widehat{DE}}}{L_{\widehat{AB}}} = \frac{(2)(28)(\pi/180°)}{(2)(53°)(\pi/180°)}$

$\therefore\ \frac{L_{\widehat{DE}}}{L_{\widehat{AB}}} = 0{,}53$

10. De la figura DC = m unidades, hallar AE.



Resolución:



$\triangle$EDC: $\dfrac{EC}{m} = \sec\theta \Rightarrow EC = m\sec\theta$

$\triangle$BEC: $\dfrac{BE}{EC} = \tan\theta \Rightarrow BE = EC\tan\theta$

$BE = (m\sec\theta)\tan\theta$

$\triangle$ABE: $\dfrac{x}{BE} = \tan\theta$

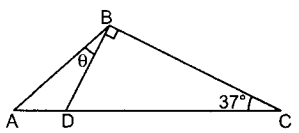
$\Rightarrow x = BE\tan\theta$

$x = (m\sec\theta\tan\theta)\tan\theta$

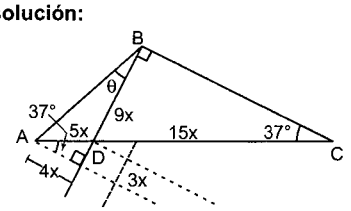
$x = m\sec\theta\tan^2\theta$

Que es equivalente a: $x = m(1 + \tan^2\theta)\tan\theta\,\text{sen}\theta$

11. De la figura mostrada, hallar $\cot\theta$ si: DC = 3AD

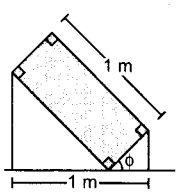


Resolución:



Del gráfico: $\cot\theta = \dfrac{3x + 9x}{4x}$ $\therefore \cot\theta = 3$

12. Hallar el área de la región sombreada (m^2) en términos de ϕ.



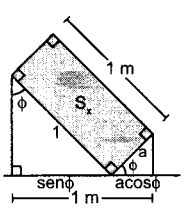
Resolución:

Note que: $\text{sen}\phi + \text{a}\cos\phi = 1$

$\text{a}\cos\phi = 1 - \text{sen}\phi$

$a = (1 - \text{sen}\phi)\left(\dfrac{1}{\cos\phi}\right)$

$\Rightarrow a = (1 - \text{sen}\phi)\sec\phi$



Luego:

$S_x = a(1)$ $\therefore S_x = (1 - \text{sen}\phi)\sec\phi$

13. Los lados de un triángulo rectángulo están representados por 3 números en progresión aritmética. Calcular el coseno del menor ángulo agudo.

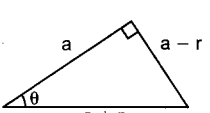
Resolución:

Por el teorema de Pitágoras:

$(a + r)^2 = a^2 + (a - r)^2$

$(a + r)^2 - (a - r)^2 = a^2$

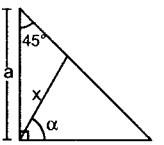
$4ar = a^2 \Rightarrow a = 4r$



Luego:

$\cos\theta = \dfrac{a}{a + r} = \dfrac{4r}{5r}$ $\therefore \cos\theta = \dfrac{4}{5}$

14. En la figura mostrada, hallar x en términos de α y a

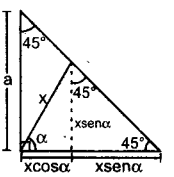


Resolución:

Del gráfico:

$x\cos\alpha + x\text{sen}\alpha = a$

$\therefore x = \dfrac{a}{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}$



15. Siendo 3x e y ángulos agudos, y se cumple:

$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(2y - 2x)$

$\tan 3x\tan y = 1$

Calcular: $S = \cot(3x) + \cot y + \tan y$

Resolución:

- $\text{sen}(x + y) = \text{sen}(2y - 2x)$
  $\Rightarrow x + y = 2y - 2x \Rightarrow 3x = y$ ...(1)
- $\tan 3x\tan y = 1$
  $\tan 3x = \dfrac{1}{\tan y} \Rightarrow \tan 3x = \cot y$
  $\Rightarrow 3x + y = 90°$ ...(2)

Reemplazamos (1) en (2):

$3x + 3x = 90° \Rightarrow x = 15° \wedge y = 45°$

Luego:

$S = \cot 3x + \cot y + \tan y$

$S = \cot 45° + \cot 45° + \tan 45°$ $\therefore S = 3$

16. Si: $\text{sen}(2\alpha)\csc(\theta + 30°) = 1 \wedge \text{sen}(\theta - \phi)\sec(\phi + \alpha) = 1$; calcular: $T = 8\sqrt{2}\,\text{sen}(\alpha + 5°)\cos(\theta + 10°)$

Resolución:

- $\text{sen}2\alpha\csc(\theta + 30°) = 1$
  $2\alpha = \theta + 30°$ ...(1)
- $\text{sen}(\theta - \phi)\sec(\phi + \alpha) = 1$
  $\text{sen}(\theta - \phi) = \dfrac{1}{\sec(\phi + \alpha)}$
  $\text{sen}(\theta - \phi) = \cos(\phi + \alpha)$
  $(\theta - \phi) + (\phi + \alpha) = 90°$
  $\theta + \alpha = 90°$ ...(2)

Resolviendo las ecuaciones (1) $\wedge$ (2):

$\alpha = 40° \wedge \theta = 50°$

Luego:

$T = 8\sqrt{2}\,\text{sen}(\alpha + 5°)\cos(\theta + 10°)$

$T = 8\sqrt{2}\,\text{sen}45°\cos 60°$

$T = 8\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\therefore T = 4$

17. En un trapecio isósceles ABCD, la base mayor AD mide b, la base menor BC mide a y $m\angle BAD = m\angle CDA = \theta$
Hallar el área de la región trapezoidal en función de a, b y θ.

Resolución:

Note que: $2h\cot\theta = b - a$

$\Rightarrow 2h = \dfrac{b-a}{\cot\theta}$

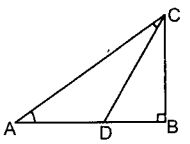
$\Rightarrow h = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)\tan\theta$

Luego: $S_{\triangle} = \left(\dfrac{b+a}{2}\right)h$

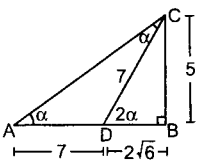
Reemplazamos h:

$\therefore S_{\triangle} = \left(\dfrac{b^2-a^2}{4}\right)\tan\theta$

18. En la figura mostrada, $m\angle ACD = m\angle CAD = \alpha$; AD = 7; BC = 5; hallar el valor de:
$T = (7 + 2\sqrt{6})\tan\alpha + 10\csc(2\alpha)$



Resolución:



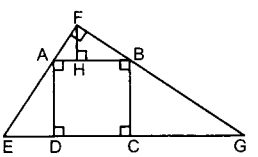
Luego: $T = (7 + 2\sqrt{6})\tan\alpha + 10\csc 2\alpha$

Reemplazamos:

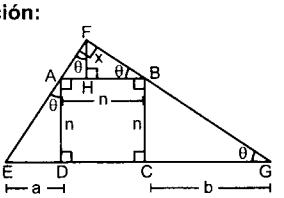
$T = (7 + 2\sqrt{6})\left(\dfrac{5}{7+2\sqrt{6}}\right) + 10\left(\dfrac{7}{5}\right)$

$\therefore T = 19$

19. Si ABCD es un cuadrado inscrito en el triángulo rectángulo EFG, $m\angle EFG = 90°$, tal que ED = a y CG = b. Calcular: FH



Resolución:



$\triangle AFH$: $AH = x\tan\theta$ $\wedge$ $\triangle FHB$: $HB = x\cot\theta$

$AH + HB = x(\tan\theta + \cot\theta)$; sea $n = AH + HB$

$\Rightarrow n = x(\tan\theta + \cot\theta)$ ...(1)

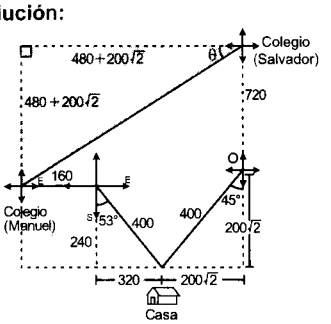
Pero: $\triangle EAD$: $\cot\theta = n/a$

$\Rightarrow \triangle BCG$: $\tan\theta = n/b$

En (1): $n = x\left(\dfrac{n}{b} + \dfrac{n}{a}\right)$ $\therefore x = \dfrac{ab}{a+b}$

20. Manuel y Salvador son hermanos y salen de sus respectivos colegios. Manuel recorre 160 m en dirección este y luego 400 m en dirección S53°E, llegando así a su casa. Salvador para llegar al mismo lugar recorre 720 m en dirección sur y luego 400 m en dirección SO. ¿En qué dirección está el colegio de Manuel tomando como referencia el colegio de Salvador?

Resolución:

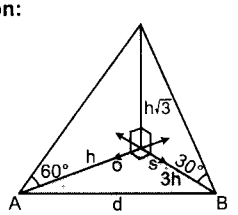


$\triangle$ Sombreado: $\theta = 45°$

Por lo tanto, el colegio de Manuel se encuentra al SO del colegio de Salvador.

21. La elevación de una torre desde un punto A al oeste de ella es 60° y desde el punto B al sur de la torre la elevación es de 30°. Si la torre tiene 75 m de altura, calcular (en m) la distancia comprendida entre A y B.

Resolución:



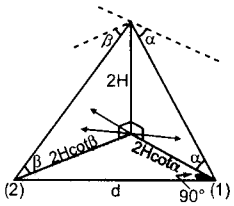
$h\sqrt{3} = 75 \Rightarrow h = 25\sqrt{3}$ m

En el $\triangle$ horizontal: $d = h\sqrt{10}$

$\Rightarrow d = (25\sqrt{3})(\sqrt{10})$ $\therefore d = 25\sqrt{30}$

22. Desde lo alto de un faro, a 2H metros sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco situado directamente al sur, es a: dos minutos más tarde el ángulo de depresión es β, calcular la velocidad del barco, en m/min, si se observa que navega directamente hacia el oeste.

Resolución:



Del gráfico: triángulo sombreado

$$d = 2H\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}$$

Tiempo de (1) a (2): 2 min

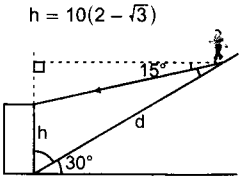
$$\Rightarrow V_{barco} = \frac{d}{t} = \frac{2H\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}{2}$$

$$\therefore V_{barco} = \left(H\sqrt{\cot^2\beta + \cot^2\alpha}\right)\frac{m}{min}$$

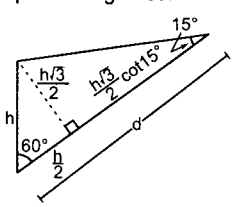
23. Timoteo desciende por una colina que tiene un ángulo de inclinación de 30° en la parte baja de la colina se encuentra un edificio de $10(2 - \sqrt{3})$ m de altura. Timoteo sobre la colina observa la parte más alta del edificio con ángulo de depresión de 15°. Hallar la distancia desde el observador al pie del edificio, en m.

Resolución:

$h = 10(2 - \sqrt{3})$



Separamos parte del gráfico:



$$d = \frac{h}{2}[1 + \sqrt{3}\cot 15°];\ d = \frac{h}{2}[1 + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})]$$

$$d = \frac{h}{2}(2\sqrt{3} + 4)$$

$$d = h(\sqrt{3} + 2)$$

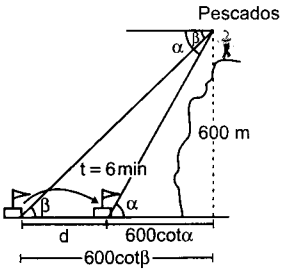
Reemplazamos h: $d = 10(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$

$\therefore d = 10$

24. Un pescador situado a 600 m sobre el nivel del mar observa una lancha con ángulo de depresión α. Seis minutos después observa en la misma dirección a la lancha pero ahora con un ángulo de depresión β. Calcular la rapidez de la lancha en km/h.

$\tan\alpha = \sqrt{3} + 1$, $\tan\beta = \sqrt{3} - 1$

Resolución:



$\tan\alpha = \sqrt{3} + 1 \ \wedge\ \tan\beta = \sqrt{3} - 1$

Del gráfico:

$d = 600(\cot\beta - \cot\alpha)$

$$d = 600\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right)$$

$d = 600$ m

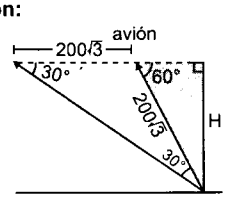
Luego:

$$V = \frac{d}{t} \Rightarrow V = \frac{600}{6} \Rightarrow V = 100 \text{ m/min}$$

$$\Rightarrow V = 100\left(\frac{60}{1}\right)\left(\frac{1}{1000}\right) \quad \therefore V = 6 \text{ km/h}$$

25. En un instante dado, desde un avión que se desplaza a cierta altura se observa un punto en tierra con un ángulo de depresión cuya medida es 30°. Después de haber volado aproximadamente $200\sqrt{3}$ m, el nuevo ángulo de depresión mide 60°. ¿Cuál es la longitud de la altura a la que vuela el avión?

Resolución:



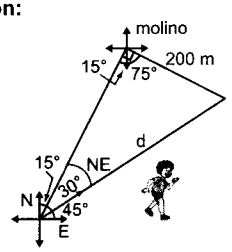
En el triángulo sombreado:

$$\text{sen}60° = \frac{H}{200\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{200\sqrt{3}} \quad \therefore H = 300 \text{ m}$$

26. Salvador caminando hacia el NE observa un molino en la dirección N15°E. Cuando han transcurrido 15 minutos Salvador es observado desde el molino en la dirección S75°E y a 200 m de distancia del molino. Calcular la velocidad de la persona en m/h.

Resolución:



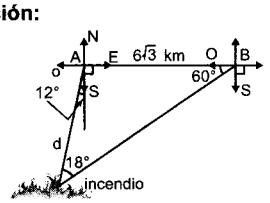
Del gráfico: d = 400 m

tiempo: 15 min = $\frac{1}{4}$ h

$\Rightarrow V = \frac{d}{t} = \frac{400}{\frac{1}{4}}$ $\therefore V = 1600$ m/h

27. La estación B se encuentra $6\sqrt{3}$ km al este de la estación A. La dirección de un incendio es S12°O desde A. La dirección del incendio desde B es S30°O. ¿A qué distancia, en km, de A se encuentra el incendio?

Resolución:



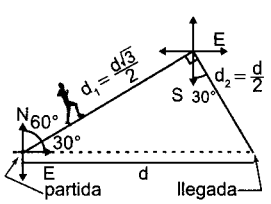
Por ley de senos: $\frac{d}{\text{sen}60°} = \frac{6\sqrt{3}}{\text{sen}18°}$

$\Rightarrow d = 6\sqrt{3}\frac{\text{sen}60°}{\text{sen}18°}$

$d = \frac{6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)}$ $\therefore d = 9(\sqrt{5}+1)$ km

28. Edyson se dirige en la dirección N60°E y luego de caminar cierta distancia toma la dirección S30°E llegando justo al este del punto de partida. Si en total recorre $200(\sqrt{3}+1)$ m. Hallar la distancia entre el punto inicial y el punto final.

Resolución:



Del gráfico:

$d_1 + d_2 = \frac{d}{2}(\sqrt{3}+1)$

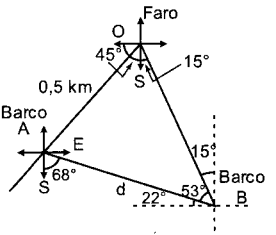
Pero por condición:

$d_1 + d_2 = 200(\sqrt{3}+1)$

$\Rightarrow \frac{d}{2}(\sqrt{3}+1) = 200(\sqrt{3}+1)$ $\therefore d = 400$ m

29. Desde un faro se observan dos barcos A y B en las direcciones SO y S15°E respectivamente, al mismo tiempo B se observa desde A en la dirección S68°E. Si la distancia del barco A al faro es de 0,5 km. Calcular la distancia entre los barcos.

Resolución:



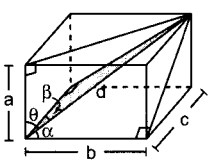
Ley de senos:

$\frac{0,5}{\text{sen}53°} = \frac{d}{\text{sen}60°}$ $\Rightarrow d = \frac{1\,\text{sen}60°}{2\,\text{sen}53°}$

$d = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{4}{5}}$ $\therefore d = \frac{5\sqrt{3}}{16}$ km

30. Una diagonal de un paralelepípedo rectángulo forma con las tres aristas concurrentes a un mismo vértice, los ángulos α, β y θ.
Hallar el valor de: $\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\theta$

Resolución:



Del gráfico:

$\cos\alpha = \frac{b}{d}$; $\cos\beta = \frac{c}{d}$; $\cos\theta = \frac{a}{d}$

Ademas se conoce que: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = \frac{a^2+b^2+c^2}{d^2} = 1$

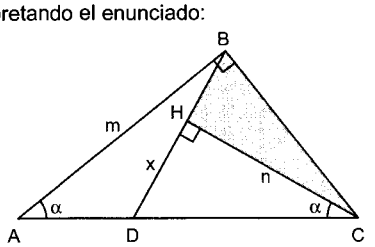
Luego: $1 - \text{sen}^2\alpha + 1 - \text{sen}^2\beta + 1 - \text{sen}^2\theta = 1$

$\therefore \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\theta = 2$

31. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) desde B se traza una ceviana $\overline{BD}$ (D en $\overline{AC}$) y desde C se levanta una perpendicular $\overline{CH}$ a dicha ceviana.
Calcular: $\overline{HD}$ si AB = m, CH = n
Además: $m\angle BAC = m\angle DCH$

Resolución:

Interpretando el enunciado:



De la figura: sea: $m\angle BAD = m\angle HCD = \alpha$

En $\triangle HDC$: $x = n\tan\alpha$ ...(1)

En $\triangle ABC$: $BC = m\tan\alpha$

Observar: $m\angle BDC = m\angle BCD = 90° - \alpha$

Luego: $\triangle BDC$ isósceles

$\Rightarrow BD = BC = m\tan\alpha$

Entonces: $BH = BD - HD$

$\Rightarrow BH = m\tan\alpha - n\tan\alpha \Rightarrow BH = (m - n)\tan\alpha$

En $\triangle BHC$: por Pitágoras $(BC)^2 = (BH)^2 + (HC)^2$

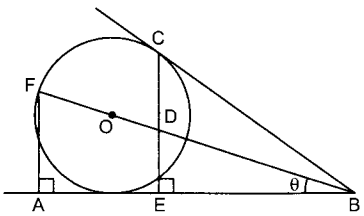
$m^2\tan^2\alpha = (m - n)^2\tan^2\alpha + n^2$

De donde: $\tan^2\alpha\,[m^2 - (m - n)^2] = n^2$

$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{n}{2m - n}}$ ...(2)

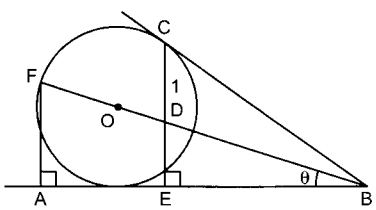
(2) en (1): $x = n\sqrt{\dfrac{n}{2m - n}}$

32. Hallar AB en términos de θ si CD = 1 y O es centro.

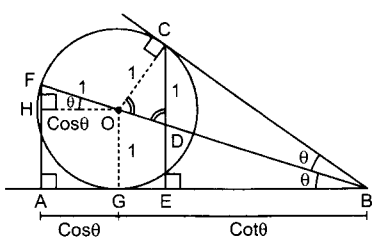


Resolución:

Nos piden AB en términos de θ



Haciendo los trazos adecuados obtenemos:



Por lo tanto del gráfico: $AB = \cos\theta + \cot\theta$

33. En un triángulo isósceles, el ángulo diferente mide θ. Hallar la relación entre el inradio y el circunradio.

Resolución:

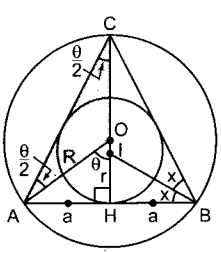
$\triangle BHI$: $\dfrac{r}{a} = \tan x$; $\triangle OHA$

$\dfrac{a}{R} = \operatorname{sen}\theta$

Multiplicando:

$\dfrac{r}{a}\left(\dfrac{a}{R}\right) = \operatorname{sen}\theta\tan x$

$\dfrac{r}{R} = \operatorname{sen}\theta\tan x$

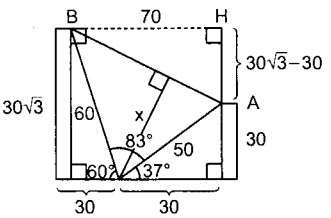


Pero: $2x + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi - \theta}{4}$ $\quad\therefore \dfrac{r}{R} = \operatorname{sen}\theta\tan\left(\dfrac{\pi - \theta}{4}\right)$

34. Lolo observa dos postes de $30\sqrt{3}$ y 30 m de altura, con ángulos de elevación de 60° y 37° respectivamente, los postes están unidos por su parte superior, mediante un cable totalmente tenso. ¿Qué distancia separa a Lolo del cable?

Resolución:



$\triangle AHB$: $(AB)^2 = 70^2 + (30\sqrt{3} - 30)^2$

$(AB)^2 = 8500 - 1800\sqrt{3}$

$(AB)^2 = 100(85 - 18\sqrt{3})$

$AB = 10\sqrt{85 - 18\sqrt{3}}$

Además: $\alpha = 83°$, luego:

$\dfrac{AB(x)}{2} = \text{Área sombreada} = \dfrac{50(60)}{2}\operatorname{sen}83°$

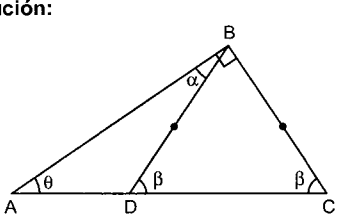
$x = \dfrac{3000}{AB}(\operatorname{sen}83°) = \dfrac{3000\cos 7}{10\sqrt{85 - 18\sqrt{3}}}$

$\therefore x = \dfrac{300\cos}{\sqrt{85 - 18\sqrt{3}}}$ m

35. En un triángulo rectángulo: ABC (B = 90°) se traza una ceviana $\overline{BD}$ si: $m\angle BAD = \theta$, $m\angle BDC = \beta$, $m\angle ABD = \alpha \wedge BD = BC$

Calcular: $T = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta + \alpha}{2}\right)\csc\left(45° - \dfrac{\theta}{2}\right)\tan\left(\dfrac{2\theta + \alpha}{2}\right)$

Resolución:



De la figura:

$\left.\begin{array}{l}\theta + \alpha = b \\ \theta + \beta = 90°\end{array}\right\}$ sumando: $\Rightarrow 2\theta + \alpha = 90°$

$\Rightarrow \dfrac{(2\theta + \alpha)}{2} = 45°$ ... (1)

$\Rightarrow \dfrac{\theta + \alpha}{2} + \dfrac{\theta}{2} = 45°$

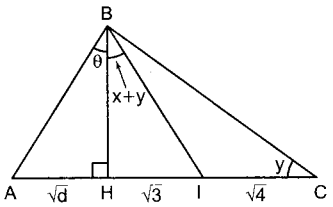
$\dfrac{\theta + \alpha}{2} = 45° - \dfrac{\theta}{2} = x$ ... (2)

En (T): (1) y (2)

$T = \underbrace{\text{senx(cscx)}}_{(1)}\underbrace{\text{(tan45°)}}_{(1)}$

$\therefore\ T = 1$

36. De la figura, hallar d, si la altura mide 1 m.



Además: $\cot^4\theta = \dfrac{\sec(x+y)\tan(2x-3y)\tan(x+y)}{\sec(x-y)\tan^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}$

Resolución:

Dado que la altura BH es 1 m

$\triangle$BHI: (30° y 60°)

$\Rightarrow x + y = 60°$ ... (1)

BI = 2

$\triangle$BIC: isósceles $\Rightarrow m\angle CBI = y$

Luego: $m\angle BIH = 2y = 30° \Rightarrow y = 15°$

en (1): $x = 45°$

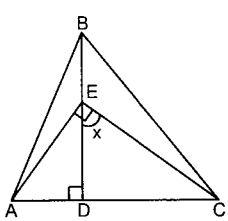
Reemplazando en el dato:

$$\cot^4\theta = \frac{\sec(60°)\tan(45°)\tan(60°)}{\sec(30°)\tan^2(30°)}$$

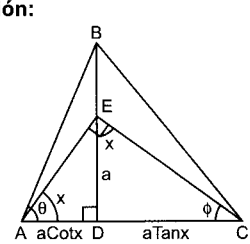
$$\cot^4\theta = \frac{2(1)(\sqrt{3})}{2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 9 \Rightarrow \cot\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30°$$

$\triangle$BHA: $\dfrac{\sqrt{d}}{1} = \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore\ d = \dfrac{1}{3}$ m

37. Hallar tanx en función de θ y ϕ.
Si $m\angle BAC = \theta \wedge m\angle ACB = \phi$



Resolución:



$\triangle$BDC: BD = atanxtanϕ ...(I)

$\triangle$BDA: BD = acotxtanθ ...(II)

Igualamos (I) y (II)

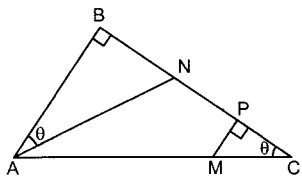
atanxtanϕ = acotxtanθ

Simplificamos y despejamos tanx

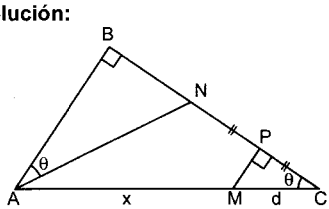
$\tan x\tan\phi = \dfrac{1}{\tan x}(\tan\theta)$

$\tan^2 x = \dfrac{\tan\theta}{\tan\phi} \quad \therefore\ \tan x = \sqrt{\dfrac{\tan\theta}{\tan\phi}}$

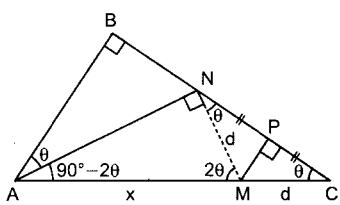
38. Hallar AM si PN = PC y MC = d



Resolución:

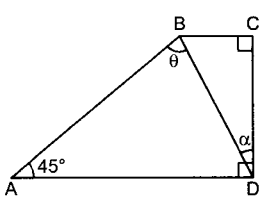


Trazamos $\overline{MN}$ y calculamos x

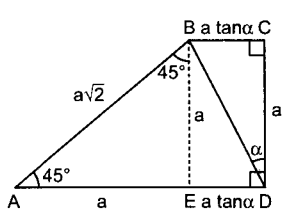


$\triangle$ANM: $\sec 2\theta = \dfrac{x}{d} \quad \therefore\ x = d\sec 2\theta$

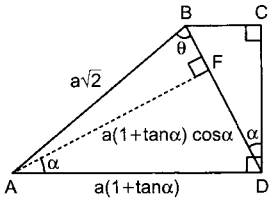
39. Del gráfico mostrado obtener: senθ en términos de α.



Resolución:



Luego trazamos AF y se determina el $\triangle$AFB, para finalmente calcular senθ.

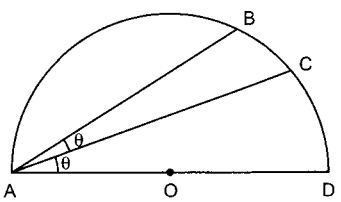


$\triangle$AFB: $\text{sen}\theta = \dfrac{a(1+\tan\alpha)\cos\alpha}{a\sqrt{2}}$

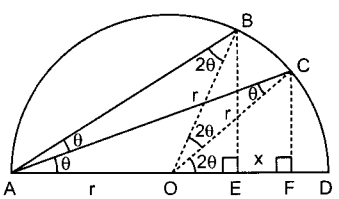
Simplificando y racionalizando obtenemos:

$\therefore\ \text{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$

40. Si la proyección del arco $\overset{\frown}{BC}$ sobre el diámetro $\overline{AD}$ es x. ¿A qué es igual AD?



Resolución:



$\triangle$OEB: OE = rcos4θ

$\triangle$OFC: OF = rcos2θ

En el gráfico se observa que:

$$OF = OE + EF$$

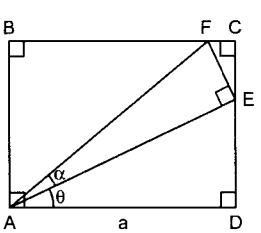
$$r\cos2\theta = r\cos4\theta + x$$

$$r\cos2\theta - r\cos4\theta = x$$

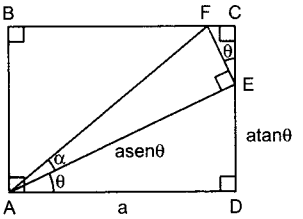
$$r = \frac{x}{\cos2\theta - \cos4\theta}$$

$\Rightarrow AD = 2r \quad \therefore AD = \dfrac{2x}{\cos2\theta - \cos4\theta}$

41. Hallar AB en términos de a; α y θ.



Resolución:



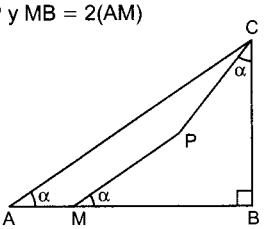
- $\triangle$AEF: EF = (AE) tanα
  EF = asecθtanα
- $\triangle$ECF: CE = (FE)cosθ
  $CE = a\underbrace{\sec\theta\ \tan\alpha\cos\theta}_{1}$
  CE = atanα

Calculamos AB:

AB = CD = CE + DE ⇒ AB = atanα + atanθ

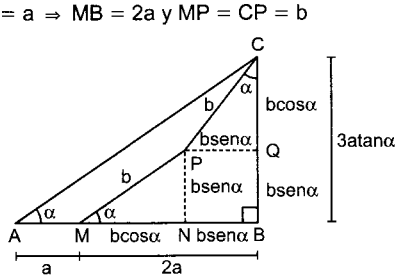
∴ AB = a(tanα + tanθ)

42. Del gráfico mostrado obtener el valor de tanα si: MP = CP y MB = 2(AM)



Resolución:

Del gráfico nos pide tanα; trazamos $\overline{PN}$ y $\overline{PQ}$. Sea AM = a ⇒ MB = 2a y MP = CP = b



En el gráfico observamos que:

BC = 3atanα

BC = bsenα + bcosα

Igualamos: 3atanα = b(senα + cosα) ...(I)

MB = bsenα + bcosα

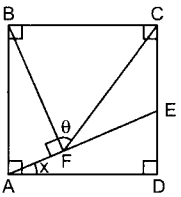
2a = b(senα + cosα) ...(II)

Dividimos (I) ÷ (II)

$$\frac{3a\tan\alpha}{2a} = \frac{b(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)}{b(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)}$$

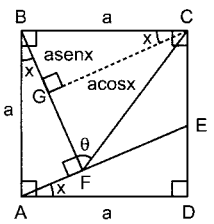
$\dfrac{3\tan\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \tan\alpha = 2/3$

43. Siendo ABCD un cuadrado y $\overline{BF} \perp \overline{AE}$. Hallar $\cot\theta$ en términos de x.



Resolución:

$AB = BC = CD = AD = a$



- $\triangle AFB$: $FB = a\cos x$
- $\triangle FGC$: $\cot\theta = \dfrac{FG}{GC}$

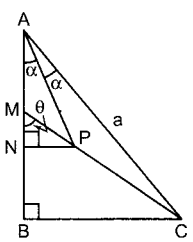
$$\cot\theta = \frac{FB - GB}{GC}$$

$$\cot\theta = \frac{a\cos x - a\operatorname{sen}x}{a\cos x}$$

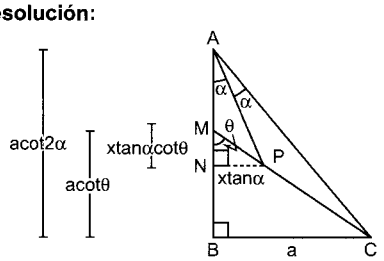
Simplificamos:

$$\cot\theta = \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \qquad \therefore\ \cot\theta = 1 - \tan x$$

44. Hallar AN en términos de α; θ; a:



Resolución:



En el gráfico se observa que: $AM + MB = AN$

Pero: $AM = AN - MN$

Reemplazamos: $AN - MN + MB = AB$

Reemplazamos sus valores:

$x - x\tan\alpha\cot\theta + a\cot\theta = a\cot 2\alpha$

Despejamos x

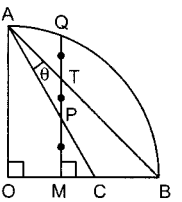
$x - x\tan\alpha\cot\theta = a\cot 2\alpha - a\cot\theta$

$x(1 - \tan\alpha\cot\theta) = a(\cot 2\alpha - \cot\theta)$

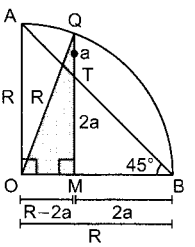
$$\therefore\ x = a\left[\frac{\cot 2\alpha - \cot\theta}{1 - \tan\alpha\cot\theta}\right]$$

45. En la figura mostrada, O es el centro del cuadrante AOB. Si QT = TP = PM

Calcular $\cot\theta$:



Resolución:



El triángulo rectángulo sombreado OMQ

$R^2 = (R - 2a)^2 + (3a)^2$

$R^2 = R^2 - 4aR + 4a^2 + 9a^2$

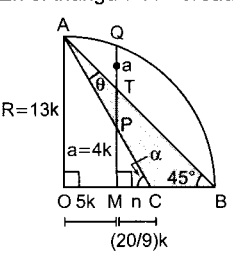
$\Rightarrow \dfrac{R}{a} = \dfrac{13}{4} \Rightarrow R = \dfrac{13a}{4}$

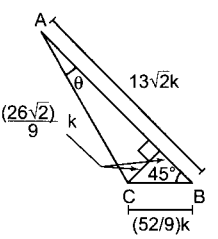
sea $\dfrac{a}{4} = k \Rightarrow R = 13\,k \Rightarrow a = 4k$

Luego: $\triangle AOC \sim \triangle PMC$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{13k}{5k + n} = \dfrac{4k}{n} \Rightarrow n = \dfrac{20}{9}k$

En el triángulo sombreado ABC



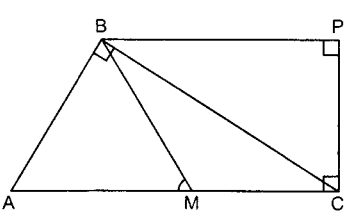


Luego en el $\triangle ADC$:

$$\cot\theta = \frac{AD}{CD} = \frac{13\sqrt{2} - 26\sqrt{2}/9}{26\sqrt{2}/9} = \frac{7}{2}$$

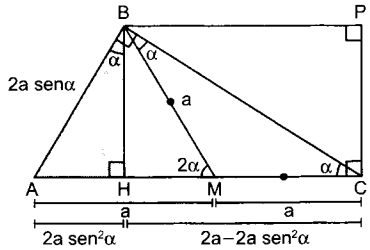
$$\therefore\ \cot\theta = \frac{7}{2}$$

46. Si $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC y se cumple que: $AB + BP = \dfrac{5}{2}AM$, calcular el área de la región triangular ABM, sabiendo además que la longitud de BM es a.



Resolución:

Dato: $AB + BP = \frac{5}{2}AM$



En el dato: $2a\text{sen}\alpha + 2a - 2a\text{sen}^2\alpha = \frac{5}{2}a$

$\Rightarrow 4\text{sen}\alpha + 4 - 4\text{sen}^2\alpha = 5$

$\Rightarrow 4\text{sen}^2\alpha - 4\text{sen} + 1 = 0$

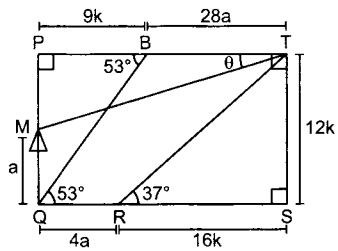
$(2\text{sen}\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 30°$

Hallando el área $\triangle ABM$: $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}a(a)\text{sen}2\alpha$

$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}a^2\text{sen}60° \quad \therefore S_{\triangle ABM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

47. Salvador corre tras el avión que vuela paralelo al suelo, cuando el muchacho, pasa junto a un árbol observa al avión adelante con un ángulo de elevación de 53° y al cabo de un cierto tiempo en movimiento el muchacho observa nuevamente el avión con un ángulo de elevación de 37°, pero en este mismo instante desde el avión se observa al árbol su parte más alta con un ángulo de depresión θ. Hallar 412tanθ, si la velocidad del avión es 7 veces la del muchacho, además la altura del árbol es la cuarta parte de lo que recorrió de la primera observación a la segunda observación.

Resolución:



$\triangle MPT$: $\tan\theta = \frac{PM}{PT}$ ...(1)

- $\triangle RST$: de 37° y 53° $\Rightarrow$ si: TS = 12k $\Rightarrow$ RS = 16k
- $\triangle QPB$: 37° y 53°, si: PQ = 12k $\Rightarrow$ PB = 9k

Se observa en el rectángulo PTSQ

$PT = QS \Rightarrow 9k + 28a = 4a + 16k$

$\Rightarrow k = \frac{24}{7}a$ ...(2)

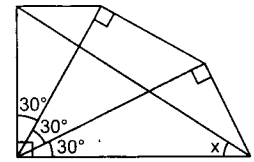
$\left.\begin{array}{l} PM = PQ - MQ = 12k - a \\ PT = PB + BT = 9k + 28a \end{array}\right\}$ ...(3)

(3) en (1): $\tan\theta = \frac{12k - a}{9k + 28a}$ ...(4)

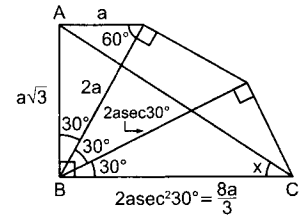
(2) en (4): $\tan\theta = \frac{281}{412}$

$\therefore 412\tan\theta = 281$

48. Calcule tanx según la figura mostrada



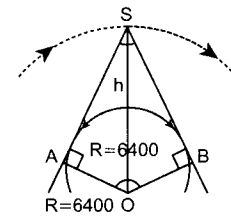
Resolución:



$\triangle ABC$: $\tan x = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{8a}{3}} \quad \therefore \tan x = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

49. Determine la altura en km de la superficie terrestre a la que gira un satélite, cuya visión cubre un arco de 120° en la superficie de la tierra.
Tomar: R = 6400 km como radio de la tierra.

Resolución:



Del gráfico: L_{AB} $L_{\widehat{AB}} = 120° \Rightarrow M\angle SOB = 60°$

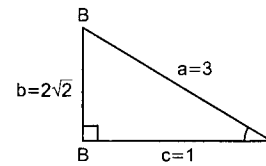
$\Rightarrow$ en el $\triangle SBO$

$h + R = R\sec 60° \Rightarrow h + R = 2(R)$

$\Rightarrow h + 6400 = 2(6400) \quad \therefore h = 6400$ km

50. Se tiene un triángulo BAC ($m\angle A = 90°$) donde B > C si la relación de los catetos es $2\sqrt{2}$. Hallar $R = \cot B + \sec B - 1$.

Resolución:



Por tanto: $B > C \Rightarrow b > c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{1}$

$b = 2\sqrt{2} \wedge c = 1$

Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (2\sqrt{2})^2 + (1)^2 \Rightarrow a = 3$

$\cot B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sec B = 3$

Nos piden calcular:

$R = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + 3 - 1 \quad \therefore R = \frac{\sqrt{2}+8}{4}$

51. Hallar α si: $\tan\left(\frac{4\pi}{7} - 3\alpha\right)\tan\left(\frac{3\pi}{14} - 2\alpha\right) = 1$

Resolución:

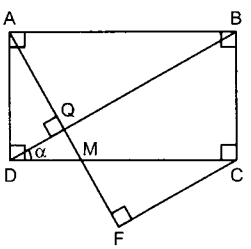
En (1): $\tan\left(\frac{4\pi}{7} - 3\alpha\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{14} - 2\alpha\right)}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{4\pi}{7} - 3\alpha\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{14} - 2\alpha\right)$

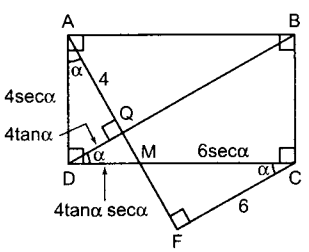
Por ángulos complementarios tenemos:

$\frac{4\pi}{7} - 3\alpha + \frac{3\pi}{14} - 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{2\pi}{35}$

52. En la figura mostrada, AQ = 4, FC = 6 calcular: $\tan\alpha$



Resolución:



Por ángulos complementarios:

$m\angle BDC = m\angle DAQ = m\angle DCF = \alpha$

$\triangle AQD$: $DQ = 4\tan\alpha$; $AD = 4\sec\alpha$

$\triangle DQM$: $DM = 4\tan\alpha\sec\alpha$ ...(1)

$\triangle MFC$: $MC = 6\sec\alpha$ ...(2)

En el rectángulo ABCD

$AD = BC = 4\sec\alpha$ ...(3)

$\triangle DCB$: $\tan\alpha = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{DM + MC}$ ...(4)

Reemplazando las expresiones (1), (2) y (3) en (4) tenemos:

$\tan\alpha = \frac{4\sec\alpha}{4\tan\alpha\sec\alpha + 6\sec\alpha} = \frac{4\sec\alpha}{\sec\alpha(4\tan\alpha + 6)}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{4\tan\alpha + 6}$

Formando la ecuación cuadrática y factorizando:

$2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0 \Rightarrow (2\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 2) = 0$

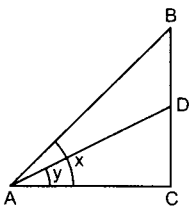
$2\tan\alpha$ -1 i) $2\tan\alpha - 1 = 0$

$\tan\alpha$ 2 ii) $\tan\alpha + 2 = 0$

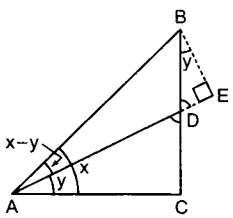
$\Rightarrow \tan\alpha = -2 \quad \therefore \tan\alpha = 1/2$

53. En la figura mostrada hallar el valor de:

$E = \frac{AB\operatorname{sen}(x-y)}{\cos y}$



Resolución:



Prolongamos AD hasta E, luego se construye el triángulo rectángulo AEB.

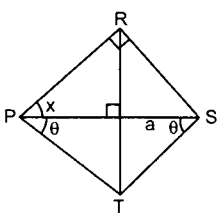
$\triangle AEB$: $BE = AB\operatorname{sen}(x-y)$ ...(1)

$\triangle BED$: $BE = BD\cos y$ ...(2)

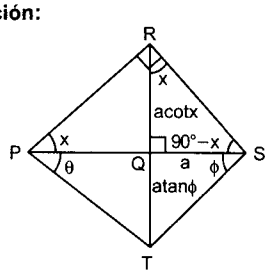
Igualando (1) y (2): $AB\operatorname{sen}(x - y) = BD\cos y$

$\therefore \frac{AB\operatorname{sen}(x-y)}{\cos y} = BD$

54. En la figura mostrada, calcular: $\tan x$



Resolución:



Asumimos: QS = a

⊿PRS: m∠PSR = 90° − x

Luego: en el ⊿RQS: m∠QRS = x

QR = acotx ...(1)

⊿SQT: QT = atanϕ

⊿PQT: PQ = atanϕcotθ ...(2)

⊿PQR: $\tan x = \dfrac{QR}{PQ}$ ...(3)

(1) y (2) en (3): $\tan x = \dfrac{a\cot x}{a\tan\phi\cot\theta}$

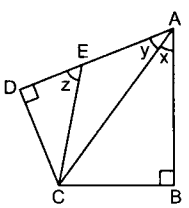
$\Rightarrow \tan x = \dfrac{1}{\tan x}\left(\dfrac{1}{\tan\phi}\right)\left(\dfrac{1}{\cot\theta}\right)$

Observar: $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$; $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

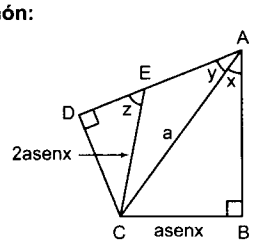
De la ecuación: $\tan^2 x = \dfrac{\tan\theta}{\tan\phi}$ $\therefore \tan x = \sqrt{\dfrac{\tan\theta}{\tan\phi}}$

55. De la figura mostrada, EC = 2BC

Calcular: $P = \dfrac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} z)}$



Resolución:



(1) = (2)

Del gráfico asumimos: AC = a

⊿ABC: BC = asenx

Por dato: EC = 2BC ⇒ EC = 2asenx

⊿EDC: DC = 2asenxsenz ...(1)

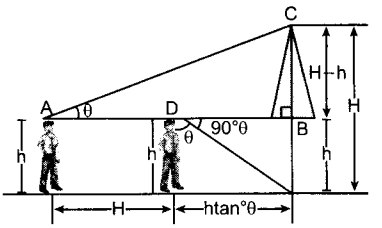
⊿ADC: DC = aseny ...(2)

⇒ aseny = 2asenx senz

$\dfrac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} z} = 2 \quad \therefore P = 2$

56. Un individuo de altura h, observa la parte más alta de un árbol de altura H con un ángulo de elevación θ, luego se acerca en línea recta hacia el árbol una distancia igual a la altura del árbol y observa su parte más baja con un ángulo de depresión que es el complemento de θ y además 3H = 13h.
Calcule: tanθ

Resolución:



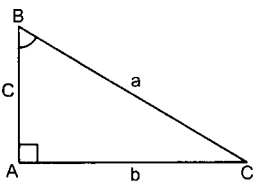
Del gráfico en ⊿ABC: $\tan\theta = \dfrac{H-h}{h+h\tan\theta}$

$\Rightarrow h(1+\tan^2\theta) = H(1-\tan\theta)$

$\dfrac{1+\tan^2\theta}{1-\tan\theta} = \dfrac{H}{h} \Rightarrow \dfrac{1+\tan^2\theta}{1-\tan\theta} = \dfrac{13}{3} \quad \therefore \tan\theta = \dfrac{2}{3}$

57. En un triángulo ABC (m∠A = 90°), el cuadrado del cateto c es igual al producto de la hipotenusa a por el cateto b y por la expresión:

Resolución:



Dato: $c^2 = a(b)(x)$

Incógnita: x

Del ⊿BAC: c = acosB ...(1)

b = asenB ...(2)

(1) al cuadrado: $c^2 = a^2\cos^2 B$

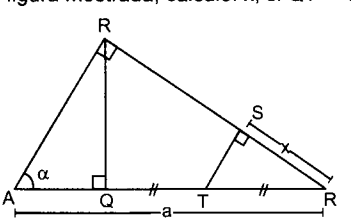
$c^2 = a a\cos^2 B$ ...(3)

De (2): $a = b\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} B}\right)$

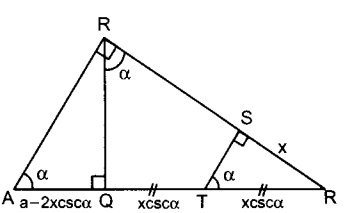
⇒ a = bcscB reemplazando en (3) tenemos:

$c^2 = b\csc B a\cos^2 B \quad \therefore c^2 = ab\cos^2 B\csc B$

58. En la figura mostrada, calcule: x, si QT = TR



Resolución:



$m\angle PAQ = \alpha$; $m\angle APQ = 90° - \alpha$

$\triangle PQR \Rightarrow m\angle QPR = \alpha$

$\triangle RST \Rightarrow m\angle STR = \alpha$

$\triangle TSR$: $TR = x\csc\alpha$

También: $QT = TR = x\csc\alpha$

$AR = AQ + QR$ ...(1)

$QR = QT + TR = 2x\csc\alpha$ ...(2)

(2) en (1): $AQ = AR - QR$

$AQ = a - 2x\csc\alpha$

$\triangle AQP$: $PQ = (a - 2x\csc\alpha)\tan\alpha$

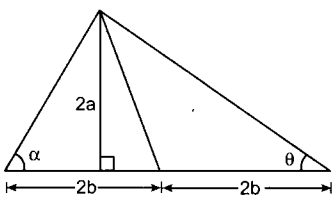
$\triangle PQR$: $\tan\alpha = \dfrac{QR}{PQ} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2x\csc\alpha}{(a - 2x\csc\alpha)\tan\alpha}$

$\tan^2\alpha = \dfrac{2x\csc\alpha}{a - 2x\csc\alpha}$ por proporciones:

$\dfrac{1 + \tan^2\alpha}{\tan^2\alpha} = \dfrac{a}{2x\csc\alpha}$

Llevando a senos y cosenos: $\therefore\ x = \dfrac{a}{2}\operatorname{sen}^3\alpha$

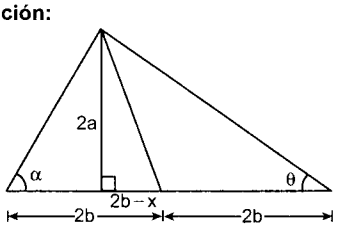
59. En la figura mostrada



$\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ y $\tan\theta = \dfrac{3a}{3b + 2a}$

Calcular $\tan\alpha$

Resolución:



$\tan\alpha = \dfrac{2a}{x}$ ...(1)

$\tan\theta = \dfrac{2a}{4b - x}$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{2a}{4b - x}$ ...(2)

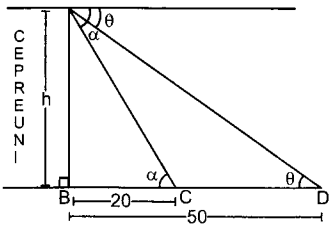
Dato: $\tan\theta = \dfrac{3a}{3b + 2a}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{3a}{3b + 2a} \Rightarrow b = \dfrac{5}{6}a$

En (2): $x = \dfrac{a}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2a}{\frac{a}{3}}$ $\therefore\ \tan\alpha = 6$

60. Desde lo alto de un pabellón del CEPRE-UNI se observa dos autos en la línea recta distantes 20 m y 50 m del pie del edificio con ángulos de depresión α y θ respectivamente. Determinar la altura del edificio sabiendo que se cumple: $\dfrac{\cot\theta - \cot\alpha}{\cot\theta\cot\alpha} = 0{,}6$

Resolución:



$\triangle ABC$: $\tan\alpha = \dfrac{h}{20}$; $\triangle ABD$: $\tan\theta = \dfrac{h}{50}$

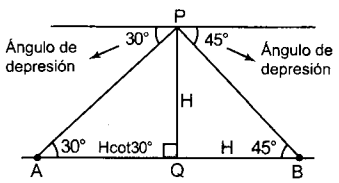
Del dato: $\tan\alpha - \tan\theta = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{h}{20} - \dfrac{h}{50} = \dfrac{3}{5}$ $\therefore\ h = 20$ m

61. Desde un avión que vuela sobre la línea que separa a dos ciudades A y B, se las observa con ángulos de depresión de 30° y 45°. Hallar la altura al cual se encuentra el avión, sabiendo que la distancia que separa a las dos ciudades es $125\,(1 + \sqrt{3})$ km.

Resolución:

Sea: H = Altura a la que vuela el avión.



Dato: $AB = 125(1 + \sqrt{3})$ km ...(α)

Asumimos: $PQ = H$ ...(1)

Del gráfico: $AQ + QB = AB$ ...(2)

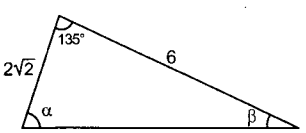
(1) y (2) en (α):

$H\cot 30° + H = 125(1 + \sqrt{3})$

$H\sqrt{3} + H = 125(1 + \sqrt{3})$

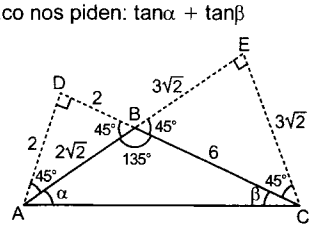
$H(1 + \sqrt{3}) = 125(1 + \sqrt{3})$ $\therefore\ H = 125$ km

62. Del gráfico mostrado calcular el valor de: $\tan\alpha + \tan\beta$



Resolución:

Del gráfico nos piden: $\tan\alpha + \tan\beta$

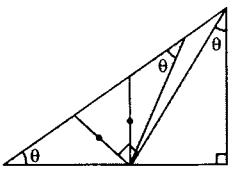


En el $\triangle AEC$: $\tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5}$

En el ⊿ADC: $\tan\beta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ Nos piden: $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$

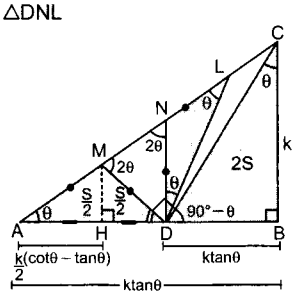
63. Del gráfico calcular: $\tan\theta + \cot\theta$, si las áreas de las regiones sombreadas están en la relación de 1 a 2.



Resolución:

Del gráfico: $\frac{S_{\triangle NLD}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{1}{2}$

$\triangle AMD = \triangle DNL$



De la figura sea: BC = k

En el $\triangle_{CBD}$: DB = ktanθ

En el $\triangle_{ABC}$: AB = kcotθ

Luego: $\triangle_{AHM} \sim \triangle_{CBD} \Rightarrow \dfrac{\frac{S}{2}}{\left[\frac{k}{2}(\cot\theta - \tan\theta)\right]^2} = \dfrac{2S}{k^2}$

$\Rightarrow 1 = 4\left(\frac{1}{4}\right)(\cot\theta - \tan\theta)^2 \Rightarrow 1 = \cot^2\theta + \tan^2\theta - 2$

Completando cuadrados: $5 = (\tan\theta + \cot\theta)^2$

$\therefore \tan\theta + \cot\theta = \sqrt{5}$

64. Indicar cuál o cuáles de las proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F):

I) El producto de las seis razones trigonométricas de un ángulo agudo es igual a la unidad.

II) Si: $\alpha \in \langle 0°; 90° \rangle \Rightarrow \csc\alpha > 1$

III) Si: $\tan\theta = \frac{2m}{m^2 - 1}$; θ: agudo $\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = m$

Resolución:

Analizando las proposiciones tenemos:

I) **Verdadero**: El producto de las seis razones trigonométricas de un ángulo agudo es igual a la unidad.

Sea: (α: agudo)

$\Rightarrow Q = \underbrace{\operatorname{sen}\alpha\csc\alpha}_{1}\underbrace{\cos\alpha\sec\alpha}_{1}\underbrace{\tan\alpha\cot\alpha}_{1}$

Por razones recíprocas tenemos: Q = 1

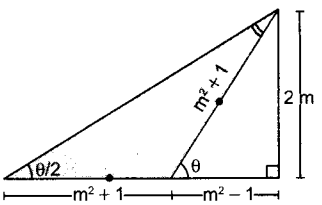
II) **Verdadero**: Se cumple para un ángulo agudo: $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$

Invirtiendo: $\csc\alpha > 1$

III) **Falso**: Si $\tan\theta = \frac{2m}{m^2 - 1}$; θ: agudo

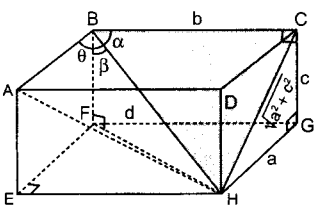
$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = m$

Ubicando θ en un triángulo rectángulo y hallando la hipotenusa, tenemos:



$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2m}{m^2 + 1 + m^2 - 1}$ $\qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{m}$

65. Una diagonal de un paralelepípedo rectángulo forma con las tres aristas concurrentes a un mismo vértice los ángulos α, β y θ. El valor de: $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\theta$ es:



Resolución:

En la figura se tiene un paralelepípedo rectángulo ABCD – EDGH

Se conoce $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

⊿BCH: $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{d^2}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Análogamente:

⊿BFH: $\operatorname{sen}^2\beta = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

⊿BAH: $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\theta = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$

$\therefore \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\theta = 2$

66. Siendo x e y los números de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo verifican la Igualdad:

$$\frac{\tan x + m\sec y}{\cot x} = \frac{\cot y + n\csc x}{\tan y}$$

¿A que es igual? m/n

Resolución:

Por dato: $x + y = 90°$

Entonces se cumple que:

$\tan x = \cot y$; $\cot x = \tan y$; $\sec y = \csc x$

Reemplazamos en la igualdad dato:

$$\frac{\tan x + m\csc x}{\tan y} = \frac{\tan x + n\csc x}{\tan y}$$

Simplificando y reduciendo resulta: $m = n$

$\therefore \frac{m}{n} = 1$

67. Si: $\tan\frac{x}{2}\tan x\tan(x + y) = \tan 2y$ ...(I)

$\sec 2x = \csc y$ ...(II)

Hallar θ en:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}^2(x - 10°) + \cos^2(2y + 10°)}{\text{sen}(x - y)}$$

Resolución:

De (II): $\sec 2x = \csc y$

$2x + y = 90°$ ...(III)

$x + (x + y) = 90°$

$\tan(x + y) = \cot x \Rightarrow \tan(x + y) = \frac{1}{\tan x}$

Reemplazamos en (I)

$$\tan\frac{x}{2}\tan x\frac{1}{\tan x} = \tan 2y$$

$\tan\frac{x}{2} = \tan 2y \Rightarrow x = 4y$ ...(IV)

Resolviendo (III) y (IV) obtenemos

$x = 40° \wedge y = 10°$

Nos piden θ en

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}^2(x - 10°) + \cos^2(2y + 10°)}{\text{sen}(x - y)}$$

Reemplazamos los valores de x e y

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}^2 30° + \cos^2 30°}{\text{sen}30°}$$

$$\tan\theta = \frac{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}{1/2}$$

$\tan\theta = 2 \quad \therefore \theta = 63°\ 30'$

68. Si $\text{sen}(x + 2y) = \cos(2x + y)$

Evaluar: $\dfrac{[\tan 3x + \tan 3y]^2 - [\tan 3x - \tan 3y]^2}{\tan(x + y)}$

Resolución:

Por dato: $\text{sen}(x + 2y) = \cos(2x + y)$

$(x + 2y) + (2x + y) = 90°$

$3x + 3y = 90°$

$\tan 3x = \cot 3y$ ...(I)

Como: $3x + 3y = 90°$

$\Rightarrow x + y = 30°$

$\tan(x + y) = \tan 30°$

$\tan(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ...(II)

Sea E la expresión que nos piden evaluar:

$$E = \frac{(\tan 3x + \tan 3y)^2 - (\tan 3x - \tan 3y)^2}{\tan(x + y)}$$

Aplicamos en el numerador:

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$$E = \frac{4\tan 3x(\tan 3y)}{\tan(x + y)}$$

Reemplazamos (I) y (II) en E

$$\therefore E = \frac{4\cot 3y(\tan 3y)}{\tan 30°} = \frac{4(1)}{\sqrt{3}/3} = 4\sqrt{3}$$

69. Siendo $(\alpha + \beta)$; $(\alpha + \theta)$ y $(\beta + \theta)$ los números de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo verifican la igualdad:

$$\text{sen}(\alpha + 2\beta + \theta) = \cos(\alpha + \theta)$$

Evaluar: $\dfrac{(\beta - \alpha)\text{sen}\left(\frac{\beta\theta}{\alpha}\right) + (\beta + \alpha)\cos\left(\frac{\beta\theta}{\alpha}\right)}{\beta + \beta\text{sen}\left(\frac{\beta\theta}{\alpha}\right)}$

Además: $(\alpha + \beta) < (\alpha + \theta) > (\beta + \theta)$

Resolución:

Por dato:

$\text{sen}(\alpha + 2\beta + \theta) = \cos(\alpha + \theta)$

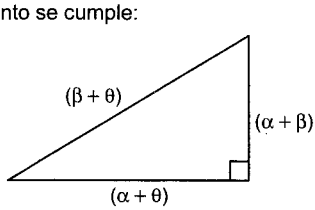
$(\alpha + 2\beta + \theta) + (\alpha + \theta) = \pi/2$

$\alpha + \beta + \theta = \pi/4$ ... (I)

Por otro dato:

$(\alpha + \beta) < (\alpha + \beta) < (\beta + \theta)$

Por lo tanto se cumple:



Por Pitágoras:

$(\beta + \theta)^2 = (\alpha + \theta)^2 + (\alpha + \beta)^2$

$\beta\theta = \alpha(\alpha + \beta + \theta)$ ...(II)

(I) en (II) $\beta\theta/\alpha = \pi/4$

Reemplazamos en la expresión que nos piden

$$\frac{(\beta - \alpha)\text{sen}(\pi/4) + (\beta + \alpha)\cos(\pi/4)}{\beta + \beta\text{sen}(\pi/4)}$$

Se sabe que: $\text{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\beta - \alpha + \beta + \alpha)}{\beta\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2002 - I)

En la siguiente figura calcular el valor de α.

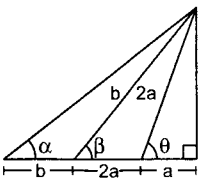
A) $\frac{\pi}{12}$

B) $\frac{\pi}{6}$

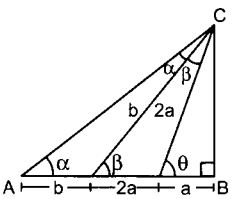
C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{3}$

E) $\frac{5\pi}{12}$



Resolución:



El $\triangle ADC$ es isósceles: $m\angle ACD = \alpha$

El $\triangle DCE$ es isósceles: $m\angle DCE = \beta$

Además: $\theta = 2\beta$; $\beta = 2\alpha$

El $\triangle CBE$ es notable: $\theta = 60° \Rightarrow \beta = 30°$;

$\alpha = 15° \therefore \alpha = \frac{\pi}{12}$ rad

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

Calcule el valor de $E = \sec 80° + 8\cos^2 80°$

A) 4 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

Resolución:

Por R.T. complementarias

$\cos 80° = \text{sen}10°$

$E = \csc 10° + 8\text{sen}^2 10°$

Pasando a seno:

$$= \frac{1 + 2\overbrace{4\text{sen}^3 10°}^{\text{Fórmula de degradación}}}{\text{sen}10°}$$

$$= \frac{1 + 2(3\text{sen}10° - \text{sen}30°)}{\text{sen}10°}$$

$$= \frac{1 + 6\text{sen}10°}{\text{sen}10°} \qquad \therefore E = 6$$

Clave: B

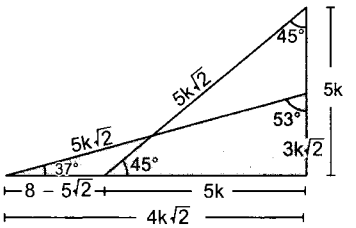
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Una escalera se encuentra apoyada en una pared haciendo un ángulo de 45°. Se resbala, la parte inferior se desliza $8 - 5\sqrt{2}$ m de su posición inicial y el nuevo ángulo que forma con la pared de 53°. ¿Cuántos metros mide la escalera?

A) 8 B) 10 C) 12

D) 15 E) 16

Resolución:



Piden longitud de la escalera: $5k\sqrt{2}$

Del gráfico: $8 - 5\sqrt{2} = 4k\sqrt{2} - 5k$

$\sqrt{2}(4\sqrt{2} - 5) = k(4\sqrt{2} - 5)$

Resolviendo:

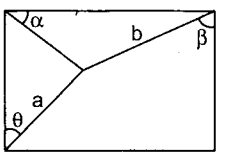
$\Rightarrow k = \sqrt{2} \quad \therefore$ Longitud = 10 m

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

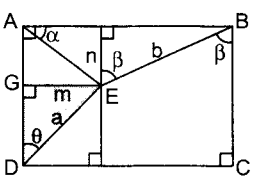
En la figura mostrada, el valor de:

$E = \frac{a\tan\alpha\,\text{sen}\theta}{b\cos\beta}$, es:



A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

Resolución:



I. $\triangle AFE$: $\tan\alpha = \frac{n}{m}$ II. $\triangle BFE$: $\cos\beta = \frac{n}{b}$

III. $\triangle DGE$: $\text{sen}\theta = \frac{m}{a}$

Reemplazando en: $E = \frac{a\tan\alpha\,\text{sen}\theta}{b\cos\beta}$

$$E = \frac{a\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{a}\right)}{b\left(\frac{n}{b}\right)} = 1 \qquad \therefore E = 1$$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Un águila se encuentra a una altura H y ve a una liebre de altura h. Se lanza sobre la presa a lo largo del tramo de la trayectoria escrita por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x > 1$, llegando a su presa. Determina la tangente del ángulo de depresión con el cual el águila vio al inicio a su presa.

A) $\frac{1}{h}$ B) hH C) $\frac{H}{h}$

D) $\frac{H-h}{h}$ E) $\frac{H-h}{H+h}$

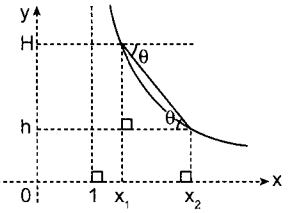
Resolución:

Piden: $\tan\theta = \frac{H-h}{x_2 - x_1}$

Ahora: $y = \frac{1}{x-1}$

$x - 1 = 1/y$

$x_2 - 1 = 1/h$



$$\Rightarrow \frac{x_1 - 1 = \frac{1}{H}}{x_2 - x_1 = \frac{H-h}{Hh}} \quad \therefore \tan\theta = hH$$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se tiene un triángulo ABC en el que se conocen el lado AC (opuesto al vértice B, de longitud b), y la bisectriz de longitud L relativa al vértice B. Hallar el área del triángulo ABC.

A) $\frac{bL}{3}\cos\left(\frac{A-C}{3}\right)$ B) $\frac{bL}{2}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$

C) $\frac{bL}{3}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$ D) $\frac{bL}{2}\cos\left(\frac{A-C}{3}\right)$

E) $\frac{bL}{2}\cos\left(\frac{A-C}{4}\right)$

2. En la figura mostrada, se tiene dos rectángulos ABCD y ABMN que forman un ángulo diedro cuyo ángulo plano mide α. P es un punto del plano ABCD, tal que la recta AP forma un ángulo θ con $\overline{AD}$ y un ángulo β con el plano del rectángulo ABMN. ¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

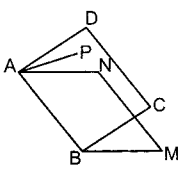
A) $\tan\beta = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\sec^2\alpha\tan^2\theta}}$

B) $\tan\beta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\sec^2\theta\tan^2\theta}}$

C) $\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\theta}$

D) $\tan\beta = \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\theta}$

E) $\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\theta}{1+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}$



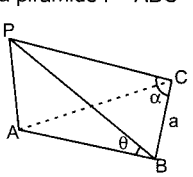
3. Se tiene una poligonal ABCD tal que los ángulos ABC y BCD miden $\frac{5\pi}{6}+\cot\frac{3\pi}{4}$, respectivamente. Hallar la longitud del radio de la circunferencia tangente a los tres segmentos de la poligonal si cumple que:

$$\cot\frac{5\pi}{12}+\cot\frac{3\pi}{8}=m \quad \wedge \quad BC = n$$

A) $\frac{2n}{m}$ B) $\frac{n}{m}$ C) $\frac{n}{2m}$

D) $\frac{nm}{n+m}$ E) $\sqrt{nm}$

4. En la figura mostrada PA es perpendicular al plano del $\triangle ABC$ y AB es perpendicular a BC.
Si: BC = a, $m\angle ABP = 0$ y $m\angle BCP = \alpha$; hallar el volumen de la pirámide P−ABC



A) $\frac{a^3}{12}\tan^2\alpha\operatorname{sen}^2\theta$ B) $\frac{a^3}{12}\tan^2\alpha\operatorname{sen}2\theta$

C) $\frac{a^3}{12}\tan^2\alpha\operatorname{sen}^2\theta$ D) $\frac{a^3}{12}\tan^2\alpha\operatorname{sen}\theta$

E) $\frac{a^3}{12}\tan\alpha\operatorname{sen}2\theta$

5. En la figura, el triángulo NST es isósceles de base 6, KH es el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de lado 6. Hallar el radio R.

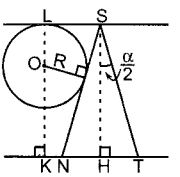
A) $2\sqrt{3}\cot\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$

B) $2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$

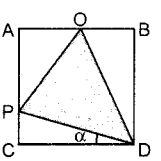
C) $2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi-\alpha}{3}\right)$

D) $4\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$

E) $2\sqrt{3}\cot\left(\frac{\pi-\alpha}{3}\right)$



6. En el cuadrado ABCD, las áreas de los triángulos OAP, PDC y DBO son iguales. Hallar $\csc\alpha$.

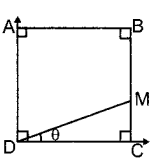


A) $\sqrt{\frac{6}{3+\sqrt{5}}}$ B) $\sqrt{\frac{6}{5-\sqrt{3}}}$ C) $\frac{6}{3-\sqrt{5}}$

D) $\sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{5}}}$ E) $\frac{6}{3+\sqrt{5}}$

7. En la figura mostrada se tiene un cuadrado ABCD uno de sus vértices en el origen de coordenadas cuyo lado tiene la longitud a unidades. Si el segmento DM divide al cuadrado en un triángulo y en un trapecio cuyas áreas están en la relación de 1: 4. Calcular la tangente del ángulo MDC.

A) 1/4
B) 2/5
C) 1/3
D) 3/4
E) 3/5



8. Dado un polígono regular convexo de n lados, se trazan dos circunferencias, la primera de radio r que es tangente a todos los lados del polígono, y la segunda de radio R que pasa por todos los vértices. Hallar la razón r/R.

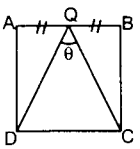
A) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ B) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$ C) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$

D) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ E) $\cos\frac{\pi}{n}$

9. Un cuadrado MNPQ cuyos lados miden $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, está inscrito en una circunferencia. Calcular la distancia del punto Q al punto medio del arco MN.

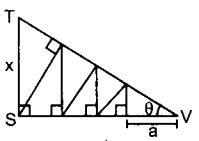
A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}/2$

10. La siguiente figura es un cuadrado, donde Q es punto medio del lado AB. Determinar $\csc\theta$



A) 2 B) 5/4 C) 3
D) 4 E) $2\sqrt{5}$

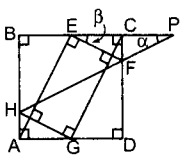
11. En la figura, hallar x.



A) $a\sec^5\theta\operatorname{sen}\theta$ B) $a\sec^6\theta\tan\theta$
C) $a\cot\theta\sec^7\theta$ D) $a\tan\theta\cos^6\theta$
E) $a\sec^5\theta\cos\theta$

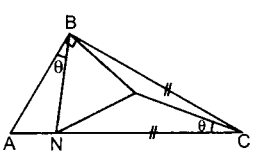
12. Si ABCD es un cuadrado, señalar el equivalente de:

$$T = \frac{1-\tan\alpha}{1-\tan\beta}$$



A) $\tan\beta$ B) $2\tan\beta$ C) $3\tan\beta$
D) $2\cot\beta$ E) $\cot\beta$

13. En la figura mostrada, S es el área de la región sombreada, AN = 1. Hallar: $T = \sqrt{4S\cot\phi}$
En términos de θ



A) $\csc\theta - 2\operatorname{sen}\theta$ D) $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$
B) $\csc\theta + 2\operatorname{sen}\theta$ E) $\csc^2\theta + \operatorname{sen}\theta$
C) $\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta$

14. Se tiene un triángulo ABC (recto en A) en donde B > C. Si la relación de los catetos es $2\sqrt{2}$, ademas:

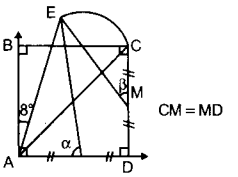
$$M = \sqrt{6}\sec\frac{B}{6} + 2\sqrt{6}\sec\frac{B}{6}\cos\frac{B}{3}$$

$$N = 1 + \csc C + \sqrt{6}\sec\frac{B}{6}$$

Calcular: $M^2 - N^2$

A) −1 B) 0 C) 1
D) −4 E) 8

15. En el cuadrado ABCD, calcular: $T = 3\tan\alpha - 9\tan\beta$



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

16. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), se cumple que:

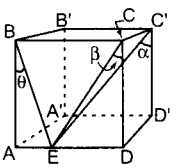
$$\tan\left(A-\frac{C}{2}\right)\tan\left(A+\frac{B}{2}\right)\tan\left(C-\frac{B}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{3}\right)\tan\left(\frac{C}{2}+\frac{B}{6}\right) = 1$$

Calcular:

$$S = \tan\frac{A}{4} + \cot\frac{C}{2}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) $4\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

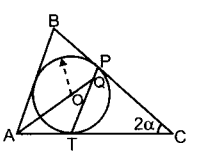
17. En el cubo mostrado, calcular: $S = \dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\theta}{\tan\beta}$



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1/2

18. Del gráfico, hallar $\tan\alpha$, si: TQ = 2 ∧ BC = $\sqrt{13}$

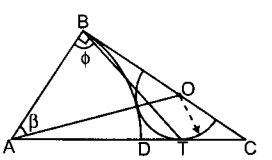
A) 4/5
B) 2/3
C) 2/7
D) 3/7
E) 3/4



19. Del gráfico calcular:

$$T = (\sec\phi - 1)(\sec\beta - 1) + \cos\phi + \cos\beta$$

Siendo A centro del arco BD.



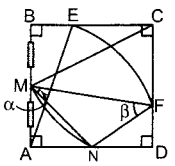
A) $\sqrt{2}$ B) 0 C) 2
D) 3 E) $\frac{3}{2}$

20. En el cuadrado ABCD, calcular:

$$T = 2\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{5}\cos\beta$$

Si: AE = AF; CM = CN y CF = 3FD

A) $\sqrt{11}$
B) $\sqrt{13}$
C) $4\sqrt{6}$
D) $\sqrt{19}$
E) $\sqrt{17}$



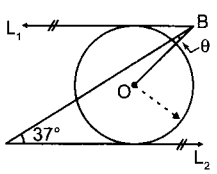
21. Si en un paralelepípedo, la diagonal de este forma con las aristas que concurren en uno de sus extremos, ángulos agudos que miden 60°, 53° y θ.
Calcular el valor de: $S = \sqrt{61}\,\text{sen}\theta - \frac{1}{5}\text{sen}3\theta°$

A) 5 B) 6 C) 7
D) 7/2 E) 13/2

22. En un cuadrado ABCD, se traza AE (E en $\overline{BC}$) y se construye otro cuadrado ECFG (exteriormente al cuadrado ABCD). Si: m∠CBG = x; m∠FAD = y; m∠GDF = z, calcular: P = (cotx + cotz) (tany − 1)

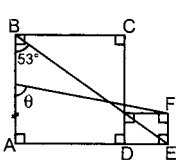
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1/4

23. Si en el gráfico, la distancia de O a $\overline{AB}$ es la quinta parte del radio de la circunferencia, calcular: cotθ



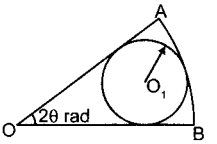
A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

24. Del gráfico, calcular: tanθ, si: ABCD: cuadrado.



A) 15/4 B) 8 C) 15/8
D) 16/3 E) 18/5

25. Sea k la relación entre la longitud de la circunferencia de centro O_1 y la longitud del $\widehat{AB}$, cuyo centro es O, hallar el equivalente de: $\sqrt{\frac{\csc\theta - 1}{k}}$



A) $\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\tan\frac{\theta}{2}$ B) $\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\cot^2\theta$ C) $\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\tan^2\theta$
D) $\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\cot\theta$ E) $\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\tan\theta$

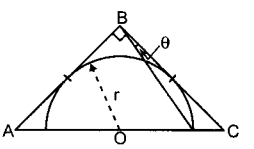
26. En un triángulo ABC(C = 90°), se cumple que:

$$\tan A = \frac{2 + \cot\frac{B}{2}}{4 + \cot\frac{A}{2}}, \text{ calcular: } T = \frac{\sec^2 B - \cot A}{4 + \csc^2 A}$$

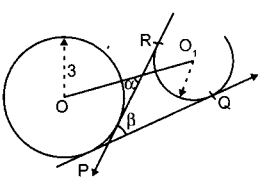
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 2

27. En el triángulo ABC isósceles, calcular: cscθ

A) $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{6} - \sqrt{3}$
C) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$
D) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$
E) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$



28. De acuerdo al gráfico, señalar el equivalente de: sen(α − β).



A) $\frac{1}{5}\text{sen}\alpha$ B) $\frac{1}{3}\text{sen}\alpha$ C) $\frac{1}{2}\text{sen}\alpha$
D) $\frac{1}{4}\text{sen}\alpha$ E) $\frac{1}{6}\text{sen}\alpha$

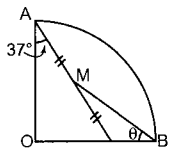
29. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 338. Si la tangente de uno de los ángulos agudos es 2,4; ¿cuánto mide el cateto menor?

A) 13 B) 33,8 C) 50
D) 56,33 E) 55

30. Se tiene dos circunferencias tangentes exteriormente con radios R y r. Calcular el cuadrado de la cotangente del ángulo formado por la recta tangente a ambas circunferencias y la recta que une los centros.

A) $\frac{4Rr}{(R-r)^2}$ B) $\frac{4Rr}{(R+r)^2}$ C) $\frac{2Rr}{(R-r)^2}$
D) $\frac{2Rr}{(R+r)^2}$ E) $\frac{Rr}{(R-r)^2}$

31. Del gráfico, obtener: $\tan\theta$



A) 4/7 B) 3/4 C) 5/4
D) 2/3 E) 4/5

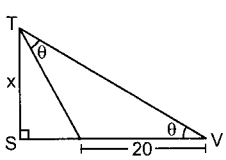
32. Si: $f(x) = \csc\frac{\pi}{3x} + \tan\frac{\pi}{2x} + 2\cos\frac{\pi}{x+1}$
calcular: f(2)

A) 2^0 B) 2^1 C) 2^2
D) 2^3 E) 0

33. Se tiene un triángulo rectángulo con catetos a y b. Hallar su área en términos de m si:
$a = t^2 + t\sec\frac{\pi}{3} + 2\text{sen}\frac{\pi}{6}$
$b = t^2 - t\csc\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{3}$
$t^2 = 2mt\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - m^2$

A) $m^2 - 1$ B) $\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2$ C) $\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$
D) $\frac{(m^2-1)^2}{2}$ E) $m^2 + 1$

34. En la figura calcular el valor de x, si se cumple la siguiente condición:
$\tan(30° - \theta) - \cot(30° + 3\theta) = 0$

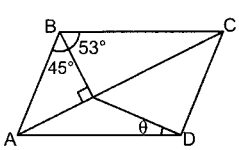


A) $10\sqrt{2}$ B) 10 C) $5\sqrt{3}$
D) 5 E) $10\sqrt{3}$

35. Sabiendo que:
$\tan(40° + x)\text{sen}(50° - x) = \cos(10° + x)$
$\tan(2x - 5°)\tan y = \tan 1\tan 2\tan 3 \ \ldots \tan 89$
Calcular:
$S = \sec^2(2x + 5°) + \tan^2(y + 5°) + \csc^2(y - x - 5°)$

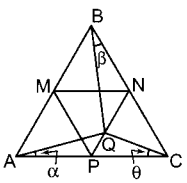
A) 4 B) 6 C) 7
D) 9 E) 8

36. En el paralelogramo ABCD, calcular el valor de:
$T = \sqrt{9\cot\theta - 13\tan\theta}$



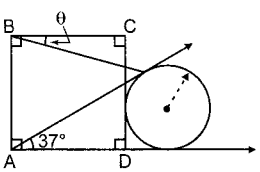
A) 1,8 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

37. Si en el triángulo ABC, equilátero M; N y P son puntos medios $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Además: NQ = 2QP, calcular:
$S = \frac{7\tan\alpha + 5\tan\theta}{\tan\beta}$



A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 14

38. Del gráfico, calcular: $\cot\theta$, si: ABCD: cuadrado.

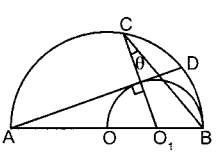


A) 6 B) 12 C) 9
D) 18 E) 14

39. Siendo:
$\text{sen}(2x + y)\text{sen}(x - y + 10°) =$
$\cos(x + 2y)\cos(80° - x + y)$
calcular: $S = \cot(x + y)\cot(5x - 2y)\cot(5y - 2x)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

40. Del gráfico, O y O_1 son centros de las semicircunferencias mostradas. Calcular: $V = \cot\theta - 3\tan\theta$



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

41. Si un plano que hace un ángulo ϕ con la horizontal corta a un cilindro circular recto. Calcular la relación del diámetro mayor al diámetro menor de la elipse que se forma al ser cortado el cilindro por el plano.

A) $\tan\phi$ B) $\cot\phi$ C) $\sec\phi$
D) $\csc\phi$ E) $\sec\phi - 1$

42. Se tienen dos torres de diferentes alturas ubicadas una al oeste de la otra. Desde un punto del suelo ubicado al SE de una y al OyS de la otra, se ven sus partes altas con ángulos de elevación α y β respectivamente. De esa ubicación, nos desplazamos al este hasta ubicarnos al ExS de la primera y al SO de la segunda, de donde se ven sus partes más altas con ángulos de elevación θ y ϕ respectivamente. Hallar el equivalente de:

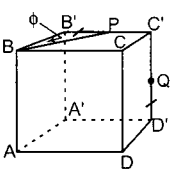
$$T = \frac{\text{sen}(45° + x)}{\text{sen}(45° + y)}$$

A) $\frac{\tan\alpha\tan\theta}{\tan\beta\tan\phi}$ B) $\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\theta\tan\phi}$ C) $\frac{\tan\theta\tan\phi}{\tan\alpha\tan\beta}$
D) $\frac{\tan\beta\tan\phi}{\tan\phi\tan\theta}$ E) $\frac{\tan\alpha\tan\phi}{\tan\phi\tan\theta}$

43. Un barco se encuentra al sur de un helicóptero, el barco permanece inmóvil, pero el helicóptero avanza cierta distancia hacia el este. Desde el barco se observa al helicóptero en la segunda posición con un ángulo de elevación θ. Si el ángulo de elevación en la primera posición es de 45° y el helicóptero avanzó 2 km, calcular θ, si además el helicóptero se encuentra a una altura de $\sqrt{2}$ km.

A) $\arctan\frac{1}{2}$ B) $\arctan\frac{1}{3}$ C) $\arctan\frac{3}{4}$
D) 30° E) 45°

44. En el cubo mostrado desde A, se observa P y Q con ángulos de elevación α y β; tales que: $\cot\alpha\cot\beta = 2\sqrt{5}$, calcular: $\cot\phi$
(AA'D'D es horizontal)



B'P = D'Q

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

45. Un avión viaja de oeste a este con una cierta declinación ϕ respecto a la horizontal. En un cierto momento desde A (en el suelo) se observa al avión al norte con un ángulo de elevación α, luego al NE con un ángulo de elevación β y finalmente E $\frac{37°}{2}$N con un ángulo de elevación θ.

Simplificar: $V = \sqrt{(\tan\alpha - \sqrt{2}\tan\beta)(\tan\alpha - \sqrt{10}\tan\theta)}$

A) $\tan\phi$ B) $3\tan\phi$ C) $3\cot\phi$
D) $\sqrt{3}\tan\phi$ E) $\sqrt{3}\cot\phi$

46. Un avión que viaja de oeste a este, con una declinación α respecto a la horizontal; es visto por un observador primero al norte con un ángulo de elevación θ, y después al NE, con un ángulo de elevación β; momento en el cual el avión reduce la declinación a ω, siendo observado al E30°N con un ángulo de elevación ϕ.

Calcular: $S = \frac{(\tan\theta - \tan\alpha)(\tan\beta - \sqrt{2}\tan\phi)}{\tan\beta\tan\omega}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3} - 1$ C) $\sqrt{3} + 1$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3} + 3$

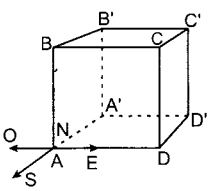
47. Se tiene un poste $\overline{PQ}$ (P en el suelo) y tres puntos en la superficie horizontal A, B y C, perfectamente alineados; desde los cuales se ve Q con ángulos de elevación α, β y θ respectivamente. Si BP es bisectriz del ángulo APC que mide 60°, calcular:

$T = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{\tan\beta}$

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) 3 E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

48. En el cubo mostrado, de A salen dos hormigas, una al E37°N y la otra siguiendo la ruta ABB', a la misma velocidad. Al mismo tiempo sale una tercera hormiga de D' siguiendo la ruta D'C'B', cuando el primero llega a DD', divisa las posiciones finales de las otras dos, con ángulos de elevación α y θ.

Calcular: $\frac{\cot\alpha}{\cot\theta}$



A) $\sqrt{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{10}}{8}$ E) $2\sqrt{10}$

49. La torre de Pisa tenía originalmente 179 pies; pero ahora debido al hundimiento de su base está inclinada un ángulo θ respecto de la horizontal. Cuando la parte superior de la torre se observa a 150 pies desde su base el ángulo de elevación es aproximadamente 53°. Determinar el senθ.

Nota: $\frac{180 + \sqrt{70\,564}}{2} = 223$

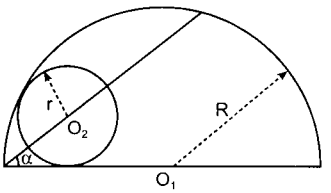
A) 0,699941 B) 0,796641 C) 0,956641
D) 0,996641 E) 0,896641

50. Un maratonista sale de un punto P ubicado al este de un estrado, y se desplaza hacia al norte. Desde el estrado lo ven al EϕN y luego al E$(\phi + \theta)$N; notándose que las distancias recorridas para la pri-

mera y segunda observación, son iguales. Calcular el mínimo valor de $\cot\theta$.

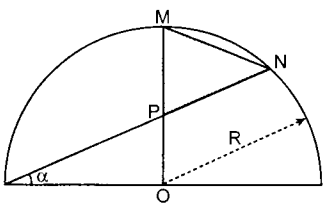
A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

51. Dado el gráfico mostrado, calcule $\tan\alpha - \tan 2\alpha$ en función de r y R que son radios de la circunferencia con centros O_2 y O_1 respectivamente.



A) 2Rr B) $R^2 - r^2$ C) $\frac{r}{2R}$
D) $\frac{r^2}{2R}$ E) $\frac{R^2}{2r}$

52. En la figura se muestra una semicircunferencia de radio R, calcule el área de la región sombreada en función de α y R.



A) $R^2(\cot\alpha - 1)\text{sen}2\alpha$
B) $R^2(1 - \cot\alpha)\cos 2\alpha$
C) $0{,}5R^2(1 - \tan\alpha)\cos 2\alpha$
D) $R^2(1 - \cos 2\alpha)\tan\alpha$
E) $R^2(1 + \tan\alpha)\text{sen}2\alpha$

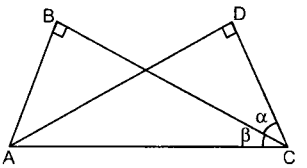
53. Un triángulo rectángulo ABC, recto en B, tiene como menor de sus ángulos α. Si se construye el rectángulo ADEC de modo que B pertenece al lado DE, calcule el área de la región triangular BEC en función de α y la hipotenusa a del triángulo ABC.

A) $a^2\cos^3\alpha\,\text{sen}\alpha$ B) $a\sqrt{\csc^2\alpha\cot\alpha}$
C) $\frac{a^2}{2}\cos^3\alpha\,\text{sen}\alpha$ D) $\frac{a}{4}\cos^3\alpha\,\text{sen}\alpha$
E) $2a^2\text{sen}\alpha\cos\alpha$

54. Se tiene un triángulo ABC de hipotenusa b. Sobre los catetos AB y BC se construye exteriormente un triángulo equilátero ABP y un cuadrado BCDE respectivamente. Si α es la medida del ángulo BAC, entonces la distancia entre los puntos P y E será.

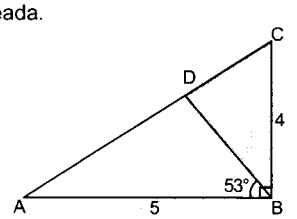
A) $b\sqrt{1 + \text{sen}\alpha\cos\alpha}$ B) $b\sqrt{\csc^2\alpha - \cot\alpha}$
C) $b\sqrt{\frac{2}{3} + \text{sen}\alpha\cos\alpha}$ D) $b\sqrt{\text{sen}^2\alpha - 2}$
E) $b\sqrt{1 - \text{sen}\alpha\cos\alpha}$

55. Dado la figura, determine BD en términos de α y β, si AB = 1



A) $\text{sen}\beta\csc$ B) $\tan\beta\cot\alpha$ C) $\csc\alpha\sec\beta$
D) $\csc\beta\,\text{sen}\alpha$ E) $\cos\beta\cos\alpha$

56. Del gráfico mostrado calcule el área de la región sombreada.

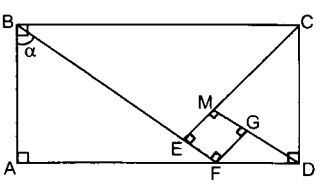


A) 15/4 B) 3/4 C) 12/5
D) 4/15 E) 2/15

57. Dado un triángulo ABC en donde B = 53°; una perpendicular, bajada al lado AC, corta a su vez al lado AB en el punto D y divide al triángulo en dos regiones cuyas áreas son iguales.
Si AB = 5; BC = 4; calcule el lado AD en términos del ángulo A.
Observe: $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$

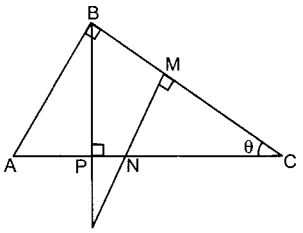
A) $2\sqrt{\text{sen}2A}$ B) sen2A C) $3\sqrt{\cos 2A}$
D) $4\sqrt{\csc 2A}$ E) $4\sqrt{\sec 2A}$

58. De la figura, calcule el área del rectángulo ABCD en términos de α y el área de la región sombreada (cuadrado) cuya área es S. Además M es punto medio de EC.



A) $2S(2\tan\alpha + 3)$ B) $S(2\cot\alpha + 1)$
C) $2S(2\cos\alpha + 3)$ D) $2S(2\tan\alpha + 1)$
E) $S(2\cot\alpha + 5)$

59. Del gráfico, halle $T = 2\text{sen}\theta\cos\theta(\cot\theta - \text{sen}\theta)$ si AP = PN y BM = NC.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

60. Un alumno de altura h observa un punto P, sobre una colina en línea horizontal y se sabe que la distancia que hay desde el pie del alumno hacia el punto P es 2h. Luego, el alumno se ubica en el punto P y observa su ubicación inicial con un ángulo de depresión β; calcule $\csc\beta$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

61. Álvaro observa la parte alta de un edificio con el ángulo de elevación α, cuando este está a 20 m. Si se aleja otros 20 m, ahora lo ve con un ángulo de elevación β. Si $\tan\alpha + \tan\beta = 0{,}75$ y Álvaro mide 1,80 m de estatura, calcule la altura del edificio.

A) 10,8 m B) 9,8 m C) 11,8 m
D) 11,0 m E) 10 m

62. Un personaje agobiado por su situación económica decide suicidarse tirándose de lo alto de su casa; pero el suicida se percata, con un ángulo de depresión de 37°, que un policía lo está observando. Si el policía observa lo alto de la casa con un ángulo de elevación 30° y el policía se encuentra a 10 m, calcule la estatura del suicida. Considere ($\sqrt{3} = 1{,}74$).

A) 2,10 m B) 1,90 m C) 1,80 m
D) 1,75 m E) 1,65 m

63. Salvador observa lo alto de dos postes uno detrás de otro con un ángulo de elevación θ; si consideramos la línea visual como una recta, esta pasaría por los puntos más alto de dichos postes. Si los postes miden 12 m y 18 m, calcule la distancia que los separa, sabiendo que $\tan\theta = \frac{2}{3}$.

A) 6 m B) 7 m C) 8,5 m
D) 9,5 m E) 9 m

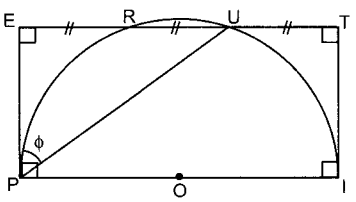
64. Si $\tan x = \frac{24}{7}$; $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$; halle $\text{sen}x - \cos x + \frac{8}{25}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

65. En un triángulo rectángulo de lados respectivos a; b y c, recto en B donde se cumple a + b = 3c. Calcule senA.

A) 3/5 B) 4/5 C) 7/9
D) 4/7 E) 8/11

66. A partir del gráfico mostrado, calcule el valor de $\cot\phi$.



A) 4 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1
D) $\sqrt{3}$ E) 2

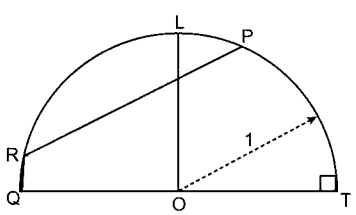
67. Si en un triángulo ABC (recto en C) de lados BC = a; AC = b; AB = c. Halle el equivalente de la expresión $(b + c)\tan\frac{A}{2} - b\cot B$.

A) 1 B) 0 C) −1
D) 2 E) −2

68. Si A es un ángulo agudo y cscA + cotA = n, entonces halle tan A/2.

A) $\frac{n+1}{n-1}$ B) $\frac{n}{n+1}$ C) $\frac{1}{n}$
D) n^2 E) $\frac{n-1}{n}$

69. De la figura, halle la distancia del punto P a la prolongación del segmento QR. Además se cumple: $L_{\widehat{RL}} = L_{\widehat{PT}} = 2L_{\widehat{QR}} = 2L_{\widehat{LP}}$.



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

70. Si θ es un ángulo agudo $\frac{1}{2}\cot 2\theta = \cot 45° + \sqrt{\tan 37°}$ determine θ.

A) $\frac{\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{16}$ C) $\frac{\pi}{30}$
D) $\frac{\pi}{24}$ E) $\frac{\pi}{10}$

71. Calcule $T = \cot\left(\frac{53°}{A}\right)$, si $A = \sec 60^{\circ\csc 30^{-\tan 45°}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D) $\sqrt{5}-1$ E) $\sqrt{5}+2$

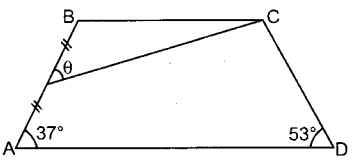
72. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{(\tan 60°)^{(\operatorname{sen}30°)^{-1}} + \tan 45°}{\csc 30° + \cot^2 30°}$, calcule

$R = \csc\theta\cos 60°$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2

D) 1/2 E) 5/8

73. De la figura mostrada, halle $\tan\theta$; si 2AB = BC. Además ABCD es un trapecio.



A) $\frac{3}{13}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{2}{9}$

D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{7}{13}$

74. Si $\operatorname{sen}2\alpha + \cot 45° = \cos 7\alpha + 2\cos 60°$, además 7α es agudo; entonces el valor de $R = \tan 3\alpha \cos(\alpha + 20°) + \cos 6\alpha$ será

A) 2 B) 4 C) 1

D) 1/2 E) 3

75. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ siendo α y β agudos. Calcule $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

76. Si sobre la hipotenusa AC de un triángulo ABC (recto en B) se toma un punto D tal que $m\angle BCA = 37°$; halle la tangente del ángulo ADB. Además $2\overline{AD} = 3\overline{DC}$.

A) 11/12 B) 2 C) 7/8

D) 9/7 E) 23/17

77. Si la $m\angle ABC$ de un triángulo ABC es 143°, además AB = 2; BC = 3; determine el valor de la tangente del $\angle ACB$.

A) 6/29 B) 6/23 C) 7/15

D) 9/11 E) 15/17

78. Siendo α y β ángulos complementarios, tal que $\sec\beta = n + 1$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{n-1}{3}$.

Determine el valor de n.

A) 2 B) − 2 C) A o B D) ± 3 E) ± 4

79. Si sobre la hipotenusa BD de un triángulo rectángulo ABD se levanta un triángulo rectángulo BDC (B = 90°); halle la medida del segmento DC, sabiendo que AD = 10 cm. Además $m\angle BDC = \frac{m\angle CDA}{2} = \frac{53°}{2}$

A) $40\sqrt{3}$ cm B) $25\frac{\sqrt{5}}{3}$ cm C) $20\sqrt{3}$ cm

D) $\frac{17}{3}\sqrt{3}$ cm E) $\frac{25}{2}$ cm

80. Sabiendo que α y son ángulos complementarios, además $\tan\alpha + \tan\theta = 2$. Calcule:

$$S = \frac{\tan^4\theta + \tan^4\alpha}{\operatorname{sen}^4\theta\sec^4\alpha}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 2 D) 1/2 E) 4

81. Siendo α un ángulo agudo donde se cumple $\operatorname{sen}(30° - 2\alpha)\csc(15° + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}20°}{\cos 70°}$, halle el valor de $T = \sqrt{2}\operatorname{sen}(40° + \alpha) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(\alpha + 55°)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 3/2 E) 5/2

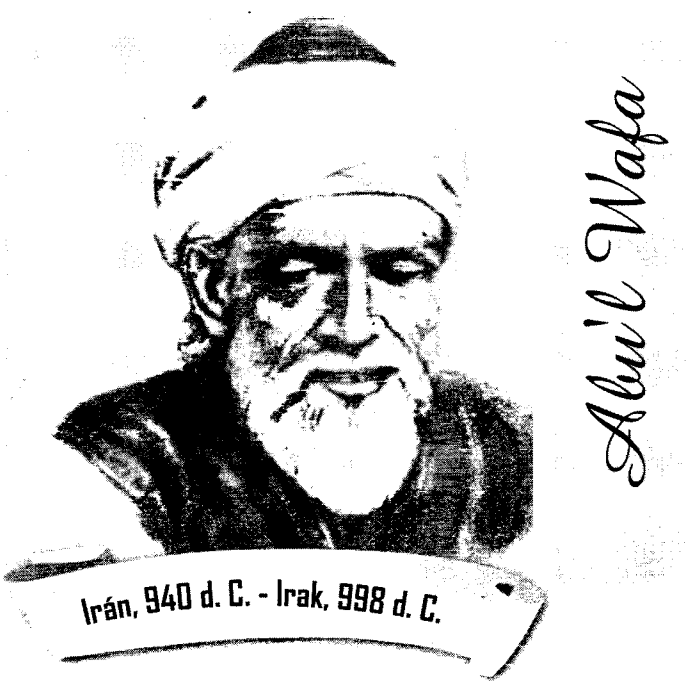
CLAVES

1. B	12. B	23. C	34. B	45. D	56. A	67. B	78. A
2. A	13. A	24. D	35. D	46. B	57. D	68. C	79. E
3. B	14. E	25. D	36. B	47. C	58. D	69. C	80. C
4. A	15. D	26. B	37. D	48. A	59. A	70. D	81. E
5. B	16. C	27. A	38. B	49. D	60. C	71. E	
6. D	17. A	28. C	39. D	50. B	61. C	72. C	
7. B	18. B	29. D	40. A	51. C	62. D	73. D	
8. E	19. C	30. A	41. C	52. C	63. E	74. C	
9. B	20. B	31. E	42. C	53. C	64. A	75. B	
10. B	21. D	32. C	43. D	54. A	65. B	76. B	
11. B	22. B	33. D	44. B	55. D	66. B	77. B	

Razones trigonométricas de ángulos en posición normal

03 capítulo

Abú al-Wafá Buzjani o Abu'l Wafa (940-998) fue un matemático y astrónomo persa. Nació el 10 de junio de 940 en Buzhgan (Nishapur, Irán) y murió el 1 de julio de 998 en Bagdad (Irak). Su contribución a las matemáticas está enfocada principalmente en el campo de la trigonometría, pues introdujo la función tangente, mejoró los métodos de calcular las tablas de la trigonometría (sus tablas trigonométricas son exactas a ocho lugares decimales), ideó un método nuevo de calcular las tablas del seno, las fórmulas del seno de la suma de dos ángulos y la del seno y coseno del ángulo doble; además, desarrolló maneras de solucionar algunos problemas de triángulos esféricos.

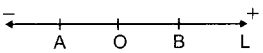


Escribió multitud de obras entre las que cabe mencionar una sobre medición de cuerdas y arcos. En dicha obra usa las tangentes para realizar cálculos trigonométricos. Abu'l Wafa dio las fórmulas de las tangentes y de las cotangentes, así como las de las secantes y cosecantes, cuando nadie había hablado aún de ellas. En el campo de la Astronomía estudió los movimientos de la Luna y un cráter situado cerca del ecuador lunar lleva su nombre.

Fuente: Wikipedia

RECTAS DIRIGIDAS

Una recta dirigida (llamada también eje) es aquella en la cual se asigna una dirección positiva y una dirección negativa. En la figura se considera que la dirección positiva de la recta L es a la derecha del punto O (O Origen) y que la dirección negativa es a la izquierda de O.



La distancia dirigida del punto A al punto B indica tanto la longitud del segmento de recta como la dirección de A a B.

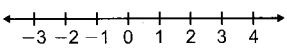
Observaciones

Para dos puntos cualesquiera A y B situados sobre una recta dirigida se cumple que:

$$\boxed{AB = -BA}$$

SISTEMA COORDENADO SOBRE UNA RECTA

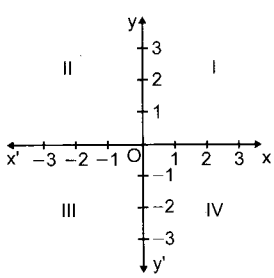
Los números reales pueden representarse como puntos sobre una recta, una recta con un número asociado a cada punto se llama **recta numérica** o **recta coordenada** y al número asociado con un punto sobre la recta se le llama coordenada del punto. Por ejemplo:



SISTEMA COORDENADO SOBRE UN PLANO

Sistema de coordenadas rectangulares. Este sistema consta de dos rectas dirigidas (rectas numéricas) perpendiculares entre sí, (llamadas ejes coordenados), al plano que determinan estas rectas se le llama: plano cartesiano o plano coordenado.

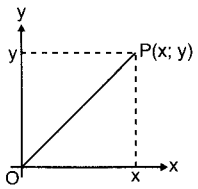
En la figura adjunta podemos observar al plano cartesiano cuyas características son las siguientes:



O: Origen de coordenadas.

El eje $\overleftrightarrow{x'x}$ se llama eje de abscisas (o simplemente eje X)
El eje $\overleftrightarrow{y'y}$ se llama eje de ordenadas (o simplemente eje Y)

Observamos que el plano está dividido en 4 regiones denominados cuadrantes y numerados como se indica en la figura.



$\overrightarrow{Ox}$: Se le denomina semieje positivo de abscisas.
$\overrightarrow{Ox'}$: Se le denomina semieje negativo de abscisas.
$\overrightarrow{Oy}$: Se le denomina semieje positivo de ordenadas.
$\overrightarrow{Oy'}$: Se le denomina semieje negativo de ordenadas.

La ubicación de un punto en el plano cartesiano se representa mediante un par ordenado (x; y) a este par se le llama coordenadas del punto; x es la distancia dirigida del punto al eje de ordenadas; y es la distancia dirigida del punto al eje de abscisas.

A x se le denomina abscisa del punto P.
A y se le denomina ordenada del punto P.

Observaciones

P(x; y) se lee: "El punto P de coordenadas x; y".
P ! IC se lee: "El punto P pertenece al primer cuadrante".

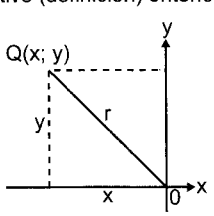
Propiedades:

1. Si $P(x; y) \in IC \Rightarrow x > 0 ; y > 0$
   Si $P(x; y) \in IIIC \Rightarrow x < 0 ; y < 0$
   Si $P(x; y) \in IIC \Rightarrow x < 0 ; y > 0$
   Si $P(x; y) \in IVC \Rightarrow x > 0 ; y < 0$

2. A la distancia de un punto del plano cartesiano al origen se le llama **radio vector** (r) y se le considera siempre de signo positivo.

   En la figura el radio vector del punto Q viene a ser la longitud del segmento OQ.

   Sea: OQ = r entonces de acuerdo al teorema de Pitágoras se cumple: $r^2 = x^2 + y^2$ pero como r es positivo (definición) entonces:



$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

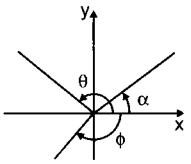
Ejemplo:

Hallar el radio vector en cada caso:

- P(3; 4) $\quad r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$
- Q(−1; 3) $\quad r = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \Rightarrow r = \sqrt{10}$
- $T(-\sqrt{3}; -\sqrt{15}) \quad r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{15})^2} = \sqrt{18}$
  $\Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

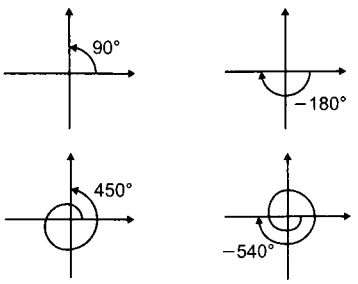
Se denomina de esta manera a aquellos ángulos trigonométricos cuyo lado inicial pertenece al semieje positivo de abscisas y su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares (su lado final se encuentra en cualquier parte del plano). En la figura adjunta α, θ y ϕ son ángulos que están en posición normal (también se dice que están en posición canónica).



ÁNGULOS CUADRANTALES

Son aquellos ángulos en posición normal cuyo lado final pertenece a alguno de los semiejes del sistema de coordenadas rectangulares.

En las figuras siguientes se muestran algunos ángulos cuadrantales (y su medida en el sistema sexagesimal).



El conjunto de ángulos cuadrantales se puede representar de la siguiente manera:

En el sistema sexagesimal:

Por extensión: $\{\ldots -180°; -90°; 0°; 90°; 180°; 270°; \ldots\}$

Por comprensión: $\{x/x = k(90°);\ k \in \mathbb{Z}\}$

En el sistema radial:

Por extensión: $\{\ldots; -\pi \text{ rad}; -\frac{\pi}{2} \text{ rad}; 0 \text{ rad}; \frac{\pi}{2} \text{ rad}; \pi \text{ rad}, \ldots\}$

Por comprensión $\{x/x = k(\frac{\pi}{2}\text{rad});\ k \in \mathbb{Z}\}$

Nota

Se deduce que para determinar si un ángulo es cuadrantal se debe dividir a dicho ángulo entre 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad (depende del sistema que se esté trabajando) y solo si el resultado es un número entero entonces será ángulo cuadrantal.

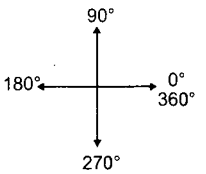
Ejemplo:

Si un ángulo mide 1080° ¿Es ángulo cuadrantal? La respuesta es sí porque 1080°/90° es igual a 12 (número entero).

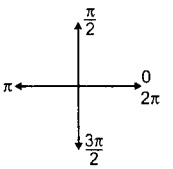
Y si un ángulo mide 2060° ¿Es ángulo cuadrantal? La respuesta es no porque 2060°/90° no da como resultado un número entero.

Es muy frecuente representar a los ángulos cuadrantales (de mayor uso) de la siguiente manera:

Sistema sexagesimal



Sistema radial



De estos gráficos podemos deducir que si θ es un ángulo positivo y menor de una vuelta:

Si $\theta \in$ IC $\Rightarrow$ $0° < \theta < 90°$ $\vee$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Si $\theta \in$ IIC $\Rightarrow$ $90° < \theta < 180°$ $\vee$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Si $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow$ $180° < \theta < 270°$ $\vee$ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

Si $\theta \in$ IVC $\Rightarrow$ $270° < \theta < 360°$ $\vee$ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Estas últimas relaciones son útiles para determinar a qué cuadrante pertenece un ángulo cualquiera.

Observaciones

1. Para determinar el cuadrante al que pertenece un ángulo se presentan tres casos.

   Caso I: Si el ángulo es positivo y menor de una vuelta.
   En este caso es muy fácil determinar a qué cuadrante pertenece un ángulo, por ejemplo:
   a) $\alpha = 85° \Rightarrow \alpha \in$ IC c) $\phi = 352° \Rightarrow \theta \in$ IVC
   b) $\theta = 122° \Rightarrow \theta \in$ IIC d) $\beta = 235° \Rightarrow \beta \in$ IIIC

   Caso II: Si el ángulo es positivo y mayor de una vuelta.
   En este caso se divide al ángulo entre 360°, luego se analiza el residuo de la división como en el caso anterior, por ejemplo:

   • 800° : 800° | 360° ⇒ residuo = 80°
   80° 2 80° ∈ IC ⇒ 800° ∈ IC

   • 1997° : 1997° | 360° ⇒ residuo = 197° ∈ IIIC
   197° 5 1997° ∈ IIIC

   Nota: El ángulo residuo determina el cuadrante del ángulo dado.

   Caso III: Si el ángulo es negativo.
   En este caso una forma de trabajar es sumando 360° al ángulo o al residuo depende del caso, por ejemplo:

   • −20°: −20° + 360° = 340° ∈ IVC ⇒ −20° ∈ IVC
   • −230°: −230° + 360° = 130° ∈ IIC ⇒ −230° ∈ IIC
   • −2400°: −2400° | 360° Observar que en este
   −240° −6 caso el cociente y el residuo son negativos.

$\Rightarrow -240° + 360° = 120° \in \text{IIC} \Rightarrow -240° \in \text{IIC}$

• $-1850 : -1850° \,\underline{|\,360°}$ $\quad -50° + 360° = 310° \in \text{IVC}$

$\quad -50° \quad -5 \quad \Rightarrow -1850° \in \text{IVC}$

2. En caso de que los ángulos están en el sistema radial se procede de la siguiente manera:

Caso I: Si el ángulo es positivo y menor de una vuelta.

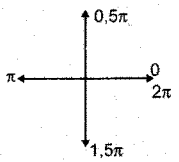
Sea θ el ángulo, luego si:

$0 < \theta < 0{,}5\pi \Rightarrow \theta \in \text{IC}$

$0{,}5 < \theta < 1\pi \Rightarrow \theta \in \text{IIC}$

$1\pi < \theta < 1{,}5\pi \Rightarrow \theta \in \text{IIIC}$

$1{,}5\pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \theta \in \text{IVC}$



Por ejemplo:

• $\frac{2\pi}{5}$ rad $= 0{,}4\pi$ rad $\in$ IC

• $\frac{6\pi}{7}$ rad $= 0{,}8\pi$ rad $\in$ IIC

Caso II: Si el ángulo es positivo y mayor de una vuelta.

• $\frac{11\pi}{5}$ rad: $\frac{11\pi}{5} \,\underline{|\,\frac{10\pi}{5}}$ residuo $= \frac{\pi}{5} = 0{,}2\pi \in \text{IC}$

$\frac{\pi}{5} \,|\, 1 \quad \Rightarrow \frac{11\pi}{5}$ rad $\in$ IC

• $\frac{341\pi}{8}$ rad: $\frac{341\pi}{8} \,\underline{|\,\frac{16\pi}{8}}$ residuo $= \frac{5\pi}{8} \approx 0{,}62\pi \in \text{IIC}$

$\frac{5\pi}{8} \,|\, 21 \quad \Rightarrow \frac{341\pi}{8}$ rad $\in$ IIC

• $\frac{147\pi}{13}$ rad: $\frac{147\pi}{13} \,\underline{|\,\frac{26\pi}{13}}$ residuo $= \frac{17\pi}{13} = 1{,}3\pi \in \text{IIIC}$

$\frac{17\pi}{13} \,|\, 5 \quad \Rightarrow \frac{147\pi}{13}$ rad $\in$ IIIC

• $\frac{225\pi}{4}$ rad: $\frac{225\pi}{4} \,\underline{|\,\frac{8\pi}{4}}$ residuo $= \frac{\pi}{4} = 0{,}25\pi \in \text{IC}$

$\frac{\pi}{4} \,|\, 28 \quad \Rightarrow \frac{225\pi}{4}$ rad $\in$ IC

Caso III: Si él ángulo es negativo.

• $-\frac{2\pi}{3}$ rad: En este caso se le suma 2π rad y luego se procede como en el caso I.

$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} = 1{,}3\pi \in \text{IIIC} \Rightarrow -\frac{2\pi}{3}$ rad $\in$ IIIC

• $-\frac{8\pi}{7}$ rad: $-\frac{8\pi}{7} + 2\pi = \frac{6\pi}{7} = 0{,}8\pi \in \text{IIC} \Rightarrow \frac{-8\pi}{7}$ rad $\in$ IIC

• $\frac{-225\pi}{4}$ rad: En este caso se divide entre 2π rad, el cociente y el residuo son negativos luego con el residuo se procede como en el caso I.

$-\frac{225\pi}{4} \,\underline{|\,\frac{8\pi}{4}}$ residuo $= -\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{4} \,|\, -28 \quad -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} = 1{,}75\pi \in \text{IVC}$

$\Rightarrow -\frac{225\pi}{4}$ rad $\in$ IVC

• $-\frac{17\pi}{3}$ rad

$-\frac{17\pi}{3} \,\underline{|\,\frac{6\pi}{3}}$ residuo $= -\frac{5\pi}{3}$

$-\frac{5\pi}{3} \,|\, -2 \quad = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} = 0{,}3\pi \in \text{IC}$

$\Rightarrow -\frac{17\pi}{3}$ rad $\in$ IC

REPRESENTACIÓN PARTICULAR DE LOS ÁNGULOS CUADRANTALES

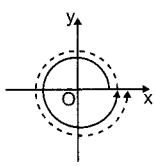
El análisis que se va a realizar se efectuará en el sistema radial por ser lo más frecuente.

Sabemos que el conjunto de los ángulos cuadrantales en dicho sistema se presenta mediante la expresión:

$$\frac{K\pi}{2} \text{rad}, \ K \in \mathbb{Z}.$$

Pero de acuerdo a la posición que tienen se les puede representar en forma particular.

a) Los ángulos cuadrantales cuyo lado final pertenece al semieje positivo de abscisas, son (como se indica en el gráfico) $\{...-6\pi; -4\pi; -2\pi; 0{,}2\pi; 4\pi; ...\}$

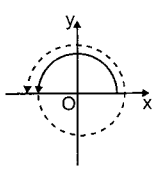


Observa que todos son: (número pares) π

Su representación es:

$\boxed{2k\,\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$

b) Los ángulos cuadrantales cuyo lado final pertenece al semieje negativo de abscisas, son (como se indica en el gráfico) $\{... -3\pi; -\pi; \pi; 3\pi; 5\,\pi; ...\}$



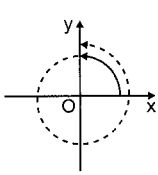
Observa que todos son: (números impares) π

Su representación es:

$\boxed{(2k + 1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}.}$

c) Los ángulos cuadrantales cuyo lado final pertenece al semieje positivo de ordenadas, son:

$$\left\{... -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} ...\right\}$$



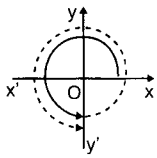
Observa que los números $-7, -3, 1, 5$ ... son múltiplos de 4 más 1.

Se representan:

$\boxed{\frac{(4k + 1)\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}}$

d) Los ángulos cuadrantales cuyo lado final pertenece al semieje negativo de ordenadas son:

$\left\{\ldots; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \ldots\right\}$



Observa que los números $-5, -1, 3, 7, \ldots$ son múltiplos de 4 más 3.
Se representan:

$$\boxed{\frac{(4k+3)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplos:

Determinar a cual semieje pertenece el lado final de cada uno de los siguientes ángulos cuadrantales:

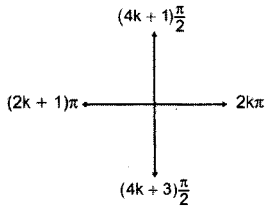
a)	15π rad	15 es impar	$\overrightarrow{Ox'}$
b)	$\frac{25\pi}{2}$ rad	25 es $\overset{\circ}{4}+1$	$\overrightarrow{Oy}$
c)	$\frac{39\pi}{2}$ rad	39 es $\overset{\circ}{4}+3$	$\overrightarrow{Oy'}$
d)	-28π rad	-28 es par	$\overrightarrow{Ox}$
e)	$\frac{-23\pi}{2}$ rad	-23 es $\overset{\circ}{4}+1$	$\overrightarrow{Oy}$

Nota

$4k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ equivale a decir $\overset{\circ}{4}$ (múltiplo de 4) más 1.

Observaciones

En forma general la ubicación de un ángulo (en el sistema radial) se determina así: ($k \in \mathbb{Z}$)



$\theta \in IC \leftrightarrow 2k\pi < \theta < (4k+1)\pi/2$

$\theta \in IIC \leftrightarrow (4k+1)\frac{\pi}{2} < \theta < (2k+1)\pi$

$\theta \in IIIC \leftrightarrow (2k+1)\pi < \theta < (4k+3)\frac{\pi}{2}$

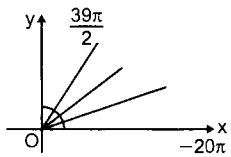
$\theta \in IVC \leftrightarrow (4k+3)\frac{\pi}{2} < \theta < (2k+2)\pi$

Ejemplos:

1. A qué cuadrante pertenecen α y θ si:

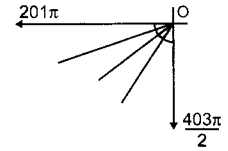
$-20\pi < \alpha < -\frac{39\pi}{2} \wedge 201\pi < \theta < \frac{403\pi}{2}$

Resolución:



$-20\pi \in \overrightarrow{Ox}$

$-\frac{39\pi}{2}$ es $(\overset{\circ}{4}+1)\frac{\pi}{2} \in \overrightarrow{Oy}$ $\therefore\ \alpha \in IC$



$201\pi \in \overrightarrow{Ox'}$

$\frac{403\pi}{2}$ es $(\overset{\circ}{4}+3)\frac{\pi}{2} \in \overrightarrow{Oy'}$ $\therefore\ \theta \in IIIC$

2. A que cuadrante pertenecen α, β, ϕ y θ:

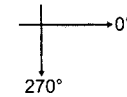
$1710° < \alpha < 1800°$; $1260° < \beta < 1350°$

$-180° < \phi < -90°$; $-1710° < \theta < -1620°$

Resolución:

En estos casos se divide al ángulo entre 360° y se toma de referencia el residuo.

$$\begin{array}{r|l} 1710° & 360° \\ \hline 270° & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1800° & 360° \\ \hline 0° & 5 \end{array}$$



$\Rightarrow 4 \times 360° + 270° < \alpha < 5 \times 360° \Rightarrow \alpha \in IVC$

Análogamente:

$1260° < \beta < 1350°$

$\Rightarrow 3 \times 360° + 180° < \beta < 3 \times 360° + 270°$

$\Rightarrow \beta \in IIIC$

En el caso de los negativos se le suma 360° a los extremos (o al residuo de la división para el otro caso). En forma práctica tenemos:

$-180° < \phi < -90° \Rightarrow$ sumar 360° a los extremos

$180° < \phi < 270° \Rightarrow \phi \in IIIC$

En el otro caso:

$$\begin{array}{r|l} -1710° & 360° \\ \hline -270° & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1620° & 360° \\ \hline -180° & -4 \end{array}$$

Es decir:

$-4 \times 360° - 270° < \theta < -4 \times 360° - 180°$

Sumamos 360° a los residuos:

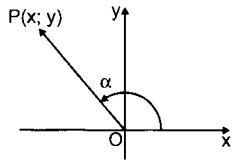
$90° < \theta < 180° \Rightarrow \theta \in IIC$

Nota

El lado final de los ángulos cuadrantales pertenece a los ejes coordenados y no a los cuadrantes, por esta razón también se les llama frontera cuadrantal o ángulos frontera.
Es incorrecto decir por ejemplo que $90° \in IC$ o que $90° \in IIC$.

RT DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Sea α un ángulo que está en posición normal, si P(x; y) es un punto que pertenece a su lado final entonces las razones trigonométricas de α se definen de las siguiente manera:



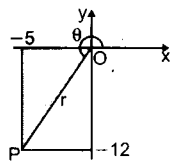
$\text{sen}\alpha = \dfrac{\text{ordenada de P}}{\text{radio vector}} = \dfrac{y}{r}$	$\cot\alpha = \dfrac{\text{abcisa de P}}{\text{ordenada de P}} = \dfrac{x}{y}$
$\cos\alpha = \dfrac{\text{abscisa de P}}{\text{radio de vector}} = \dfrac{x}{r}$	$\sec\alpha = \dfrac{\text{radio vector}}{\text{abscisa de P}} = \dfrac{r}{x}$
$\tan\alpha = \dfrac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \dfrac{y}{x}$	$\csc\alpha = \dfrac{\text{radio vector}}{\text{ordenada de P}} = \dfrac{r}{y}$

Ejemplo:

Sea θ un ángulo en posición normal tal que un punto de su lado final es $(-5; -12)$. Hallar las razones trigonométricas de θ.

Resolución:

Solo como referencia graficamos; observamos que:



$x = -5;\ y = -12$

con estos valores hallamos el radio vector:

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

Luego:

$\text{sen}\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-12}{13}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{5}{12}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-5}{13}$ $\qquad$ $\sec\theta = -\dfrac{13}{5}$

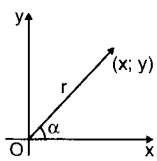
$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{12}{5}$ $\qquad$ $\csc\theta = -\dfrac{13}{12}$

Nota

Podemos observar del ejemplo anterior que las razones trigonométricas pueden ser positivas o negativas, esto se debe a que las razones trigonométricas dependen de la abscisa y la ordenada y estos valores pueden ser positivos o negativos. (No olvidar que el radio vector es positivo).

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Primer cuadrante

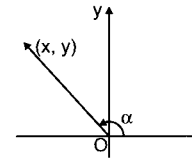


En este caso $x > 0$; $y > 0$

Entonces:

$\text{sen}\alpha$ es (+)	$\cot\alpha$ es (+)
$\cos\alpha$ es (+)	$\sec\alpha$ es (+)
$\tan\alpha$ es (+)	$\csc\alpha$ es (+)

Segundo cuadrante



En este caso $x < 0$; $y > 0$

Entonces:

$\text{sen}\alpha$ es (+)	$\cot\alpha$ es (−)
$\cos\alpha$ es (−)	$\sec\alpha$ es (−)
$\tan\alpha$ es (−)	$\csc\alpha$ es (+)

De la misma manera se puede analizar en el tercer y cuarto cuadrante, por facilidad se elabora el siguiente cuadro:

	IC	IIC	IIIC	IVC
$\text{sen}\alpha$ y $\csc\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$ y $\cot\alpha$	+	−	+	−

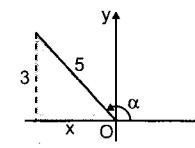
Aplicaciones:

1. Determinar a qué cuadrante pertenece α en cada caso:

   a) Si $\text{sen}\alpha < 0 \ \wedge\ \cos\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \text{IVC}$
   b) Si $\tan\alpha > 0 \ \wedge\ \csc\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \text{IIIC}$
   c) Si $\cot\alpha < 0 \ \wedge\ \sec\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \text{IVC}$

2. Si $\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{5} \wedge \alpha \in \text{IIC}$, hallar: $M = \sec\alpha + \tan\alpha$

   Resolución:



$\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{5} = \dfrac{y}{r}$

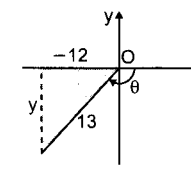
Sean: $y = 3 \ \wedge\ r = 5$

$\Rightarrow x = -\sqrt{r^2 - y^2} = -\sqrt{5^2 - 3^2} \Rightarrow x = -4$

$\therefore\ M = \sec\alpha + \tan\alpha = \dfrac{r}{x} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{-4} + \dfrac{3}{-4} = -2$

3. Si $\cos\theta = \dfrac{-12}{13} \wedge \theta \in \text{IIIC}$, hallar: $N = \csc\theta + \cot\theta$

   Resolución:



$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{12}{13}$

Elegimos: $x = -12 \ \wedge\ r = 13$

$\Rightarrow y = -\sqrt{r^2 - x^2} = -\sqrt{13^2 - (-12)^2} \Rightarrow y = -5$

$\therefore\ N = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{12}{5} = -\dfrac{1}{5}$

4. Si $\tan\phi = \frac{-2}{3}$, $\phi \in$ IVC, calcular: $\text{sen}\phi - \cos\phi$

Resolución:

$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3}$; como $\phi \in$ IVC elegimos:

$y = -2 \wedge x = 3$

Luego: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} \Rightarrow r = \sqrt{13}$

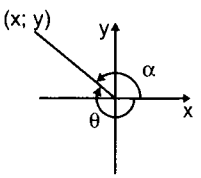
$\therefore \text{sen}\phi - \cos\phi = \frac{y}{r} - \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{-5}{\sqrt{13}} = \frac{-5\sqrt{13}}{13}$

Nota

Observa que no es necesario dibujar, solo hay que tener bien claro en qué cuadrante se está trabajando para determinar los signos de x e y.

RT DE ÁNGULOS COTERMINALES

Sabemos que los ángulos coterminales tienen los mismos elementos y que su diferencia es un número entero de vueltas. Si dichos ángulos están en posición normal (α y θ ver figura). Se cumple la siguiente propiedad: Las razones trigonométricas de dos o más ángulos coterminales son respectivamente iguales.



Es decir, guiándonos del gráfico adjunto podemos afirmar que:

$\text{sen}\alpha = \text{sen}\theta$	$\tan\alpha = \tan\theta$	$\sec\alpha = \sec\theta$
$\cos\alpha = \cos\theta$	$\cot\alpha = \cot\theta$	$\csc\alpha = \csc\theta$

Por ejemplo: 20° y 380° son ángulos coterminales entonces: sen20° = sen380°; cos20° = cos380°; .... de igual manera 100° y −260° son ángulos coterminales entonces:
sen100° = sen(−260°); cos100° = cos(−260°); ...

Sabemos que todos los ángulos coterminales con α se representan así:

$$\boxed{\alpha + n(360°),\ n \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \alpha + m(2\pi),\ m \in \mathbb{Z}}$$

Entonces se cumple que:

$$\boxed{RT(\alpha) = RT[\alpha + n(360°)]} \quad \boxed{RT(\alpha) = RT[\alpha + m2\pi]}$$

Por ejemplo: sen20° = sen[20° + (n)360°]; $n \in \mathbb{Z}$

Es decir:

Si $n = 1 \Rightarrow$ sen20° = sen380°
Si $n = 2 \Rightarrow$ sen20° = sen740°
Si $n = 3 \Rightarrow$ sen20° = sen1100°
Si $n = -1 \Rightarrow$ sen20° = sen(−340°)

RT DE ÁNGULOS NEGATIVOS

En este punto vamos a comparar las razones trigonométricas de un ángulo α ($\alpha > 0$) con las razones trigonométricas de $-\alpha$. Para esto graficamos dichos ángulos en un mismo plano; en la figura adjunta se ha considerado que $\alpha \in$ IC por lo tanto $(-\alpha) \in$ IVC.

Sabemos que:

a) $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

De igual manera se deduce:

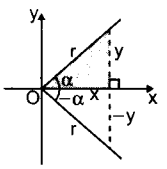
b) $\text{sen}(-\alpha) = \frac{-y}{r}$; $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r}$; $\tan(-\alpha) = \frac{-y}{x}$

Comparando (a) y (b) se deduce:

$\boxed{\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha}$

$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$

$\boxed{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha}$



En forma análoga se deduce:

$\boxed{\cot(-\alpha) = -\cot\alpha}$ $\boxed{\sec(-\alpha) = \sec\alpha}$

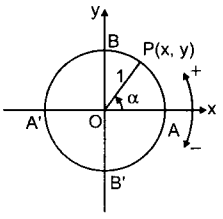
$\boxed{\csc(-\alpha) = -\csc\alpha}$

Ejemplos:

- $\text{sen}(-20°) = -\text{sen}20°$
- $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- $\cos(-10°) = \cos 10°$
- $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
- $\tan(-100°) = -\tan 100°$
- $\tan\left(-\frac{5\pi}{7}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{7}\right)$
- $\cot(-200°) = -\cot 200°$
- $\cos(a - b) = \cos(b - a)$
- $\sec(-2\alpha) = \sec 2\alpha$
- $\text{sen}(a - b) = -\text{sen}(b - a)$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Se denomina de esta manera a aquella circunferencia cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares y cuyo radio tiene como longitud la unidad. Sus elementos son:



- O(0; 0): origen
- A(1; 0): origen de arcos
- B(0; 1): origen de complementos
- A'(−1; 0): origen de suplementos
- B'(0; −1): sin nombre especial
- P: extremo del arco AP
- Ecuación de la circunferencia trigonométricas:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Tener en cuenta que si giramos en sentido antihorario los ángulos (arcos) son positivos y negativos en caso contrario. Podemos observar que un ángulo α determina un único punto P en la circunferencia trigonométrica, si dicho punto tiene coordenadas (x; y) entonces definimos las razones trigonométricas de α, de la siguiente manera:

$\text{sen}\alpha$ = ordenada de P = y	$\cot\alpha = \dfrac{\text{abscisa de P}}{\text{ordenada de P}} = \dfrac{x}{y}; y \neq 0$
$\cos\alpha$ = abscisa de P = x	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\text{abscisa de P}} = \dfrac{1}{x}; x \neq 0$
$\tan\alpha = \dfrac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \dfrac{y}{x} \neq 0$	$\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{ordenada de P}} = \dfrac{1}{y}; y \neq 0$

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

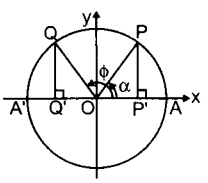
Como la circunferencia trigonométrica tiene de radio la unidad, las razones trigonométricas se pueden representar mediante segmentos de recta, a dichos segmentos (dirigidos) se les denomina líneas trigonométricas.

Línea seno

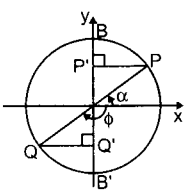
Es el segmento perpendicular trazado desde el extremo del arco al diámetro A'A.

Línea coseno

Es el segmento perpendicular trazado desde el extremo del arco al diámetro B'B.

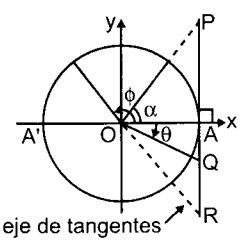


$\text{sen}\alpha$ = P'P
$\text{sen}\phi$ = Q'Q



$\cos\alpha$ = P'P
$\cos\phi$ = Q'Q

Línea tangente

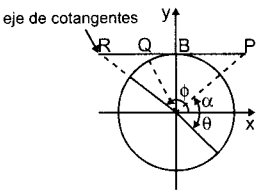


1. Por el origen de arcos trazamos una tangente geométrica. (eje de tangentes).
2. Prolongamos el radio que pasa por el extremo del arco hasta intersectar al eje de tangentes.
3. El segmento comprendido entre el origen de arcos y el punto de intersección es la línea tangente.

$\tan\alpha$ = AP; $\tan\theta$ = AQ; $\tan\phi$ = AR

Línea cotangente

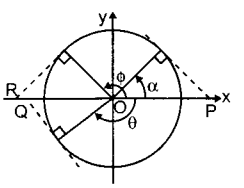
1. Por el origen de complementos trazamos una tangente geométrica (eje de cotangentes).
2. Prolongamos el radio que pasa por el extremo del arco hasta intersectar al eje de cotangentes.
3. El segmento comprendido entre el origen de complementos y el punto de intersección es la línea cotangente.



$\cot\alpha$ = BP
$\cot\theta$ = BQ
$\cot\phi$ = BR

Línea secante

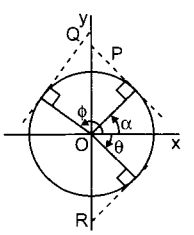
1. Trazamos una tangente geométrica por el extremo del arco hasta intersectar al eje X.
2. El segmento comprendido entre el origen de coordenadas y el punto de intersección es la línea secante.



$\sec\alpha$ = OP
$\sec\phi$ = OR
$\sec\theta$ = OQ

Línea cosecante

1. Trazamos una tangente geométrica por el extremo del arco hasta intersectar al eje Y.
2. El segmento comprendido entre el origen de coordenadas y el punto de intersección es la línea cosecante.

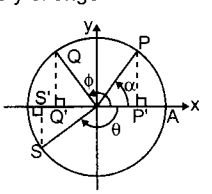


$\csc\alpha$ = OP
$\csc\phi$ = OR
$\csc\theta$ = OQ

LÍNEAS AUXILIARES

Línea verso

Es el segmento comprendido entre el pie de la línea seno y el origen de arcos.

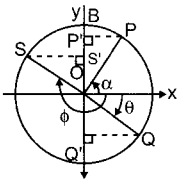


$\text{vers}\alpha$ = P'A
$\text{vers}\phi$ = Q'A
$\text{vers}\theta$ = S'A

$\boxed{\text{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha}$

Línea coverso

Es el segmento comprendido entre el pie de la línea coseno y el origen de complementos.

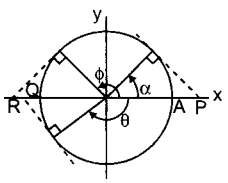


$\text{cov}\alpha = P'B$
$\text{cov}\theta = Q'B$
$\text{cov}\phi = S'B$

$\boxed{\text{cov}\alpha = 1 - \text{sen}\alpha}$

Línea exsecante

Es el segmento comprendido entre el origen de arcos y el extremo de la línea secante.

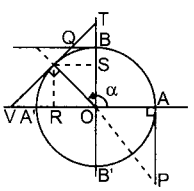


$\text{exsec}\alpha = AP$
$\text{exsec}\phi = AQ$
$\text{exsec}\theta = AR$

$\boxed{\text{exsec}\alpha = \sec\alpha - 1}$

Ejemplo:

De acuerdo a la figura adjunta, determinar a qué razones trigonométricas de α representan los segmentos:



- OR
- OT
- OV
- OS
- AP
- BQ

Resolución:

- $OR = \cos\alpha$
- $OS = \text{sen}\alpha$
- $OV = \sec\alpha$
- $OT = \csc\alpha$
- $AP = \tan\alpha$
- $BQ = \cot\alpha$

RT DE LOS PRINCIPALES ÁNGULOS CUADRANTALES

AC / FT	0°	90°	180°	270°	360°
	$2k\pi$	$(4k+1)\frac{\pi}{2}$	$(2k+1)\pi$	$(4k+3)\frac{\pi}{2}$	$(2k+2)\pi$
sen	0	1	0	−1	0
cos	−1	0	−1	0	1
tan	0	∄	0	∄	0
cot	∄	0	∄	0	∄
sec	1	∄	−1	∄	1
csc	∄	1	∄	−1	∄

Ejemplos:

1. Sabiendo que: $F(x) = \text{sen}\frac{x}{2} + \cot\frac{3x}{4} + \sec x$

   calcular: $F(\pi) + F(2\pi)$

   Resolución:

   $F(\pi) = \text{sen}\frac{\pi}{2} + \cot\frac{3\pi}{4} + \sec\pi = 1 + (-1) + (-1) = -1$

   $F(2\pi) = \text{sen}\frac{2\pi}{2} + \cot\frac{3(2\pi)}{4} + \sec(2\pi)$

   $F(2\pi) = \text{sen}\pi + \cot\frac{3\pi}{2} + \sec(2\pi) = 0 + 0 + (1) = 1$

   Sumando: $F(\pi) + F(2\pi) = (-1) + 1 = 0$

2. Calcular:

   $M = \cos 900° + \text{sen}2790°$

   Resolución:

   $\begin{array}{r|l} 900° & 360° \\ 180° & 2 \end{array} \Rightarrow \cos 900° = \cos 180° = -1$

   $\begin{array}{r|l} 2790° & 360° \\ -270° & 7 \end{array} \Rightarrow \text{sen}2790° = \text{sen}270° = -1$

   $\therefore M = (-1) + (-1) = -2$

CUADRO DE VARIACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

	I	II	III	IV
$\text{sen}\alpha$	↗	↘	↘	↗
$\cos\alpha$	↘	↘	↗	↗
$\tan\alpha$	↗	↗	↗	↗
$\cot\alpha$	↘	↘	↘	↘
$\sec\alpha$	↗	↗	↘	↘
$\csc\alpha$	↘	↗	↗	↘

↗: Significa que la RT crece

↘: Significa que la RT decrece

Nota

Por convención la variación de las razones trigonométricas se analiza suponiendo una rotación en sentido antihorario.

EXTENSIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Basados en la variación de las líneas trigonométricas podemos afirmar que:

$-1 \le \text{sen}\alpha \le 1$	$-\infty < \cot\alpha < +\infty$
$-1 \le \cos\alpha \le 1$	$-\infty < \sec\alpha \le -1 \wedge 1 \le \sec\alpha < +\infty$
$-\infty < \tan\alpha < +\infty$	$-\infty < \csc\alpha \le -1 \wedge 1 \le \csc\alpha < +\infty$

Observaciones

Es muy frecuente analizar la variación de las razones trigonométricas en valor absoluto lo cual lleva a elaborar el siguiente cuadro:

	senα	cosα	tanα	cotα	secα	cscα
I	C	D	C	D	C	D
II	D	C	D	C	D	C
III	C	D	C	D	C	D
IV	D	C	D	C	D	C

C: significa que la RT crece en valor absoluto.
D: significa que la RT decrece en valor absoluto.

Aplicaciones:

1. Para qué cuadrante(s) se cumple que: $\tan x(\operatorname{sen} x - 1) > 0$

Resolución:

$-1 < \operatorname{sen} x < 1 \Rightarrow -2 < \operatorname{sen} x - 1 < 0$

$\Rightarrow \tan x\,(\operatorname{sen} x - 1) > 0$

Para que el producto sea positivo:

$\Rightarrow \tan x < 0 \Rightarrow x \in \text{IIC} \vee \text{IVC}$

2. Si $\alpha \in$ IIC; $\theta \in$ IIIC $\wedge$ $\phi \in$ IVC, determinar el signo de:

$$R = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi}{\cos\phi - \cos\theta} \qquad U = \frac{\tan\phi + \tan\alpha}{\sec\alpha - \cot\theta}$$

$$E = \frac{\sec\alpha + \csc\alpha}{\sec\theta + \sec\alpha} \qquad N = \frac{\csc\phi + \csc\alpha}{\cos\phi - \cos\theta}$$

$$B = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{\sec\alpha\sec\theta\sec\phi}$$

Resolución:

Analizamos solo lo signos:

$$R = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi}{\cos\phi - \cos\theta} = \frac{(+)-(-)}{(+)-(-)} = \frac{+}{+} = (+)$$

$\Rightarrow$ R es positivo

$$U = \frac{\tan\phi + \tan\alpha}{\sec\alpha - \cot\theta} = \frac{(-)+(-)}{(-)-(+)} = \frac{-}{-} = (+)$$

$\Rightarrow$ U es positivo

$$B = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{\sec\alpha\sec\theta\sec\phi} = \frac{(+)(-)(-)}{(-)(-)(+)} = \frac{+}{+} = (+)$$

$\Rightarrow$ B es positivo

$$E = \frac{\sec\phi + \csc\alpha}{\sec\theta + \sec\alpha} = \frac{(+)+(+)}{(-)+(-)} = \frac{+}{-}$$

$\Rightarrow$ E es negativo

$$N = \frac{\csc\phi - \csc\alpha}{\cos\phi - \cos\theta} = \frac{(-)-(+)}{(+)-(-)} = \frac{-}{+} = (-)$$

$\Rightarrow$ N es negativo

3. Determinar el signo de: (cosx − cscx). En cada cuadrante.

Resolución:

- Si $x \in$ IC $\Rightarrow$ (cosx − cscx) es negativo (porque: cscx > cosx).
- Si $x \in$ IIC $\Rightarrow$ (cosx − cscx) es negativo (porque: cosx < 0 y cscx > 1).
- Si $x \in$ IIIC $\Rightarrow$ (cosx − cscx) es positivo (porque: cscx es negativo).
- Si $x \in$ IVC $\Rightarrow$ (cosx − cscx) es positivo (porque: cscx es negativo).

4. Si $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$, determinar el signo de:

$$R = \frac{\sec\left(\frac{x}{3}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\cot\left(\frac{x}{4}\right)\operatorname{sen}2x}$$

Resolución:

$x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Entonces:

$\frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right) \in \text{IIC}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{3} < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left(\frac{x}{3}\right) \in \text{IIC}$

$\frac{3\pi}{8} < \frac{x}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right) \in \text{IC}$

$3\pi < 2x < 4\pi \Rightarrow (2x) \in \text{IIIC} \vee \text{IVC}$

Analizamos los signos:

$R = \frac{(-)(-)}{(+)(-)} = -$ $\quad\therefore$ R es negativo

5. Si α y ϕ son ángulos positivos menores de una vuelta tal que $\alpha \in$ IVC y $\phi \in$ IIC, a qué cuadrante pertenece:

$$\frac{2\alpha - 3\phi}{5}$$

Resolución:

Como α y ϕ son positivos y menores de una vuelta, entonces:

Dato:

$\alpha \in \text{IVC} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow 3\pi < 2\alpha < 4\pi$

$\phi \in \text{IIC} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \phi < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 3\phi < 3\pi$

$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} > -3\phi > -3\pi$

Luego: $3\pi < 2\alpha < 4\pi \;\wedge\; -3\pi < -3\phi < -\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < 2\alpha - 3\phi < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{2\alpha - 3\phi}{5} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \left(\frac{2\alpha - 3\phi}{5}\right) \in \text{IC}$

6. Qué razones trigonométricas decrecen en valor relativo en el segundo cuadrante y crecen en valor absoluto en el tercer cuadrante a medida que el ángulo crece.

Resolución:

- En valor relativo decrecen en el IIC: seno, coseno y cotangente.
- De esas 3 razones trigonométricas.
- En valor absoluto crecen en el IIIC: solo la razón seno.

7. Qué se puede afirmar acerca de las razones: coseno, cotangente, cosecante en el IVC, cuando el ángulo crece.

Resolución:

	cosx	cotx	cscx
El valor relativo:	↗	↘	↘
En valor absoluto:	C	C	C

En el IV cuadrante

∴ Crece en valor absoluto.

8. Cuál(es) de las siguientes proposiciones son correctas acerca de la variación de la razón secante en el IIC.

I. Aumenta en valor relativo.
II. Crece en valor absoluto.
III. Decrece en valor absoluto.
IV. Decrece en valor relativo.

Resolución:

Analizamos la variación de la línea secante en el IIC; crece en valor relativo y decrece en valor absoluto.

∴ Son correctas I y IV.

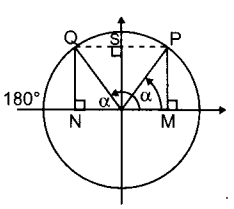
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE LA FORMA: $(n\pi \pm \alpha) \vee [n(180°) \pm \alpha]$, $n \in \mathbb{Z}$

Casos particulares

Las razones trigonométricas de ángulos de la forma: $\pi \pm \alpha \vee 180° \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha \vee 360° \pm \alpha$ se pueden expresar en términos de alguna razón trigonométrica de α debido a que tienen cierta relación (por esta razón en otros textos se les llama ángulos relacionados), para su análisis se usarán la circunferencia trigonométrica y las líneas trigonométricas.

Analizaremos solo algunos casos y luego se dará una conclusión.

En la figura adjunta se tienen los ángulos α y $180° - \alpha$.



Se observa que: $MP = \text{sen}\alpha$ y $NQ = \text{sen}(180° - \alpha)$

Además: $MP = NQ$

* Entonces: $\boxed{\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha}$

También se observa que:

$SP = \cos\alpha$ y $SQ = \cos(180° - \alpha)$

Además: $SQ = -SP$

* Entonces: $\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha}$

De igual manera se pueden analizar los demás casos y llegar a una conclusión.

Conclusión:

$RT(180° \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$ $RT(360° \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$	$RT(\pi \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$ $RT(2\pi \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$

La simplificación o reducción de expresiones de este tipo como se puede observar queda afectado de un signo que depende de la RT inicial y del cuadrante al que pertenece el ángulo inicial, considerando que α es agudo.

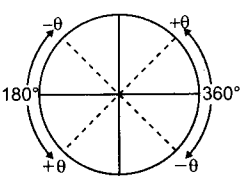
Ejemplos:

1. Si queremos reducir o simplificar $\text{sen}(180° + \alpha)$
   1.° Suponemos que α es agudo.
   2.° Observemos que el ángulo inicial: $(180° + \alpha) \in$ IIIC
   3.° La RT Inicial (seno) es negativo en dicho cuadrante.
   4.° Conclusión: $\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}\alpha$ (observa que la RT no cambia)

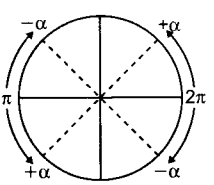
2. $\cos(360° - \theta)$
   1.° Suponemos que θ es agudo.
   2.° El ángulo inicial: $(360° - \theta) \in$ IVC
   3.° El coseno en dicho cuadrante es positivo.
   4.° Conclusión: $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

   Entonces para simplificar este tipo de expresiones es importante ubicar el cuadrante y recordar los signos de las RT en cada cuadrante.

3.



$(180° - \theta) \in$ IIC $(360° - \theta) \in$ IVC
$(180° + \theta) \in$ IIIC $(360° + \theta) \in$ IC



$(\pi - \alpha) \in$ IIC $(2\pi - \alpha) \in$ IVC
$(2\pi + \alpha) \in$ IC $(\pi + \alpha) \in$ IIIC

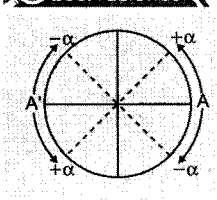
(no olvidar que α y θ son agudos).

Caso general ($\forall n \in \mathbb{Z}$)

$\boxed{RT[n\,(180°) \pm \alpha] = \pm RT(\alpha)}$ $\boxed{RT(n\pi \pm \alpha) = \pm\, RT(\alpha)}$

En estos casos el método para reducir estas expresiones es similar al anterior, solo que ahora debemos saber ubicar: $n\pi \vee n180°$ para luego girar en sentido positivo o negativos según indique el problema.

Observaciones



- Si n es impar:
  $\Rightarrow n\pi \vee n(180°)$
  Se encuentra en la posición (A')
- Si n es par:
  $\Rightarrow n\pi \vee n(180°)$
  Se encuentra en la posición (A)

Por ejemplo, considerando que α es agudo.
$(3\pi + \alpha) \in$ IIIC ya que 3π está en (A') y como dice $(+\alpha)$ se gira en sentido horario, lo que nos lleva al tercer cuadrante. De igual manera se puede afirmar que:

- $(5\pi - \alpha) \in$ IIC
- $(720° - \alpha) \in$ IVC
- $(-6\pi + \alpha) \in$ IC
- $(7\pi + \alpha) \in$ IIIC
- $(1080° + \alpha) \in$ IC
- $(8\pi + \alpha) \in$ IC
- $(4\pi + \alpha) \in$ IC
- $(540° + \alpha) \in$ IIIC
- $(-3\pi - \alpha) \in$ IIC

Nota

Es importante entender que para simplificar estos casos se considera al ángulo α agudo, pero que no necesariamente tiene que serlo, de igual manera ocurre si dice $\pi + 2\alpha \vee 180° + 3\alpha \vee 360° - \frac{\alpha}{4}$

Por ejemplo:

- $\cos\left(360° - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$
- $\cos(180° + 3\alpha) = -\cos 3\alpha$

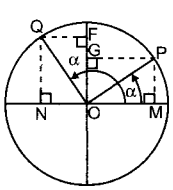
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE LA FORMA: $\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right] \vee [(2n+1)(90°) \pm \alpha]$; $n \in \mathbb{Z}$

Casos particulares

De Igual manera que en el caso anterior, primero se analizan los casos donde aparecen:

$$90° \pm \alpha;\ 270° \pm \alpha;\ \frac{\pi}{2} \pm \alpha;\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$$

Por ejemplo, en la figura adjunta se tienen los ángulos α y $90° + \alpha$.



Observa que: $MP = \text{sen}\alpha$ y $FQ = \cos(90° + \alpha)$
Además: $FQ = -MP$

Entonces $\boxed{\cos(90° + \alpha) = -\text{sen}\alpha}$

También se observa: $GP = \cos\alpha$ y $NQ = \text{sen}(90° + \alpha)$
Además: $NQ = GP$

Entonces: $\boxed{\text{sen}(90° + \alpha) = \cos\alpha}$

De igual manera se pueden analizar los demás casos y llegar a la siguiente conclusión.

$RT(90° \pm \alpha) = \pm CO - RT(\alpha)$	$RT\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm CO - RT(\alpha)$
$RT(270° \pm \alpha) = \pm CO - RT(\alpha)$	$RT\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm CO - RT(\alpha)$

En estos casos se observa que la razón trigonométrica inicial cambia por su co−razón trigonométrica y el signo depende del cuadrante al que pertenece el ángulo inicial y de la razón trigonométrica inicial. (No olvidar que se considera a α agudo).

Ejemplos:

1. Si queremos reducir: $\cos(90° + \alpha)$
   1.° Suponemos que α es agudo
   2.° Ángulo inicial: $(90° + \alpha) \in$ IIC
   3.° La RT inicial (coseno) en dicho cuadrante es negativo.
   4.° La RT (coseno) cambia por su CO−RT (seno)
   5.° Conclusión:

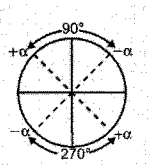
   $$\boxed{\cos(90° + \alpha) = -\text{sen}\alpha}$$

2. $\text{sen}(270° + \theta)$
   1.° Suponemos que θ es agudo
   2.° Ángulo inicial: $(270° + \theta) \in$ IVC
   3.° La razón (seno) en dicho cuadrante es negativa.
   4.° Se cambia el (seno) por el (coseno)
   5.° Conclusión:

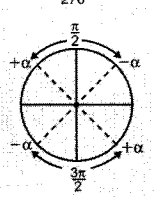
   $$\boxed{\text{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta}$$

Observaciones

- $90° - \alpha \in$ IC
- $90° + \alpha \in$ IIC
- $270° - \alpha \in$ IIIC
- $270° + \alpha \in$ IVC



- $(\pi/2) - \alpha \in$ IC
- $(\pi/2) + \alpha \in$ IIC
- $(3\pi/2) - \alpha \in$ IIIC
- $(3\pi/2) + \alpha \in$ IVC



Ejemplos:

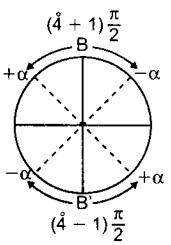
Comprobar cada una de las siguientes igualdades:

- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
- $\tan(90° + \alpha) = \cot\alpha$
- $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$
- $\csc(270° + 2\alpha) = -\sec 2\alpha$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$
- $\text{sen}(90° - 3\alpha) = \cos 3\alpha$
- $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\csc\alpha$
- $\cos(270° + \alpha) = \text{sen}\alpha$

Caso general

$$\boxed{RT[(2n + 1)\tfrac{\pi}{2} \pm \alpha] = \pm CO - RT(\alpha)}$$

$$\boxed{RT[(2n + 1)(90°) \pm \alpha] = \pm CO - RT(\alpha)}$$



Recordar que en la posición B (ver figura) están todos los ángulos cuadrantes de la forma:

$(4n + 1)\frac{\pi}{2}$; $(4n + 1)$ es múltiplo de 4 más 1.

En la posición B' están todos los ángulos cuadrantales de la forma: $(4n - 1)\frac{\pi}{2}$; $(4n - 1)$ es múltiplo de 4 menos 1.

Ejemplos:

- $\frac{5\pi}{2}$ está en B porque $5 = \mathring{4} + 1$.
- $\frac{11\pi}{2}$ está en B' porque $11 = \mathring{4} - 1$

  Esto nos lleva fácilmente a determinar el cuadrante en cada uno de los siguientes casos.
- $\frac{7\pi}{2} + \alpha$: como $7 = \mathring{4} - 1$ entonces $\frac{7\pi}{2}$ está en B' luego $\frac{7\pi}{2} + \alpha$ estará en el IVC.
- $\frac{17\pi}{2} - \alpha$: como $17 = \mathring{4} + 1$ entonces $\frac{17\pi}{2}$ está en B luego como dice $(-\alpha)$ giramos en sentido horario lo cual nos lleva al IC.

De igual manera usted puede comprobar:

- $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right) \in \text{IIIC} \Rightarrow (7 \text{ es } \mathring{4} - 1)\text{B}'$
- $\left(\frac{25\pi}{2}+\alpha\right) \in \text{IIC} \Rightarrow (25 \text{ es } \mathring{4} + 1)\text{B}$
- $\left(\frac{317\pi}{2}-\alpha\right) \in \text{IC} \Rightarrow (317 \text{ es } \mathring{4} + 1)\text{B}$
- $\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) \in \text{IIC} \Rightarrow (-7 \text{ es } \mathring{4} + 1)\text{B}$
- $\left(-\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) \in \text{IIIC} \Rightarrow (-5 \text{ es } \mathring{4} - 1)\text{B}'$
- $\left(\frac{129\pi}{2}-\alpha\right) \in \text{IC} \Rightarrow (129 \text{ es } \mathring{4} + 1)\text{B}$

Nota

Recuerde que solo es cuestión de saber si el número que multiplica a $\frac{\pi}{2}$ es $(\mathring{4} + 1) \vee (\mathring{4} - 1)$ y luego girar en el sentido que se indica $(+\alpha) \vee (-\alpha)$. Luego colocar el signo correcto y cambiar la razón trigonométrica por su co-razón trigonométrica.

Aplicaciones:

1. Simplificar:

$$R = \frac{\tan(\pi + x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sec(2\pi - x)}{\cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\text{sen}(2\pi - x)\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

Resolución:

- $\tan(\pi + x) = \tan x$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}x$
- $\sec(2\pi - x) = \sec x$
- $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\tan x$
- $\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}x$
- $\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec x$

$$R = \frac{(\tan x)(-\text{sen}x)(\sec x)}{(-\tan x)(-\text{sen}x)(\sec x)} \qquad \therefore R = -1$$

2. Simplificar: $R = \dfrac{\text{vers}(\pi + \alpha) + \text{cov}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\text{vers}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \text{cov}(\pi + \alpha)}$

Resolución:

$\text{vers}(\pi + \alpha) = 1 - \cos(\pi + \alpha) = 1 - (-\cos\alpha) = 1 + \cos\alpha$

$\text{cov}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \cos\alpha$

$\text{vers}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 1 - \text{sen}\alpha$

$\text{cov}(\pi + \alpha) = 1 - \text{sen}(\pi + \alpha) = 1 - (-\text{sen}\alpha)$

$\text{cov}(\pi + \alpha) = 1 + \text{sen}\alpha$

$$\Rightarrow R = \frac{1 + \cos\alpha + 1 - \cos\alpha}{1 - \text{sen}\alpha + (1 + \text{sen}\alpha)} \qquad \therefore R = 1$$

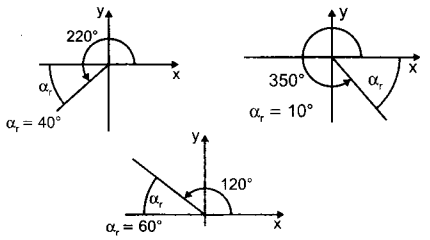
REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Las razones trigonométricas de todo ángulo se pueden expresar en términos de las razones trigonométricas de ángulos agudos. Un método es usar el ángulo de referencia.

Ángulo de referencia (α_r)

Se denomina de esta manera al ángulo agudo que forma el lado final de cualquier ángulo en posición normal con el eje de abscisas.

Ejemplo:



En el cuadro adjunto se muestra como determinar el ángulo de referencia considerando que α es positivo y menor de una vuelta.

α	ángulo de referencia	
	sist. sex.	sist. radial
I	α	α
II	$180° - \alpha$	$\pi - \alpha$
III	$\alpha - 180°$	$\alpha - \pi$
IV	$360° - \alpha$	$2\pi - \alpha$

Ejemplos:

- $150° \in$ IIC $\Rightarrow \alpha_r = 180° - 150° \Rightarrow \alpha_r = 30°$
- $245° \in$ IIIC $\Rightarrow \alpha_r = 245° - 180° \Rightarrow \alpha_r = 65°$
- $300° \in$ IVC $\Rightarrow \alpha_r = 360° - 300° \Rightarrow \alpha_r = 60°$
- $\frac{9\pi}{7}$ rad $\in$ IIIC $\Rightarrow \alpha_r = \frac{9\pi}{7} - \pi \Rightarrow \alpha_r = \frac{2\pi}{7}$ rad
- $\frac{13\pi}{7}$ rad $\in$ IVC $\Rightarrow \alpha_r = 2\pi - \frac{13\pi}{7} \Rightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{7}$ rad

Para determinar el ángulo de referencia en el caso de que el ángulo sea positivo y mayor de una vuelta, se le divide entre el equivalente de una vuela y se analiza el residuo.

Ejemplo:

2000°: Ubicamos a que cuadrante pertenece y luego hallamos su ángulo de referencia.

- $\begin{array}{r|l} 2000° & 360° \\ \hline 200° & 5 \end{array}$ $\Rightarrow 2000° \in$ IIIC $\Rightarrow \alpha_r = 200° - 180°$ $\Rightarrow \alpha_r = 20°$
- $\begin{array}{r|l} 3028° & 360° \\ \hline \Rightarrow 148° & 8 \end{array}$ $\Rightarrow 3028° \in$ IIC $\Rightarrow \alpha_r = 180° - 148°$ $\Rightarrow \alpha_r = 32°$
- $\begin{array}{r|l} \frac{235\pi}{7} & \frac{14\pi}{7} \\ \hline \frac{11\pi}{7} & 16 \end{array}$ $\Rightarrow \frac{235\pi}{7} \in$ IVC $\Rightarrow \alpha_r = 2\pi - \frac{11\pi}{7}$ $\Rightarrow \alpha_r = \frac{3\pi}{7}$
- $\begin{array}{r|l} \frac{5235\pi}{13} & \frac{26\pi}{13} \\ \hline \frac{9\pi}{13} & 201 \end{array}$ $\Rightarrow \frac{5235\pi}{13} \in$ IIC $\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{9\pi}{13}$ $\Rightarrow \alpha_r = \frac{4\pi}{13}$

Para determinar el ángulo de referencia en el caso de que el ángulo sea negativo una de las formas es sumándole 360° ∨ 2π rad ya sea al ángulo o al residuo de la división cuando el ángulo es más de una vuelta (en valor absoluto).

Aplicaciones:

Determinar el ángulo de referencia

- $-100° \Rightarrow -100° + 360° = 260° \in$ IIC
  $\Rightarrow \alpha_r = 260° - 180° \Rightarrow \alpha_r = 80°$
- $-300° \Rightarrow -300° + 360° = 60° \in$ IC
  como el ángulo es agudo $\Rightarrow \alpha_r = 60°$
- $-30° \Rightarrow -30° + 360° = 330°$
  $\Rightarrow \alpha_r = 360° - 330° \Rightarrow \alpha_r = 30°$
- $-220° \Rightarrow -220° + 360° = 140°$
  $\Rightarrow \alpha_r = 180° - 140° \Rightarrow \alpha_r = 40°$
- $-\frac{4\pi}{7}$ rad $\Rightarrow -\frac{4\pi}{7} + 2\pi = \frac{10\pi}{7} \in$ IIIC
  $\Rightarrow \alpha_r = \frac{10\pi}{7} - \pi \Rightarrow \alpha_r = \frac{3\pi}{7}$ rad
- $-\frac{15\pi}{13}$ rad $\Rightarrow -\frac{15\pi}{13} + 2\pi = \frac{11\pi}{13} \in$ IIC
  $\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{11\pi}{13} \Rightarrow \alpha_r = \frac{2\pi}{13}$
- $-2500°$
  $\begin{array}{r|l} -2500° & 360° \\ \hline -340° & -6 \end{array}$ $\Rightarrow -340° + 360° = 20°$ $\Rightarrow \alpha_r = 20°$
- $-6020°$
  $\begin{array}{r|l} -6020° & 360° \\ \hline -260° & -16 \end{array}$ $\Rightarrow -260° + 360° = 100° \in$ IIIC $\Rightarrow \alpha_r = 180° - 100° \Rightarrow \alpha_r = 80°$
- $-\frac{564\pi}{11}$ rad
  $\begin{array}{r|l} -\frac{564\pi}{11} & \frac{22\pi}{11} \\ \hline -\frac{14\pi}{11} & -25 \end{array}$ $\Rightarrow -\frac{14\pi}{11} + 2\pi = \frac{8\pi}{11} \in$ IIC $\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{8\pi}{11}$ rad $\Rightarrow \alpha_r = \frac{3\pi}{11}$ rad
- $-\frac{2793\pi}{17}$ rad
  $\begin{array}{r|l} -\frac{2793\pi}{17} & \frac{34\pi}{17} \\ \hline -\frac{5\pi}{17} & -82 \end{array}$ $\Rightarrow -\frac{5\pi}{17} + 2\pi = \frac{29\pi}{17} \in$ IVC $\Rightarrow \alpha_r = 2\pi - \frac{29\pi}{17}$ $\Rightarrow \alpha_r = \frac{5\pi}{17}$ rad

Hasta este momento lo único que se ha enseñado es a determinar el ángulo de referencia para cualquier ángulo. Ahora veamos la propiedad que nos permite reducir fácilmente al primer cuadrante.

Propiedad del ángulo de referencia

Las razones trigonométricas de todo ángulo son respectivamente iguales a (+) ∨ (−) las razones trigonométricas de su ángulo de referencia.

Ejemplos:

1. 100° su $\alpha_r = 80°$

   Entonces:

   sen100° = sen80° (positivo porque 100° $\in$ IIC)
   cos100° = −cos80° (negativo porque 100° $\in$ IIC)
   tan100° = −tan80° (negativo porque 100° $\in$ IIC)

2. $\cos 250° = -\cos 70°$
   $250° - 180° = \alpha_r = 70°$ (porque $250° \in$ IIIC y coseno es negativo).

Conclusión:
Para reducir al primer cuadrante por este método del ángulo de referencia se procede de la siguiente manera:

1.° Ubicamos el cuadrante del ángulo.
2.° Hallamos su ángulo de referencia.
3.° Determinar qué signo tiene la RT dada para el cuadrante hallado en (1°).
4.° Colocamos la misma RT pero ahora aplicada al ángulo de referencia y acompañado del signo determinado en (3°).

Ejemplos:

1. Reducir al IC $\cos 220°$.
   1.° $220° \in$ IIIC
   2.° $\alpha_r = 220° - 180° \Rightarrow \alpha_r = 40°$
   3.° Signo del coseno en el IIIC es: negativo
   4.° $\cos 220° = -\cos 40°$
2. Reducir al IC $\tan\left(\frac{30\pi}{19}\right)$
   1.° $\frac{30\pi}{19} \in$ IVC
   2.° $\alpha_r = 2\pi - \frac{30\pi}{19} \Rightarrow \alpha_r = \frac{8\pi}{19}$
   3.° $-\tan$ en IVC es negativo.
   4.° $\tan\left(\frac{30\pi}{19}\right) = -\tan\left(\frac{8\pi}{19}\right)$
3. Reducir al IC $\csc\left(\frac{8\pi}{13}\right)$
   1.° $\frac{8\pi}{13} \in$ II C
   2.° $\alpha_r = \pi - \frac{8\pi}{13}$
   3.° Signo: csc en el IIC es positivo.
   4.° $\csc\left(\frac{8\pi}{13}\right) = \csc\left(\frac{5\pi}{13}\right)$

Es importante recordar ahora la propiedad de los ángulos complementarios estudiado en el capítulo 2 (revisar si es necesario). Esta propiedad nos permite afirmar que cuando se reduce al IC se pueden hallar dos respuestas equivalentes.

Acabamos de ver que:
$\cos 220° = -\cos 40°$ pero por la propiedad de los ángulos complementarios $\cos 40° = \operatorname{sen} 50°$ entonces también es correcto: $\cos 220° = -\operatorname{sen} 50°$

Aplicaciones:

A continuación se dan una serie de ejemplos de reducción al primer cuadrante y se indican las dos respuestas en cada caso.

1. $\operatorname{sen} 3450°$

$$\begin{array}{r|l} 3450° & 360° \\ \cline{2-2} 210° & 9 \end{array}$$

   - $\operatorname{sen} 3450° = \operatorname{sen} 210°$; $210° \in$ IIIC
   - $\alpha_r = 210° - 180° = 30°$
     $\Rightarrow \operatorname{sen} 3450° = -\operatorname{sen} 30°$
   - También: $\operatorname{sen} 3450° = -\cos 60°$
2. $\cos 6145°$

$$\begin{array}{r|l} 6145° & 360° \\ \cline{2-2} 25° & 17 \end{array}$$

   - $\csc 6145° = \csc 25°$
   - También: $\csc 6145° = \sec 65°$
3. $\sec(-7437°)$

$$\begin{array}{r|l} -7437° & 360° \\ \cline{2-2} -237° & -20 \end{array}$$

   - $-237° + 360° = 123° \in$ IIC
     $\Rightarrow \alpha_r = 180° - 123° = 57°$
     $\Rightarrow \sec(-7437°) = -\sec 57°$
   - También: $\sec(-7437°) = -\csc 33°$
4. $\tan\left(\frac{335\pi}{8}\right)$

$$\begin{array}{r|l} \frac{335\pi}{8} & \frac{16\pi}{8} \\ \cline{2-2} \frac{15\pi}{8} & 20 \end{array}$$

   - $\frac{15\pi}{8} \in$ IVC
     $\Rightarrow \alpha_r = 2\pi - \frac{15\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \tan\left(\frac{335\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$
   - También: $\tan\left(\frac{335\pi}{8}\right) = -\cot\frac{3\pi}{8}$
5. $\cot\left(-\frac{223\pi}{13}\right)$

$$\begin{array}{r|l} -\frac{223\pi}{13} & \frac{26\pi}{13} \\ \cline{2-2} -\frac{15\pi}{13} & -8 \end{array}$$

   - $-\frac{15\pi}{13} + 2\pi = \frac{11\pi}{13} \in$ IIC
     $\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{11\pi}{13} = \frac{2\pi}{13}$
     $\Rightarrow \cot\left(-\frac{223\pi}{13}\right) = -\cot\left(\frac{2\pi}{13}\right)$
   - También: $\cot\left(-\frac{223\pi}{13}\right) = -\tan\left(\frac{9\pi}{26}\right)$

RT DE ÁNGULOS NOTABLES

Una aplicación muy frecuente de la reducción al primer cuadrante es el cálculo de los valores de las razones trigonométricas de ángulos relacionados con $30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$; $45°\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$; $60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$

Ejemplos:

- $\operatorname{sen} 135°$ $\Rightarrow \alpha_r = 180° - 135° = 45°$
  $\Rightarrow \operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}/2$
- $\cos 210°$ $\Rightarrow \alpha_r = 210° - 180° = 30°$
  $\Rightarrow \cos 210° = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$
- $\tan 300°$ $\Rightarrow \alpha_r = 360° - 300° = 60°$
  $\Rightarrow \tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$
- $\cot\frac{5\pi}{6}$ $\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$
  $\Rightarrow \cot\frac{5\pi}{6} = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

- $\sec\frac{7\pi}{4} \quad \Rightarrow \alpha_r = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow \sec\frac{7\pi}{4} = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

- $\csc\frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \alpha_r = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

  $\Rightarrow \csc\frac{4\pi}{3} = -\csc\frac{\pi}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

sist. sexag.	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
sist. radial	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
sen	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
cot	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Nota

Es frecuente también cuando se quiere reducir al primer cuadrante proceder de la siguiente manera: (Recordar: $RT(k\pi + \alpha) = RT(\alpha)$)

Ejemplos:

1. $\operatorname{sen}\left(\frac{897\pi}{14}\right)$

   Se divide:

   $$\begin{array}{r|l} 897 & 14 \\ 1 & 64 \end{array} \Rightarrow \frac{897\pi}{14} = 64\pi + \overbrace{\frac{1\pi}{14}}^{IC}$$

   $$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{897\pi}{14}\right) = \operatorname{sen}\left(64\pi + \frac{\pi}{14}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{14}$$

2. $\csc\left(\frac{578\pi}{7}\right)$

   $$\begin{array}{r|l} 578 & 7 \\ 4 & 82 \end{array} \Rightarrow \frac{578\pi}{7} = 82\pi + \overbrace{\frac{4\pi}{7}}^{IIC}$$

   $$\Rightarrow \csc\left(\frac{578\pi}{7}\right) = \csc\left(82\pi + \frac{4\pi}{7}\right) = \csc\frac{4\pi}{7}$$

   $$\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{4\pi}{7} = \frac{3\pi}{7}$$

   Luego: $\csc\left(\frac{578\pi}{7}\right) = \csc\frac{3\pi}{7}$

3. $\operatorname{sen}\left(\frac{4262\pi}{11}\right)$

   $$\begin{array}{r|l} 4262 & 11 \\ -5 & 387 \end{array} \Rightarrow \frac{4262\pi}{11} = 387\pi + \overbrace{\frac{5\pi}{11}}^{IC}$$

   $$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{4262\pi}{11}\right) = \operatorname{sen}\left(387\pi + \frac{5\pi}{11}\right) = -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{11}$$

4. $\sec\left(\frac{1584\pi}{13}\right)$

   $$\begin{array}{r|l} 1584 & 13 \\ 11 & 121 \end{array} \Rightarrow \frac{1584\pi}{13} = 121\pi + \overbrace{\frac{11\pi}{13}}^{IIC}$$

   $$\Rightarrow \sec\left(\frac{1584\pi}{13}\right) = \sec\left(121\pi + \frac{11\pi}{13}\right) = -\sec\frac{11\pi}{13}$$

   $$\Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{11\pi}{13} = \frac{2\pi}{13}$$

   Luego: $\sec\left(\frac{1584\pi}{13}\right) = -\left(-\sec\frac{2\pi}{13}\right) = \sec\left(\frac{2\pi}{13}\right)$

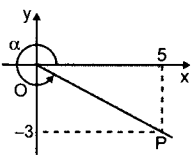
Aplicaciones:

1. Siendo P(5; −3) un punto del lado final del ángulo α que están en posición normal, hallar el valor de: $R = 17(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + \cot\alpha$

   Resolución:

   $OP = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2} \Rightarrow OP = \sqrt{34}$

   - $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}}$
   - $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$
   - $\cot\alpha = -5/3$



   $$R = 17\left(\frac{25}{34} - \frac{9}{34}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow R = \frac{19}{3}$$

2. Si: $\cot\alpha = -1{,}05$ y $\cos\alpha < 0$, calcular:

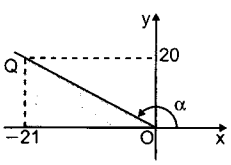
   $$R = \frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^3}{\cos^3\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha}$$

   Resolución:

   Dato: $\cot\alpha = -\frac{21}{20}$; $\cos\alpha < 0$ entonces $\alpha \in$ IIC.

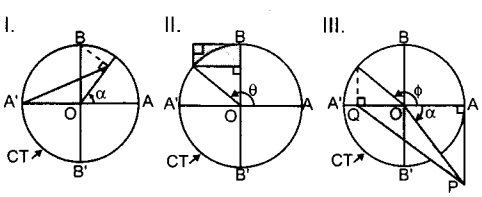
   $OQ = \sqrt{(20)^2 + (-21)^2} \Rightarrow OQ = 29$

   $\operatorname{sen}\alpha = 20/29 \wedge \cos\alpha = -21/29$



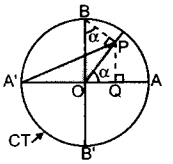
   $$R = \frac{\left(\frac{20}{29} - \frac{21}{29}\right)^3}{\left(-\frac{21}{29}\right)^3 + \left(\frac{20}{29}\right)^3} \quad \therefore R = \frac{1}{1261}$$

3. Determinar el área de cada una de las regiones sombreadas:



Resolución:

I. $A_{\triangle APO} = \frac{1}{2}|OA'||QP|$



Pero: $|OA'| = 1$

Además: $\triangle OPB$: $|OB| = 1$

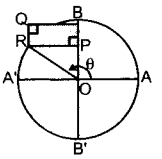
$\Rightarrow OP = \text{sen}\alpha$

$\triangle OQP$: $PQ = OP\text{sen}\alpha$

$PQ = \text{sen}^2\alpha$

$\therefore A_{\triangle} = \frac{1}{2}(1)(\text{sen}^2\alpha) \Rightarrow A_{\triangle APO} = \frac{1}{2}\text{sen}^2\alpha$

II. $A_{\square PBQR} = |PB||PR|$



Pero: $PB = 1 - OP$

$\Rightarrow PB = 1 - \text{sen}\theta$

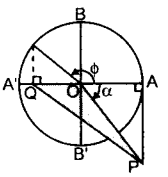
$PR = \cos\theta$

$A_{\square} = |1 - \text{sen}\theta||\cos\theta|$

$A_{\square} = (1 - \text{sen}\theta)(-\cos\theta)$

$\therefore A_{\square} = \cos\theta(\text{sen}\theta - 1)$

III. $A_{\triangle QOP} = \frac{1}{2}|OQ||AP|$ ...(1)



$AP = \tan\alpha$, como $\alpha \in IVC$

$\Rightarrow |AP| = |\tan\alpha| = -\tan\alpha$

$OQ = \cos\phi$, como $\phi \in IIC$

$|OQ| = |\cos\phi| = -\cos\phi$

En (1): $A_{\triangle} = \frac{1}{2}\tan\alpha\cos\phi$

4. Si α designa a todos los arcos del segundo cuadrante, cuál de los siguientes valores no corresponde a $\frac{\alpha}{6}$.

I. $-\frac{2\pi}{9}$ II. $\frac{7\pi}{36}$ III. $\frac{\pi}{4}$

Resolución:

Dato: $(4n + 1)\frac{\pi}{2} < \alpha < (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (4n + 1)\frac{\pi}{12} < \frac{\alpha}{6} < (2n + 1)\frac{\pi}{6}$

Si: $n = -1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{6} < -\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow -\frac{2\pi}{9} \in$ a este intervalo

Si: $n = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{12} < \frac{\alpha}{6} < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{7\pi}{36} \in$ a este intervalo

Si: $n = 1 \Rightarrow \frac{5\pi}{12} < \frac{\alpha}{6} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \notin$ a este intervalo

5. Cuál de las siguientes proposiciones es incorrecta:

I. $\text{sen}\alpha < 0 \wedge \tan\alpha > 0$

$\Rightarrow \alpha \in \left\langle (2k + 1)\pi; (4k + 3)\frac{\pi}{2} \right\rangle \ \forall k \in \mathbb{Z}$

II. Si $\theta \in \left\langle (4k - 1)\frac{\pi}{2}; 2k\pi \right\rangle \ \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos\theta > \csc\theta$

III. Si $\phi \in \left\langle (4k - 3)\frac{\pi}{2}; (2k - 1)\pi \right\rangle \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 0 < \text{sen}\phi < 1$

Resolución:

I. $\text{sen}\alpha < 0 \wedge \tan\alpha > 0$

$\Rightarrow \alpha \in \left\langle (2k + 1)\pi; (4k + 3)\frac{\pi}{2} \right\rangle \ \forall k \in \mathbb{Z}$

es correcto, ya que dado dicho intervalo representa a todos los arcos que pertenecen al IIIC.

II. $\theta \in \left\langle (4k - 1)\frac{\pi}{2}; 2k\pi \right\rangle \ \forall k \in \mathbb{Z}$, quiere decir que $\theta \in IVC$ y en dicho cuadrante:

$0 < \cos\theta < 1$ y $\csc\theta < -1 \Rightarrow \cos\theta > \csc\theta$ (correcto)

III. $\phi \in \left\langle (4k - 3)\frac{\pi}{2}; (2k - 1)\pi \right\rangle \ k \in \mathbb{Z}$, quiere decir que: $\phi \in IIC$ y en dicho cuadrante:

$0 < \text{sen}\phi < 1$ (correcto)

$\therefore$ Las tres proposiciones son correctas.

6. Dato: $f(\theta) = \dfrac{\text{sen}2\theta + \cos4\theta}{\tan8\theta + \csc6\theta}$,

calcular: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Resolución:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{sen}\left[2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \cos\left[4\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\tan\left[8\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \csc\left[6\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \frac{\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi)}{\tan(-2\pi) + \csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1) + (-1)}{(0) + (1)} = -2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{sen}\left[2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \cos\left[4\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\tan\left[8\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \csc\left[6\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\pi}{\tan2\pi + \csc\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + (-1)}{(0) + (-1)} = 0$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 + 0 = -2$$

7. Si $k \in \mathbb{Z}$, cuál (es) de las siguientes proposiciones son incorrectas:

a) $\text{sen}k\pi = 0$ b) $\cos k\pi = (-1)^k$

c) $\tan k\pi = 0$ d) $\text{sen}\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k$

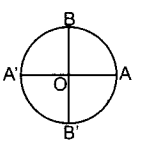
e) $\cos\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$ f) $\cot\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$

g) $\text{cov}k\pi = 1$ h) $\text{vers}\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 1$

i) $\text{exsec}k\pi = -2$

Resolución:

Dato: $k \in \mathbb{Z}$



a) $\text{sen}k\pi = 0$; observar que $k\pi$ representa a todos los arcos cuyo lado final es OA $\vee$ OA'.Correcto.

b) $\cos k\pi = (-1)^k$

Si k es par $\Rightarrow \cos k = 1$ (lado final OA)

Si k es impar $\Rightarrow \cos k\pi = -1$ (lado final OA').

Correcto

c) $\tan k\pi = 0$; correcto.

d) $\text{sen}\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k$; observar que $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$

representa a todos los arcos cuyo lado final es OB ∨ OB'.

Si k es par ⇒ $\text{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2} = 1$ (lado final OB).

Si k es impar ⇒ $\text{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2} = -1$ (lado final OB').

Correcto

e) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$; todos los arcos de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ el valor de su coseno es cero.

Correcto

f) $\cot[2k+1]\frac{\pi}{2} = 0$; correcto

g) $\text{cov}k\pi = 1$; sabemos: $\text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\theta$

$\Rightarrow \text{cov}k\pi = 1 - \underbrace{\text{sen}k\pi}_{0} \quad \therefore \text{cov}k\pi = 1$

Correcto

h) $\text{vers}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 1$; sabemos:

$\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta$

$\text{vers}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 1 - \overbrace{\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}^{=0}$

$\therefore \text{vers}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 1$ Correcto

i) $\text{exsec}k\pi = -2$, sabemos que:

$\text{exsec}\theta = \sec\theta - 1 \Rightarrow \text{exsec}k\pi = \sec k\pi - 1$

Si k es par ⇒ $\text{exsec}k\pi = 0 \wedge$

k es impar ⇒ $\text{exsec}k\pi = -2$

∴ La única proposición incorrecta es (i)

8. Determinar el signo de:

$$S = \frac{\text{sen}225°\cot857°}{\cos643°\sec770°}; \quad T = \frac{\cos\frac{11\pi}{7}\tan\frac{40\pi}{13}}{\csc\frac{53\pi}{11}\sec\frac{53\pi}{19}}$$

$$V = \frac{\text{sen}\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}}{\tan\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}}$$

Resolución:

Con las reglas:

$225° \in \text{IIIC} \Rightarrow \text{sen}225° \Rightarrow (-)$

$857° = 720° + 137° \in \text{IIC} \Rightarrow \cot857° \Rightarrow (-)$

$643° = 720° - 77° \in \text{IVC} \Rightarrow \cos643° \Rightarrow (+)$

$770° = 720° + 50° \in \text{IC} \Rightarrow \sec770° \Rightarrow (+)$

$\Rightarrow S = \frac{(-)(-)}{(+)(+)} = \frac{(+)}{(+)} = (+) \quad \therefore$ S es positivo (+)

$\frac{11\pi}{7} = 2\pi - \frac{3\pi}{7} \in \text{IVC} \Rightarrow \cos\frac{11\pi}{7} \Rightarrow (+)$

$\frac{40\pi}{13} = 3\pi + \frac{\pi}{13} \in \text{IIIC} \Rightarrow \tan\frac{40\pi}{13} \Rightarrow (+)$

$\frac{53\pi}{11} = 5\pi - \frac{2\pi}{11} \in \text{IIC} \Rightarrow \csc\frac{53\pi}{11} \Rightarrow (+)$

$\frac{53\pi}{19} = 3\pi - \frac{4\pi}{19} \in \text{IIC} \Rightarrow \sec\frac{53\pi}{19} \Rightarrow (-)$

$\Rightarrow T = \frac{(+)(+)}{(+)(-)} = \frac{(+)}{(-)} = (-) \quad \therefore$ T es negativo (−)

$\text{sen}\frac{2\pi}{7} > \cos\frac{2\pi}{7} \Rightarrow \text{sen}\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} > 0$

$\frac{3\pi}{5} \in \text{IIC} \Rightarrow \tan\frac{3\pi}{5} \Rightarrow (-) \wedge \cos\frac{3\pi}{5} \Rightarrow (-)$

$\Rightarrow V = \frac{(+)}{(-)+(-)} = \frac{(+)}{(-)} = (-) \quad \therefore$ V es negativo (−)

9. Si $\alpha \in \langle 2\pi; 3\pi\rangle \wedge \theta \in \langle 4\pi; 6\pi\rangle$, determinar el signo de:

$$L = \frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\theta}{3}}{\tan\frac{\alpha}{3} - \csc\frac{\theta}{2}}; \quad N = \frac{\text{sen}\left(\frac{2\alpha+\theta}{4}\right) + \text{vers}\frac{\theta}{4}}{\text{sen}\left(\frac{2\theta-\alpha}{5}\right) - \text{cov}\frac{\alpha}{5}}$$

Resolución:

- $\alpha \in \langle 2\pi; 3\pi\rangle \Rightarrow 2\pi < \alpha < 3\pi$

  $\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \text{IIIC} \Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2}$ es (−)

  $\frac{2\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \pi \Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in \text{IIC} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{3}$ es (−)

- $\theta \in \langle 4\pi; 6\pi\rangle \wedge 4\pi < \theta < 6\pi$

  $2\pi < \frac{\theta}{2} < 3\pi \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \text{IC} \wedge \text{IIC} \Rightarrow \csc\frac{\theta}{2}$ es (+)

  $\frac{4\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < 2\pi \Rightarrow \frac{\theta}{3} \in \text{IIIC} \vee \text{IVC}$: $\text{sen}\frac{\theta}{3}$ es (−)

  $L = \frac{(-)+(-)}{(-)-(+)} = \frac{(-)}{(-)} = + \Rightarrow$ L es positivo.

- $4\pi < 2\alpha < 6\pi \wedge 4\pi < \theta < 6\pi$

  $\Rightarrow 8\pi < 2\alpha + \theta < 12\pi \Rightarrow 2\pi < \left(\frac{2\alpha+\theta}{4}\right) < 3\pi$

  $\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{2\alpha+\theta}{4}\right)$ es positivo

- $8\pi < 2\theta < 12\pi \quad \wedge \quad -3\pi < -\alpha < -2\pi$

  $\Rightarrow 5\pi < 2\theta - \alpha < 10\pi \Rightarrow \pi < \frac{2\theta-\alpha}{5} < 2\pi$

  $\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{2\theta-\alpha}{5}\right)$ es negativo

Signo de N

$N = \frac{(+)+(+)}{(-)-(+)} = \frac{(+)}{(-)} = - \Rightarrow$ N es negativo (−)

10. A qué cuadrante pertenece cada uno de los siguientes ángulos:

I. $\alpha = \left(\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{13}\right)$ rad II. $\theta = \left(\frac{6\pi}{7} + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad

III. $\phi = \left(\frac{7\pi}{9} + \frac{12\pi}{13}\right)$ rad

Resolución:

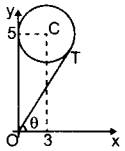
I. $\alpha = \frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{13} = \frac{116\pi}{143} = \pi - \frac{27\pi}{143} \Rightarrow \alpha \in \text{IIC}$

II. $\theta = \frac{6\pi}{7} + \frac{3\pi}{5} = \frac{51\pi}{35} = \pi + \frac{16\pi}{35} \Rightarrow \theta \in \text{IIIC}$

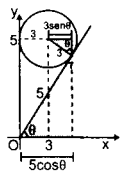
III. $\phi = \frac{7\pi}{9} + \frac{12\pi}{13} = \frac{199\pi}{117} = 2\pi - \frac{35\pi}{117} \Rightarrow \phi \in \text{IVC}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura adjunta, si la circunferencia tiene su centro en (3; 5) y T es el punto de tangencia, determinar: $\sec\theta + \tan\theta$



Resolución:

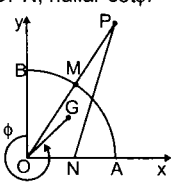


Del gráfico:

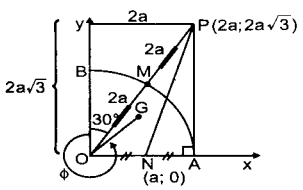
$3 + 3\text{sen}\theta = 5\cos\theta \Rightarrow 3(1 + \text{sen}\theta) = 5\cos\theta$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{5}{3} \quad \therefore \sec\theta + \tan\theta = \dfrac{5}{3}$

2. Con centro en O se ha trazado el sector circular AOB con radio de igual longitud que la abscisa del punto P. OM = MP, ON = NA. Si G es el baricentro del triángulo OPN, hallar $\cot\phi$.



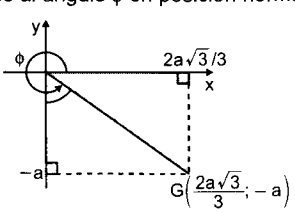
Resolución:



G: baricentro del △OPN:

$\Rightarrow G: \dfrac{(0;0)+(a;0)+(2a;2a\sqrt{3})}{3} \Rightarrow G: \left(a; \dfrac{2a}{3}\sqrt{3}\right)$

Colocamos al angulo ϕ en posición normal:



$\therefore \cot\phi = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

3. ¿En qué cuadrante se cumple que $\cot\alpha > \csc\alpha$?

Resolución:

$\cot\alpha > \csc\alpha \Rightarrow \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} > \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$

$\Rightarrow 0 > \dfrac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \quad \vee \quad \dfrac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} < 0$

Pero:

$[1 - \cos\alpha] \in [0; 2] \Rightarrow [1 - \cos\alpha] \geq 0, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

Luego: $\dfrac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} < 0 \qquad \therefore \text{sen}\alpha < 0$

Luego: $\alpha \in$ IIIC $\vee$ IVC

4. Determinar el signo (en los cuatro cuadrantes) de la expresión: $M = \tan\theta + \cos\theta - \sec\theta$

Resolución:

$M = \tan\theta + \cos\theta - \sec\theta$

$M = \tan\theta - \left[\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right] = \tan\theta - \left[\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right]$

$M = \tan\theta - \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \tan\theta - \tan\theta\,\text{sen}\theta$

$M = \tan\theta(1 - \text{sen}\theta)$

Pero: $[1 - \text{sen}\theta] \in [0; 2] \Rightarrow 1 - \text{sen}\theta \geq 0$

Luego: $M = \tan\theta$ (+)

El signo de M solamente dependerá del signo de la $\tan\theta$.

$\theta \in$ IC $\Rightarrow M \geq 0$; $\qquad \theta \in$ IIC $\Rightarrow M \leq 0$;

$\theta \in$ IIIC $\Rightarrow M \geq 0$; $\qquad \theta \in$ IVC $\Rightarrow M \leq 0$

Los signos serán: (+); (−); (+); (−)

5. Si: $\dfrac{343}{49^{\sec x}} = \text{sen}15° - \cos75° - \text{sen}270° \wedge \cot x < 0$, calcular el valor de $T = \csc x + \cot x$.

Resolución:

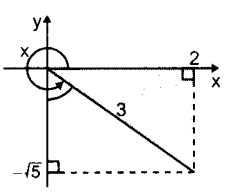
Condición: $\dfrac{343}{49^{\sec x}} = \text{sen}15° - \cos75° - \text{sen}270°$

$\dfrac{7^3}{7^{2\sec x}} = 1 \Rightarrow 7^3 = 7^{2\sec x} \Rightarrow 3 = 2\sec x \Rightarrow \sec x = 3/2$

Además se nos da que: $\cot x < 0$

$\Rightarrow \sec x$ (+) $\wedge$ $\cot x$ (−); así: $x \in$ IVC

Luego, gráficamente:

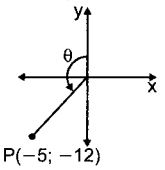


La expresión pedida es:

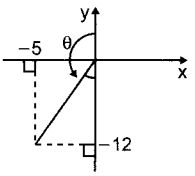
$T = \csc x + \cot x$

$\Rightarrow T = \dfrac{3}{-\sqrt{5}} + \left(\dfrac{2}{-\sqrt{5}}\right) = \dfrac{-5}{\sqrt{5}} \qquad \therefore T = -\sqrt{5}$

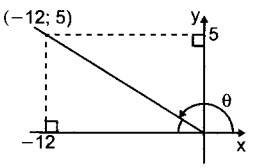
6. En la figura mostrada, hallar $\cot\theta$.



Resolución:

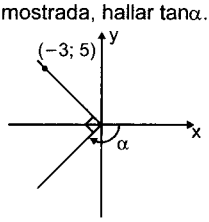


Llevamos a posición normal al ángulo θ.

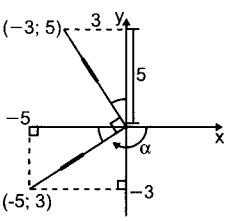


Luego: $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{12}{5}$.

7. En la figura mostrada, hallar $\tan\alpha$.



Resolución:



$\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{(-3)}{(-5)}$ $\quad\therefore\ \tan\alpha = \dfrac{3}{5}$

8. Para qué valores de $x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ se cumple que:

$$\sqrt{\left|\,|2\text{senx}| - \sqrt{3} - 1\right|} < 1$$

Resolución:

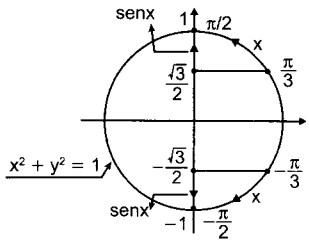
$(\ )^2$: $\left|\,|2\text{senx}| - \sqrt{3} - 1\right| < 1$

$\Rightarrow -1 < |2\text{senx}| - \sqrt{3} - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{3} < |2\text{senx}| < 2 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} < |\text{senx}| < \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} = 1{,}86 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} < |\text{senx}| < 1$

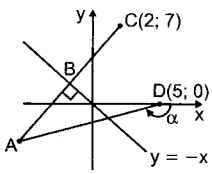
Luego: $-1 < \text{senx} < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee \dfrac{\sqrt{3}}{2} < \text{senx} < 1$

Veamos estos valores en la CT:

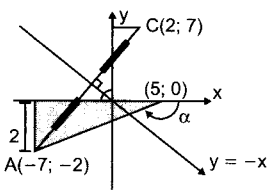


$\therefore$ CS: $x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

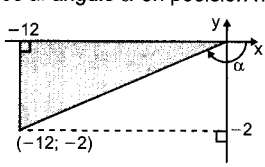
9. De la figura mostrada, calcular $\cot\alpha$, si: AB = BC.



Resolución:

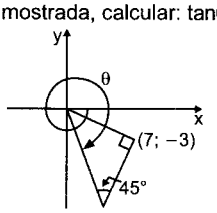


Colocamos al ángulo α en posición normal:

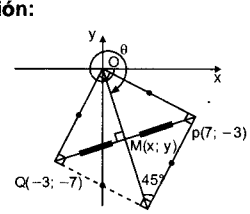


$\therefore\ \cot\alpha = \dfrac{x}{y} = 6$

10. En la figura mostrada, calcular: $\tan\theta$



Resolución:

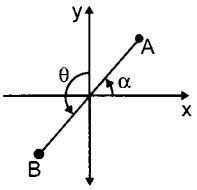


$\overline{OP} \perp \overline{OQ} \Rightarrow Q(-3; -7)$

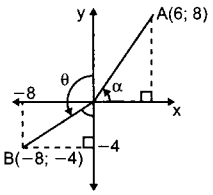
Luego: $M = \dfrac{(-3; -7) + (7; -3)}{2}$

$\therefore\ M(2; -5) \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}$

11. En la figura mostrada, las coordenadas de los puntos A y B son (6; 8) y (−8; −4), respectivamente. Calcular el valor de: $R = 9\tan\alpha + 20\sqrt{5}\,\text{sen}\theta - \tan\theta$



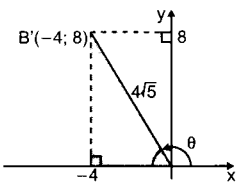
Resolución:



Del gráfico:

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{8}{6} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{4}{3}$

Ahora, llevamos al ángulo θ a posición normal:



$\text{sen}\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{B}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \text{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{8}{-4} \Rightarrow \tan\theta = -2$

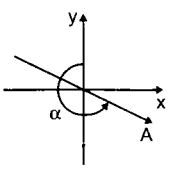
Finalmente lo pedido será:

$R = 9\tan\alpha + 20\sqrt{5}\,\text{sen}\theta - \tan\theta$

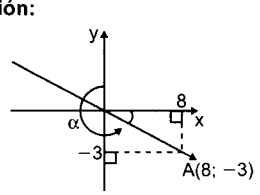
$\Rightarrow R = 9 \times \dfrac{4}{3} + 20\sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} - (-2)$

$R = 12 + 40 + 2 \quad \therefore R = 54$

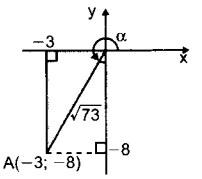
12. En la figura mostrada, las coordenadas del punto A son (8; −3). Calcular el valor de:
$N = \sqrt{73}\,\text{sen}\alpha - 6\tan\alpha$



Resolución:



Colocamos al ángulo α en posición normal:



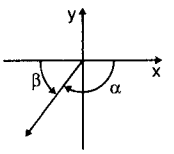
Luego: $N = \sqrt{73}\,\text{sen}\alpha - 6\tan\alpha$

$\Rightarrow N = \sqrt{73}\left(\dfrac{-8}{\sqrt{73}}\right) - 6\left(\dfrac{-8}{-3}\right)$

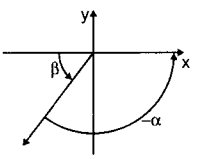
$N = -8 - 16 \quad \therefore N = -24$

13. Con los datos de la figura mostrada, determinar:

$$S = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + 8\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + 4\text{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4}\right)}$$



Resolución:



Notemos que: $\beta - \alpha = 180°$

Tambien: $\alpha - \beta = -180° \;\wedge\; \beta = 180° + \alpha$

Reemplazamos en la expresión pedida:

$S = \dfrac{\cos\alpha + \cos(180° + \alpha) + 8\cos(-45°)}{\text{sen}\alpha + \text{sen}(180° + \alpha) + 4\text{sen}(-45°)}$

$S = \dfrac{\cos\alpha - \cos\alpha + 8\cos 45}{\text{sen}\alpha - \text{sen}\alpha - 4\text{sen}45} \Rightarrow S = \dfrac{8\cos 45}{-4\text{sen}45}$

$\therefore S = -2$

14. Determinar el signo de A en cada uno de los cuatro cuadrantes: $A = \sec x \csc x - \csc x - \sec x + 1$

Resolución:

Factorizando:

$A = (\csc x - 1)(\sec x - 1) \Rightarrow A = \left(\dfrac{1}{\text{sen}x} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)$

$A = \dfrac{(1 - \text{sen}x)(1 - \cos x)}{\text{sen}x\cos x}$

Note que: $(1 - \text{sen}x) > 0 \;\wedge\; (1 - \cos x) > 0$

$\forall x \in$ a cualquier cuadrante.

Luego: $A = \dfrac{1}{\text{sen}x\cos x}$

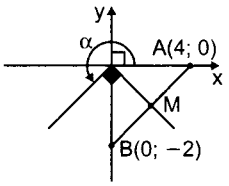
Ahora el signo de A depende únicamente del signo del: $\text{sen}x \;\wedge\; \cos x$

Así tendremos que:

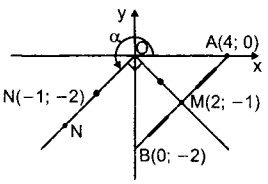
- Si: $x \in$ IC $\Rightarrow$ A es (+)
- Si: $x \in$ IIC $\Rightarrow$ A es (−)
- Si: $x \in$ IIIC $\Rightarrow$ A es (+)
- Si: $x \in$ IVC $\Rightarrow$ A es (−)

$\therefore$ Los signos son: (+); (−); (+); (−)

15. De la figura mostrada, determinar: $\tan\alpha$ Si: AM = BM



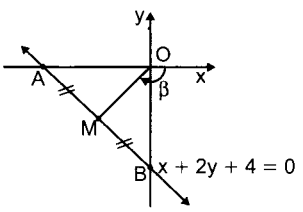
Resolución:



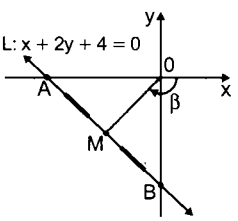
$\overline{OM} \perp \overline{NO} \Rightarrow N(-1; -2)$

Luego $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{-1}$ $\quad \therefore \tan\alpha = 2$

16. Hallar $\cot\beta$ a partir de la figura mostrada, si M es punto medio de $\overline{AB}$.



Resolución:



Cálculo de los interceptos:

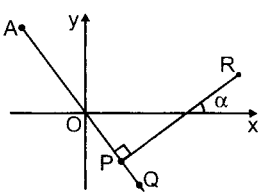
Si: $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(0; -2)$

Si: $y = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow A(-4; 0)$

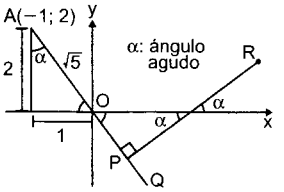
Luego: $M = \dfrac{(0; -2) + (-4; 0)}{2} \Rightarrow M = (-2; -1)$

$\therefore \cot\beta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-2}{-1} \Rightarrow \cot\beta = 2$

17. En la figura adjunta, $\overline{AQ}$ pasa por el origen, si A(−1; 2), determinar: $T = \csc^2\alpha - \cot\alpha$



Resolución:



$\Rightarrow T = \csc^2\alpha - \cot\alpha \Rightarrow T = \sqrt{5}^2 - 2 \quad \therefore T = 3$

18. Si: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \tan\theta < \sqrt{3}$, $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, determinar los valores que asume; $P = 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3$:

Resolución:

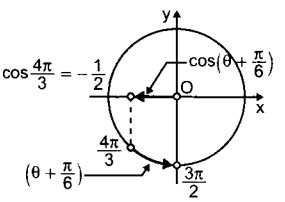
Condición: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \tan\theta < \sqrt{3}$; $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan(180° + 30°) < \tan\theta < \tan(180° + 60°)$

Dado que $\theta \in$ IIIC y la tangente es continua y creciente tenemos que: $210° < \theta < 240°$

$\Rightarrow \dfrac{7\pi}{6} < \theta < \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{4\pi}{3} < \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{3\pi}{2}$

Graficamos en la CT:



Note que: $-\dfrac{1}{2} < \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) < 0$

$\Rightarrow -1 < 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) < 0$

$\Rightarrow 2 < \underbrace{2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3}_{P} < 3 \quad \therefore P = \langle 2; 3 \rangle$

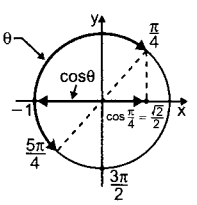
19. Si: $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$, calcular el máximo valor de:

$$F = \tan(\sqrt{2}\cos\theta)$$

Resolución:

Condición: $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4}$

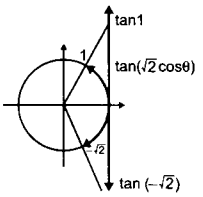
Representamos θ en la CT.



Note que: $-1 \le \cos\theta \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos\theta \le 1$

Representemos los arcos $(\sqrt{2}\cos\theta)$ en la CT

$[\tan(\sqrt{2}\cos\theta)]_{máx.} = \tan 1$



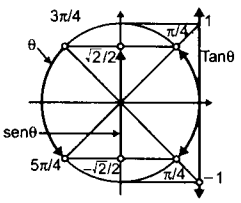
$[\tan(\sqrt{2}\cos\theta)]_{max} = \tan 1$

20. Si: $-1 < \tan\theta < 1$, determinar los valores de $\operatorname{sen}\theta$.

Resolución:

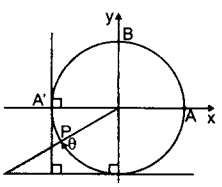
Dado: $-1 < \tan\theta < 1$

En la CT:



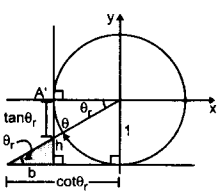
Note que: $\operatorname{sen}\theta \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

21. En la circunferencia trigonométrica mostrada, determinar el área de la región sombreada.



Resolución:

θ_r: ángulo de referencia



Del gráfico:

$S_{somb} = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow S_{somb} = \frac{(\cot\theta_r - 1)(1 - \tan\theta_r)}{2}$

$S_{somb} = \frac{1}{2}(\cot\theta_r - \underbrace{\cot\theta_r\tan\theta_r}_{1} - 1 + \tan\theta_r)$

$S_{somb} = \frac{1}{2}[\cot\theta_r + \tan\theta_r - 2]$

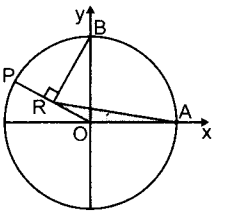
Pasamos las RT de θ_r a RT de θ:

$S_{somb} = \frac{1}{2}[|\cot\theta| + |\tan\theta| - 2]$

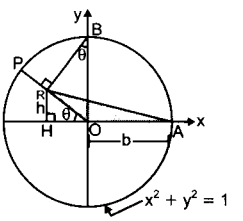
Como: $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow |\cot\theta| = \cot\theta \wedge |\tan\theta| = \tan\theta$

$\therefore S_{somb} = \frac{1}{2}(\cot\theta + \tan\theta - 2)$

22. En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\angle OBR = \theta$; $m\angle BRP = 90°$. Determinar el área de la región triángular AOR.



Resolución:



Tenemos que: $S_{OAR} = \frac{b \times h}{2}$ ...(1)

Donde: b = 1

Cálculo de h:

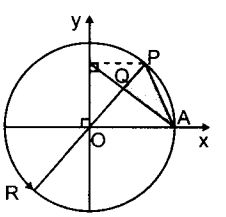
$\triangle BRO$: $\frac{RO}{\underbrace{OB}_{1}} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow RO = \operatorname{sen}\theta$

$\triangle RHO$: $\frac{RH}{RO} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow RH = RO\operatorname{sen}\theta$

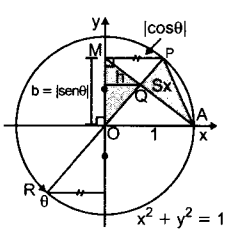
$\therefore RH = \operatorname{sen}^2\theta = h$

Luego en (1): $S_{OAR} = \frac{(1)\operatorname{sen}^2\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}$

23. En la figura mostrada la circunferencia es la trigonométrica, $m\widehat{APR} = \theta$. Hallar el área de la región triangular APQ.



Resolución:

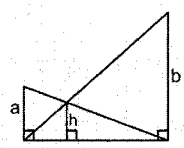


Note que: $S_{OPA} = S_{OMA}$

SOQA + SX = SOQA + SOMQ

$\Rightarrow S_X = S_{OMQ}$ ...(I)

Propiedades



$$\boxed{h = \frac{ab}{a+b}}$$

Luego: ⊿OMPA: $h = \dfrac{(1)|\cos\theta|}{1+|\cos\theta|}$

Luego: $S_x = S_{OMQ}$ (de (1))

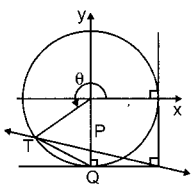
$$S_x = \frac{b\times h}{2} = |\operatorname{sen}\theta|\frac{|\cos\theta|}{1+|\cos\theta|}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{|\operatorname{sen}\theta||\cos\theta|}{2(1+|\cos\theta|)}$$

Como:

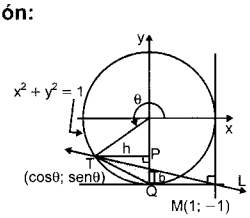
$\theta \in$ IIIC $\Rightarrow |\operatorname{sen}\theta| = -\operatorname{sen}\theta \wedge |\cos\theta| = -\cos\theta$

$$\therefore\ S_x = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

24. En la circunferencia trigonométricas, hallar el área de la región PQT.



Resolución:



$S_{somb} = \dfrac{b\times h}{2}$; donde: $h = |\cos\theta|$

Cálculo de b:

Para la recta L: T $\wedge$ M: puntos de paso

$$m = \frac{\operatorname{sen}\theta+1}{\cos\theta-1} \Rightarrow L: y+1 = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta+1}{\cos\theta-1}\right)(x-1)$$

$$\Rightarrow L: y = \left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-1}\right)(x-1)-1$$

Intercepto de L con el eje x: P

Cuando: $x = 0 \Rightarrow y = \left(\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-1}\right)(0-1)-1$

Luego: $y = \dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta} \Rightarrow P\left(0; \dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)$

$$\Rightarrow b = 1+y_p-1+\frac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta} \Rightarrow b = \frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$$

$$\therefore\ S_{somb} = \frac{b\times h}{2} = \frac{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}\right)|\cos\theta|}{2}$$

Como: $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow |\cos\theta| = -\cos\theta$

$$\therefore\ S_{somb} = -\frac{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{2(1-\cos\theta)}$$

25. Si: $2\operatorname{sen}\alpha = -3\cos\alpha \wedge \alpha \in$ IVC

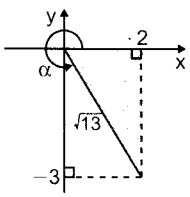
calcular: $T = \csc(-93\pi+\alpha)\cot(\alpha-35\pi/2)$

Resolución:

Condición: $2\operatorname{sen}\alpha = -3\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{2}$$

Como $\alpha \in$ IVC.



Se pide:

$$T = \csc(-93\pi+\alpha)\cot\left(\alpha-35\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T = [-\csc(93\pi-\alpha)]\left[-\cot\left(35\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

$$T = \csc(93\pi-\alpha)\cot\left(35\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$T = \csc(\pi-\alpha)\cot\left(16\pi+\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$T = \csc\alpha\tan\alpha$$

Reemplazamos: $T = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{-3}\right)\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

26. Decir la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $\tan(1283\pi/4) = -1$

II. $\operatorname{sen}(n\pi)+\sec(n\pi) = (-1)^n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$

III. Si $\sqrt[3]{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{\tan\theta} < 0$, entonces θ pertenece al tercer cuadrante.

Resolución:

I. $\tan\left(1283\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

Dividimos:

$$\begin{array}{r|l} 1283\frac{\pi}{4} & 8\frac{\pi}{4} \\ \cline{2-2} 1280\frac{\pi}{4} & 160 \\ \hline \frac{3\pi}{4} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \tan\left(1283\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1 \Rightarrow \text{Verdadero}$$

II. $\operatorname{sen}(n\pi)+\sec(n\pi) = (-1)^n$: $\forall n \in \mathbb{Z}$

Si $n = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\pi+\cos\pi = -1$

Si: $n = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}2\pi+\cos2\pi = 1$

Verdadero

III. $\underbrace{\underbrace{\sqrt[3]{\operatorname{sen}\theta}}_{(-)}\underbrace{\sqrt{\tan\theta}}_{(+)}}_{(-)} < 0 \Rightarrow \theta \in$ IIIC

Verdadero

Luego: $\tan\theta$ es (+) $\wedge$ $\operatorname{sen}\theta$ es (−) $\Rightarrow \theta \in$ IIIC

$\therefore$ VVV

27. Reducir la siguiente expresión:

$$S = \frac{\text{sen}(3780°) + \cos(7470°) + \csc(1350°)}{\tan(2025°)\sec(900°)}$$

Resolución:

Calculamos cada RT:

- $\begin{array}{r|l} 3780° & 360° \\ \underline{3600°} & 10 \\ 180° & \end{array} \Rightarrow \text{sen}3780° = \text{sen}180° = 0$
- $\begin{array}{r|l} 7470° & 360° \\ \underline{7200°} & 20 \\ 270° & \end{array} \Rightarrow \cos7470° = \cos270° = 0$
- $\begin{array}{r|l} 1350° & 360° \\ \underline{1080°} & 3 \\ 270° & \end{array} \Rightarrow \csc1350° = \csc270° = -1$
- $\begin{array}{r|l} 2025° & 360° \\ \underline{1800°} & 5 \\ 225° & \end{array} \Rightarrow \tan2025° = \tan225° = 1$
- $\sec900° = \sec(720° + 180°) = -1$

Reemplazamos los valores obtenidos:

$$S = \frac{0 + 0 - 1}{1(-1)} \quad \therefore S = 1$$

28. Si x es un ángulo agudo, tal que $\tan(2002°)\tan(x + 2002°) = 1$, hallar x.

Resolución:

Condición:

$\tan2002°\tan(2002° + x) = 1$

$\tan(1800° + 202°)\tan(1800° + 202° + x) = 1$

$\tan202°\tan(202° + x) = 1$

$\tan(180° + 22°)\tan(180° + 22° + x) = 1$

$\tan22°\tan(22° + x) = 1$

$\tan(22° + x) = \dfrac{1}{\tan22°} = \cot22°$

$\Rightarrow 22° + x + 22° = 90° \quad \therefore x = 46°$

29. Simplificar:

$$T = \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\csc(x - 4\pi)\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sec\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)}$$

Resolución:

Reducimos por partes:

- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$
- $\csc(x - 4\pi) = -\csc(4\pi - x) = \csc x$
- $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}x$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- $\sec\left(\frac{13\pi}{2} + x\right) = \sec\left(6\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\csc x$

Reemplazamos:

$$T = \frac{(\tan x)(\csc x)(\cos x)}{(-\text{sen}x)(\cot x)(-\csc x)} = \frac{\tan x\left(\frac{1}{\text{sen}x}\right)\cos x}{\cot x}$$

$$T = \frac{\tan x\cot x}{\cot x} \quad \therefore T = \tan x$$

30. Sean A; B; C y D los ángulos interiores de un cuadrilátero, entonces reducir la siguiente expresión:

$$S = \frac{[\text{sen}(A + B + C) - \cos D]\sec(A + B + C)}{\tan(A + B)\cot(C + D)} - \tan D$$

Resolución:

$A + B + C + D = 360°$

Recordemos que si: $x + y = 360°$

$\Rightarrow \text{sen}x = -\text{sen}y; \quad \sec x = \sec y; \quad \tan x = \tan y$

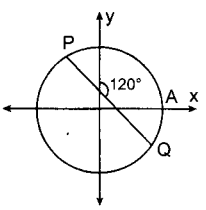
Reemplazamos:

$$S = \frac{(-\text{sen}D - \cos D)\sec D}{[-\tan(C + D)]\cot(C + D)} - \tan D$$

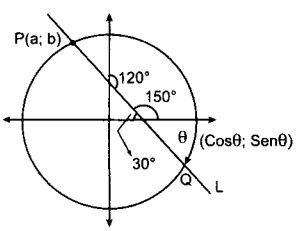
$S = (\text{sen}D + \cos D)\sec D - \tan D$

$S = \underbrace{\text{sen}D\sec D}_{\tan D} + \underbrace{\cos D\sec D}_{1} - \tan D \quad \therefore S = 1$

31. En la circunferencia trigonométrica mostrada $P = (a; b)$ y $m\widehat{AQ} = \theta$. Halle $E = a + \sqrt{3}b$



Resolución:



Tomando los puntos P y Q la pendiente de L es:

$$m = \frac{b - \text{sen}\theta}{a - \cos\theta} = \tan150°$$

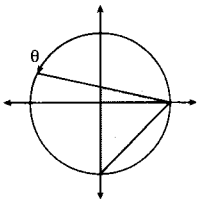
$$\frac{b - \text{sen}\theta}{a - \cos\theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sqrt{3}b - \sqrt{3}\,\text{sen}\theta = -a + \cos\theta$

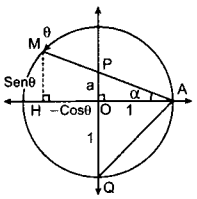
$\underbrace{a + \sqrt{3}b}_{E} = \cos\theta + \sqrt{3}\,\text{sen}\theta$

$E = \cos\theta + \sqrt{3}\,\text{sen}\theta$

32. En la circunferencia trigonométrica mostrada. Halle el área de la región sombreada.



Resolución:



En los ⊾s AOP y AHM se cumple respectivamente:

$$\tan\alpha = \underbrace{\frac{a}{1} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta + 1}}$$

de donde se obtiene: $a = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$

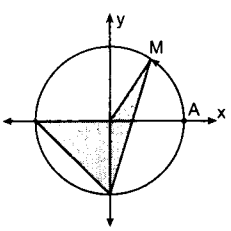
Luego, el área del triángulo QPA es:

$$A_{\Delta QPA} = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura}$$

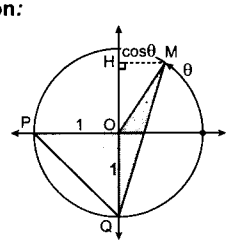
$$A_{\Delta QPA} = \frac{1}{2}(a + 1) \times 1 = \frac{1}{2}(a + 1)$$

$$A_{\Delta QPA} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} + 1\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{1 - \cos\theta}\right)$$

33. En la circunferencia trigonométrica de la figura mostrada, si $\overset{\frown}{AM} = \theta$; entonces al calcular el área sombreada, se obtiene:



Resolución:



$$S = A_{\Delta POQ} + A_{\Delta QOM} \Rightarrow \frac{OP \times OQ}{2} + \frac{OQ \times MH}{2}$$

$$S = \frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times \cos\theta}{2} \Rightarrow \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

34. Si $\csc\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) + \cot\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{2}$ hallar el valor de $\sec\theta + \tan\theta$ (emplear: $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$)

Resolución:

$$\csc\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) + \cot\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{2}$$

$$\csc\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cot\left(4\pi + \frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sec\theta + [-\tan\theta] = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{2}$$

Como $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$(\sec\theta + \tan\theta) \times \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore \sec\theta + \tan\theta = 2$

35. Si $29\cos(x + y) = 2m^2 - 21\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$, determine la extensión de m para que la expresión dada sea válida.

Resolución:

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

$-1 \leq \cos(x + y) \leq 1$

$(\times 29)$: $-29 \leq \underbrace{29\cos(x + y)}_{\text{dato}} \leq 29$

$-29 \leq 2m^2 - 21 \leq 29$

$(+21)$: $-8 \leq 2m^2 \leq 50$

$(\div 2)$: $-4 \leq m^2 \leq 25$

Se sabe que: $0 \leq m^2, \forall\ m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 \leq m^2 \leq 25$

Extrayendo raíz cuadrada:

$0 \leq |m| \leq 5$

de donde: $-5 \leq m \leq 5$

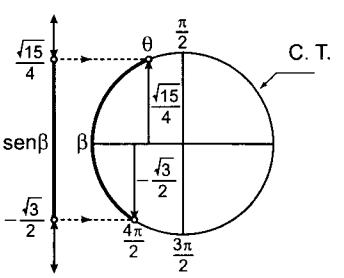
36. Si $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2} \wedge -\frac{\sqrt{3}}{2} < \operatorname{sen}\beta < \frac{\sqrt{15}}{4}$

hallar el número de valores enteros que asume:

$T = \frac{1}{3}\tan^2\beta - 3$

Resolución:

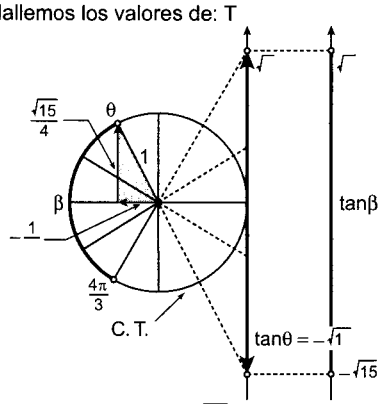
I.



Podemos notar que β pertenece al intervalo señalado en la circunferencia numérica:

$\theta < \beta < \frac{4\pi}{3}$

II. Hallemos los valores de: T



Observe que: $\tan\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{15}$

III. Luego:

$-\sqrt{15} < \tan\beta < \sqrt{3}$

$\Rightarrow 0 \le \tan^2\beta < 15 \Rightarrow 0 \le \frac{1}{2}\tan^2\beta < 5$

$-3 \le \underbrace{\frac{1}{3}\tan^2\beta - 3}_{T} < 5 - 3$

$-3 \le T < 2 \Rightarrow T = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

$\therefore$ T asume 5 valores enteros

37. Si $\theta \in \langle -\pi; 0]$, tal que: $|\cos\theta| > \frac{1}{2}$

hallar la extensión de valores de:

$\left|\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right|$

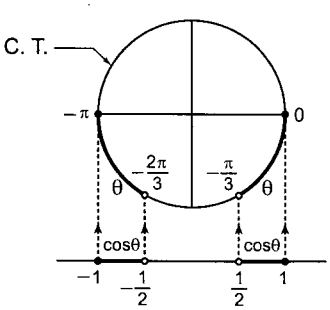
Resolución:

De los datos:

$\cos\theta < -\frac{1}{2} \vee \cos\theta > \frac{1}{2}, -\pi \le \theta \le 0$

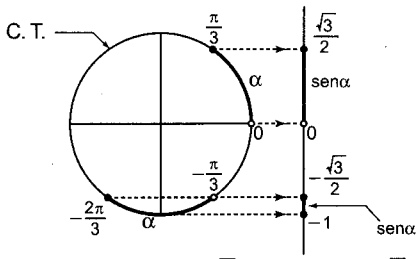
Es decir:

$-1 \le \cos\theta < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < \cos\theta \le 1, -\pi \le \theta \le 0$



$-\pi \le \theta < -\frac{2\pi}{3} \vee -\frac{\pi}{3} < \theta \le 0$

Luego: $-\frac{2\pi}{3} \le \underbrace{\theta + \frac{\pi}{3}}_{\alpha} \vee 0 < \underbrace{\theta + \frac{\pi}{3}}_{\alpha} \le \frac{\pi}{3}$



Como: $-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee 0 < \operatorname{sen}\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 0 < |\operatorname{sen}\alpha| \le 1$, es decir: $0 < \left|\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right| \le 1$

$\therefore \left|\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right| \in \langle 0; 1]$

38. Si $a \in \langle \pi; \frac{5\pi}{4}\rangle$, y:

$S = \sqrt{\sec^2\alpha + \csc^2\alpha + 2\sec\alpha \times \csc\alpha}$

$T = \sqrt{\sec^2\alpha + \csc^2\alpha - 2\sec\alpha \times \csc\alpha}$

hallar: S + T

Resolución:

I. Efectuando:

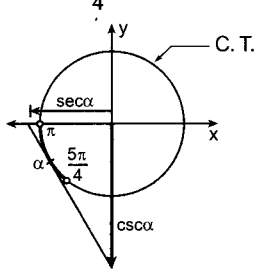
$S = \sqrt{(\sec\alpha + \csc\alpha)^2} \Rightarrow |\sec\alpha + \csc\alpha|$

$T = \sqrt{(\sec\alpha - \csc\alpha)^2} \Rightarrow |\sec\alpha - \csc\alpha|$

Luego:

$S + T = |\sec\alpha + \csc\alpha| + |\sec\alpha - \csc\alpha|$ ...(1)

II. Dato: $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$



como: $\sec\alpha + \csc\alpha < 0$

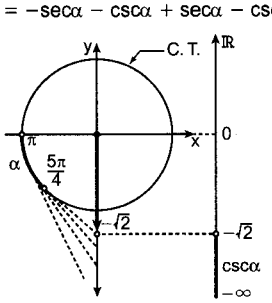
$\Rightarrow |\sec a + \csc a| = -(\sec a + \csc a)$ ...(2)

vemos que: $\sec\alpha > \csc\alpha \Rightarrow \sec\alpha - \csc\alpha > 0$

$\Rightarrow |\sec\alpha - \csc\alpha| = \sec\alpha - \csc\alpha$ ...(3)

III. Reemplazando (2) y (3) en (1):

$S + T = -\sec\alpha - \csc\alpha + \sec\alpha - \csc\alpha = -2\csc\alpha$



Note que: $\csc\alpha < -\sqrt{2}$

$$\underbrace{-2\csc\alpha > 2}_{S+T}$$

$\therefore\ S + T \in \langle 2\sqrt{2}; \infty\rangle$

39. Si $1 < |\beta| < \frac{3}{2}$ hallar la extensión de valores de:

$$T = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi\beta}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

Resolución:

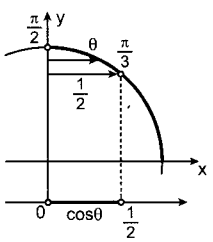
Nota: $\cos x = \cos(\pm x)$

$\cos x = \cos|x|$

$$T = \frac{1}{3}\cos\left|\frac{\pi\beta}{3}\right| + \frac{1}{3}$$

Dato: $1 < |\beta| < \frac{3}{2}$

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}|\beta| < \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \underbrace{\left|\frac{\pi\beta}{3}\right|}_{\theta} < \frac{\pi}{2}$$

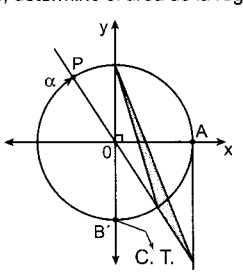


$$\Rightarrow 0 < \cos\theta < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \cos\left|\frac{\pi\beta}{3}\right| < \frac{1}{2}$$

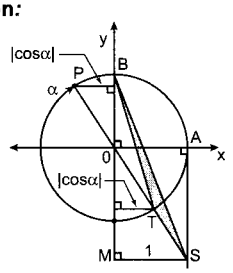
$$0 < \frac{1}{3}\cos\left|\frac{\pi\beta}{3}\right| < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} < \underbrace{\frac{1}{3}\cos\left|\frac{\pi\beta}{3}\right| + \frac{1}{3}}_{T} < \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} < T < \frac{1}{2} \qquad \therefore\ T \in \left\langle\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\rangle$$

40. En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\widehat{AB'P} = \alpha$, determine el área de la región sombreada.



Resolución:



$$S_{sombreada} = S_{\Delta BTS} = S_{\Delta BOS} - S_{\Delta BOT} \quad \ldots(I)$$

$$S_{\Delta BOS} = \frac{1}{2}(OB)(SM) = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta BOT} = \frac{1}{2}(OB)(|\cos\alpha|) = \frac{|\cos\alpha|}{2}$$

Reemplazando en (I): $S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2} - \frac{|\cos\alpha|}{2}$

Como: $\alpha \in$ IIC, $S_{\Delta BTS} = \frac{1}{2} + \frac{|\cos\alpha|}{2}$

$|\cos\alpha| = -\cos\alpha$

$$S_{\Delta BTS} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

41. Sabiendo que: $\alpha \in \langle 5; \frac{7\pi}{4}\rangle$, hallar la extensión de valores de la expresión:

$$T = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha + \sqrt{1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

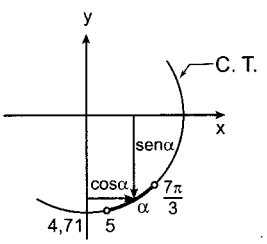
Resolución:

$$T = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$T = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha + \sqrt{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2}$$

$$T = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha + |\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha| \quad \ldots(1)$$

Dato: $5 < a < \frac{7\pi}{4}$



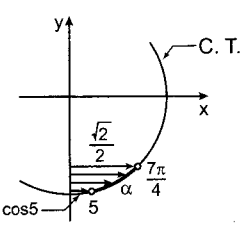
Note que:

$|\cos\alpha| < |\operatorname{sen}\alpha| \Rightarrow \cos\alpha < -\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha < 0$

$\Rightarrow |\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha| = -(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$

Reemplazando en (I):

$T = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha \Rightarrow T = -2\cos\alpha$



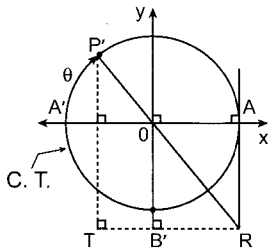
Se nota: $\cos 5 < \cos\alpha < \cos\frac{7\pi}{4}$

$$\cos 5 < \cos\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

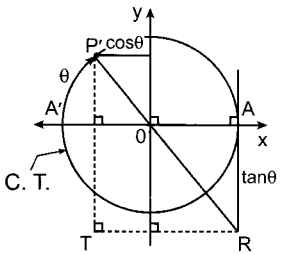
$$-2\cos 5 > \underbrace{-2\cos\alpha}_{T} > -\sqrt{2}$$

$\therefore\ T \in \langle -\sqrt{2}; -2\cos 5\rangle$

42. En la circunferencia trigonométrica mostrada, $m\widehat{AB'P} = q$; $PT \perp A'A$, $TR \perp OB'$. $AR \perp A'A$. Hallar las coordenadas del punto T



Resolución:



$\theta \in$ IIC
$\cos\theta < 0$
$\tan\theta < 0$
$T \in$ IIIC

Coordenadas de T: $(\cos\theta; \tan\theta)$

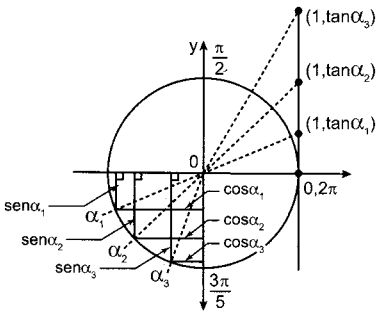
43. Si $p < a_1 < a_2 < a_3 < \frac{3\pi}{2}$ donde a_1, a_2, a_3 son las medias en radianes de 3 ángulos. Decir sin son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

I. $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2 < \tan\alpha_3$

II. $\operatorname{sen}\alpha_1 > \operatorname{sen}\alpha_2 > \operatorname{sen}\alpha_3$

III. $|\cos\alpha_1| > |\cos\alpha_2| > |\cos\alpha_3|$

Resolución:



De la circunferencia trigonométrica se observa que:

I. $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2 < \tan\alpha_3$ $\Rightarrow$ (V)

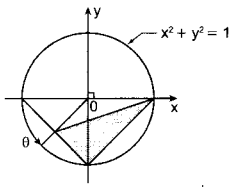
II. $\operatorname{sen}\alpha_3 < \operatorname{sen}\alpha_2 < \operatorname{sen}\alpha_1$
$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha_1 > \operatorname{sen}\alpha_2 > \operatorname{sen}\alpha_3$ $\Rightarrow$ (V)

III. $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2 < \cos\alpha_3 < 0$
$\Rightarrow -\cos\alpha_1 > -\cos\alpha_2 > -\cos\alpha_3 > 0$
$|\cos\alpha_1| > |\cos\alpha_2| > |\cos\alpha_3|$ $\Rightarrow$ (V)

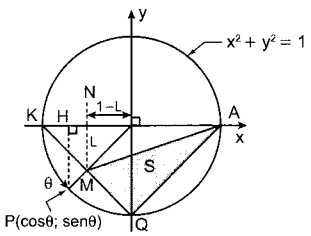
Luego, las tres proposiciones son verdaderas

$\therefore$ VVV

44. Hallar el área de la región sombreada en términos de θ.



Resolución:



Del gráfico: $\triangle MNO \sim \triangle PHO$

$$\frac{L}{|\operatorname{sen}\theta|} = \frac{1-L}{|\cos\theta|};\ \theta \in \text{III}_c \Rightarrow \frac{L}{-\operatorname{sen}\theta} = \frac{1-L}{-\cos\theta}$$

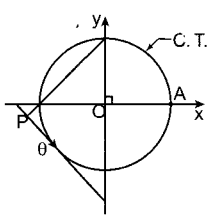
$$\Rightarrow \frac{L}{1-L} = \tan\theta \quad \therefore L = \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

El área: $S = S_{AQK} - S_{AMK}$

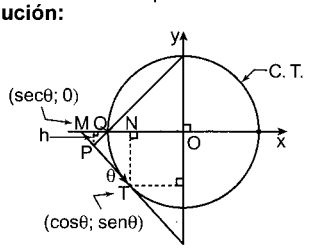
$$= \frac{(2)(1)}{2} - \frac{(2)(L)}{2} = 1 - L = 1 - \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$\therefore S = \frac{1}{1+\tan\theta}$$

45. Del gráfico, hallar la ordenada del punto P



Resolución:



$\triangle MQP \sim \triangle MNT$

$$\Rightarrow \frac{h}{|\operatorname{sen}\theta|} = \frac{|\sec\theta| - (1+h)}{|\sec\theta| - |\cos\theta|} \wedge \theta \in \text{IIIC}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{-\operatorname{sen}\theta} = \frac{(-\sec\theta) - (1+h)}{(-\sec\theta) + \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sec\theta - (1+h)}{\dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\text{sen}\theta} = \frac{1+(1+h)\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}$$

$$\Rightarrow -h = \frac{1+\cos\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta} = \left(\frac{\sec\theta+1}{1+\tan\theta}\right)$$

$\therefore$ La ordenada del punto P es $\left(\frac{\sec\theta+1}{1+\tan\theta}\right)$

46. En la circunferencia trigonométrica, indicar verdadero o falso las siguientes proposiciones:

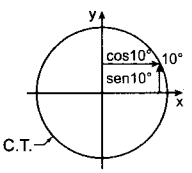
I. $\text{sen}10° < \cos10°$

II. $\cos4 < \cos2$

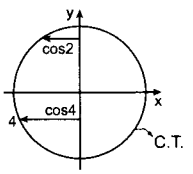
III. $\cos\frac{5\pi}{4} > \cos\frac{2\pi}{3}$

Resolución:

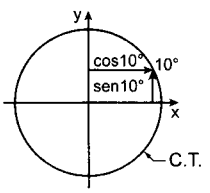
I. Verdadero



II. Verdadero



III. Falso



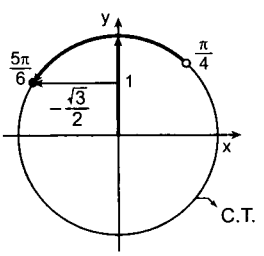
$\therefore$ VVF

47. Si: $\pi/4 < x \leq 5\pi/6$

calcular: $K = 2(\text{sen}x)_{\text{máx.}} - (\cos x)_{\text{mín.}}$

Resolución:

De la condición: $\frac{\pi}{4} < x \leq 5\frac{\pi}{6}$



y de la CT tenemos:

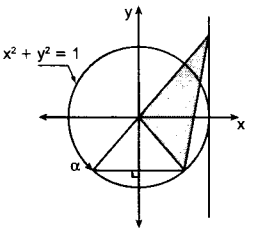
$(\text{sen}x)_{\text{máx.}} = 1$

$(\cos x)_{\text{mín.}} = -\sqrt{3}/2$

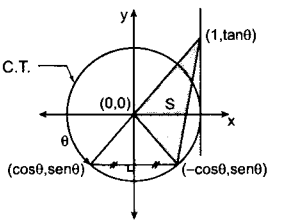
$$\Rightarrow k = 2(1) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

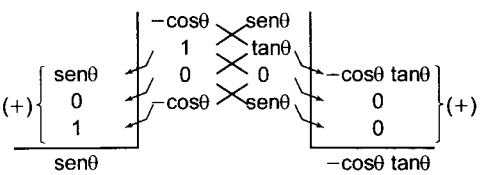
48. Hallar la variación del área de la región sombreada, si:

$$\frac{7\pi}{6} < \theta \leq \frac{4\pi}{3}$$



Resolución:



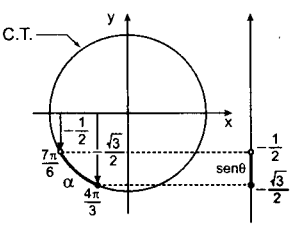


$$S = \frac{1}{2}[-\cos\theta\tan\theta - \text{sen}\theta]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[-\cos\theta\left(\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\text{sen}\theta\right] \Rightarrow -\text{sen}\theta$$

Dato: $\frac{7\pi}{6} < \theta \leq \frac{4\pi}{3}$

Graficando en la CT



De la figura:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \text{sen}\theta < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \underbrace{-\text{sen}\theta}_{S} > \frac{1}{2}$$

$\therefore S \in \langle\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$

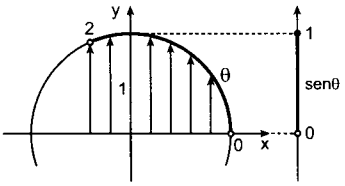
49. $\theta \in \langle 0; 2\rangle$; hallar la extensión de valores de:

$$T = \frac{1}{2} + 2\,\text{sen}\theta + \text{sen}^2\theta$$

Resolución:

$$T = \frac{1}{2} - 1 + 1 + 2\text{sen}\theta + \text{sen}^2\theta \Rightarrow -\frac{1}{2} + (1+\text{sen}\theta)^2$$

Dato: $0 < \theta < 2$



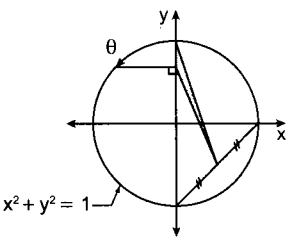
$\Rightarrow 0 < \text{sen}\theta < 1$

$1 < 1 + \text{sen}\theta < 2 \Rightarrow 1 < (1 + \text{sen}\theta)^2 < 4$

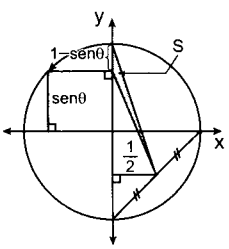
$$\frac{1}{2} < \underbrace{-\frac{1}{2} + (1 + \text{sen}\theta)^2}_{T} < \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} < T < \frac{7}{2} \quad \therefore T \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right\rangle$$

50. Del gráfico, calcular θ si el área sombreada es igual a 0,125 m^2



Resolución:



Sea S el área sombreada

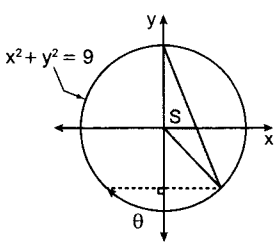
$$\Rightarrow S = \frac{(1 - \text{sen}\theta)\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \Rightarrow 0{,}125 = \frac{(1 - \text{sen}\theta)}{4}$$

$$\Rightarrow 0{,}500 = 1 - \text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

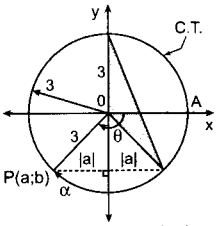
Como $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} = 150°$

51. En la figura mostrada, hallar la variación del área de la región sombreada, si:

$-\frac{5\pi}{2} < a < -2\pi$



Resolución:



$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \Rightarrow S = \frac{3|a|}{2} \quad ...(1)$$

Como P (a; b) ∈ lado final de θ:

$\cos\theta = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3\cos\theta$

Reemplazamos en (1):

$$S = \frac{3|3\cos\theta|}{2} \Rightarrow S = \frac{9}{2}|\cos\theta| \quad ...(2)$$

En el sector circular AOP; aplicando la fórmula de longitud de arco:

$\overset{\frown}{AP} = \theta \times OP \Rightarrow a = \theta \times 3$

Dato: $-\frac{5\pi}{2} < \alpha < -2\pi$

$$-\frac{5\pi}{2} < \theta \times 3 < -2\pi \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} < \theta < -\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta < -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| > |\cos\theta| > \left|-\frac{1}{2}\right|$$

Luego: $\frac{1}{2} < |\cos\theta| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{9}{2} \times \frac{1}{2} < \underbrace{\frac{9}{2}|\cos q|}_{S} < \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{9}{4} < S < \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad \therefore S \in \left\langle \frac{9}{4}; \frac{9\sqrt{3}}{4} \right\rangle$$

52. Si: $-\frac{11\pi}{6} < \theta < -\frac{7\pi}{6}$, hallar el número de valores enteros que adopta:

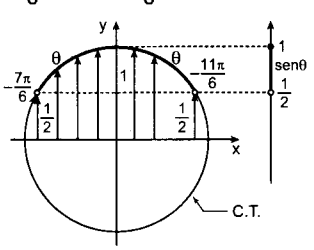
$$T = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} + \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

Resolución:

$$T = \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$T = \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Dato: $-\frac{11\pi}{6} < \theta < -\frac{7\pi}{6}$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \text{sen}\theta \leq 1 \Rightarrow 2 > \frac{1}{\text{sen}\theta} \geq 1$$

$$\frac{5}{2} > \frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{25}{4} > \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{1}{2}\right]^2 \geq \frac{9}{4}$$

$$\frac{25}{4} - \frac{1}{4} > \underbrace{\left[\frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}}_{T} \geq \frac{9}{4} - \frac{1}{4}$$

$6 > T \geq 2 \Rightarrow T = \{2; 3; 4; 5\}$

$\therefore$ T adopta 4 valores enteros

53. Al simplificar la expresión $\dfrac{\text{sen}(90° - \alpha)\text{sen}10°}{\text{sen}370° \cos\alpha}$ se obtiene

Resolución:

$$\frac{\text{sen}(90° - \alpha)\text{sen}10°}{\text{sen}370° \cos\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}\alpha\, \text{sen}10°}{\text{sen}(360° + 10°)\cos\alpha} = \frac{\cancel{\cos\alpha}\, \cancel{\text{sen}10°}}{\cancel{\text{sen}10°}\, \cancel{\cos\alpha}} = 1$$

54. Calcular el valor de

$$P = \cos(1560°) - \tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)$$

Resolución:

$$P = \cos(1440° + 120°) - \tan\left(16\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P = \cos[4(360°) + 120°] - \tan\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P = \cos(120°) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$P = \cos(90° + 30°) + \tan\frac{\pi}{4}$$

$$P = -\,\text{sen}30° + \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

55. Hallar el valor de

$$M = 3\sec\left(\frac{19}{3}\pi\right) + \cot\left(23\frac{\pi}{6}\right) + 12\tan\left(\frac{19}{6}\pi\right)\text{sen}\left(\frac{10}{3}\pi\right)$$

Resolución:

$$M = 3\sec\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 12\tan\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\sec\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{6} + 12\tan\frac{\pi}{3}\left(-\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3(2) - \sqrt{3} + 12(\sqrt{3})\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 6 - \sqrt{3} - 18 \Rightarrow -(12 + \sqrt{3})$$

56. Siendo α un ángulo positivo del IIIC menor que una vuelta, determinar el signo de las siguientes expresiones:

$$M = \text{sen}(2\alpha - 180°)\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$N = \frac{\sec\frac{2\alpha}{3} - 1}{\tan\left(\frac{\alpha + 30°}{2}\right)}$$

Resolución:

Si: $\alpha > 0 \wedge \alpha \in \text{III}_c \Rightarrow 180° < \alpha < 270°$

Entonces:

$$M = \underbrace{\text{sen}(2\alpha - 180°)}_{\text{III}_c \vee \text{IV}_c}\ \underbrace{\tan\frac{\alpha}{2}}_{\text{II}_c}$$

$$\Rightarrow M = (-)(-) = (+)$$

$$N = \frac{\sec\frac{2\alpha}{3} - 1}{\tan\left(\frac{\alpha + 30°}{2}\right)} \qquad ...(\gamma)$$

Sea: $120° < \dfrac{2\alpha}{3} < 180° \Rightarrow \dfrac{2\alpha}{3} \in \text{II}_c$

$105° < \dfrac{\alpha + 30}{2} < 150° \Rightarrow \dfrac{\alpha + 30}{2} \in \text{II}_c$

En (γ): $N = \dfrac{(-) - 1}{(-)} = \dfrac{(-)}{(-)} = (+)$

57. Sabiendo que

$S = \tan[k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha];\ k \in \mathbb{Z}$

$T = \csc[n\pi + (-1)^n \alpha];\ n \in \mathbb{Z}$

Calcule $E = \dfrac{S^2 - T^2}{ST}$

Resolución:

Observación: $\tan(k\pi + x) = \tan x;\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Dato: $S = \tan(k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha)$

De la observación

$\therefore\ S = -\cot\alpha$

Dato: $T = \csc[n\pi + (-1)^n\alpha]$

Si n es par $\Rightarrow T = \csc\alpha$

Si n es impar $\Rightarrow T = \csc\alpha$

Luego $T = \csc\alpha\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en E, se tiene

$$E = \frac{\cot^2\alpha - \csc^2\alpha}{-\cot\alpha\csc\alpha} = \frac{-1}{-\cot\alpha\csc\alpha}$$

$\therefore\ E = \tan\alpha\,\text{sen}\alpha$

58. Hallar el valor de M en la expresión:

$$\frac{1}{2}M = \text{sen}(-510°) + \tan\left(\frac{11\pi}{4}\right)$$

Resolución:

$$\frac{1}{2}M = \text{sen}(-510°) + \tan\left(\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$= -\,\text{sen}(510°) + \tan\left(\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$= -\,\text{sen}(360° + 150°) + \tan\left(2\pi + 3\frac{\pi}{4}\right)$$

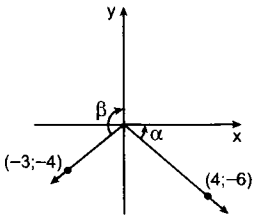
$$= -\,\text{sen}150° + \tan 3\frac{\pi}{4}$$

$$= -\,\text{sen}(180° - 30°) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\,\text{sen}30° - \cot\frac{\pi}{4}$$

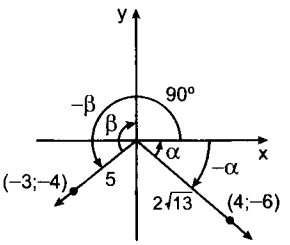
$$\frac{1}{2}M = -\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow M = -3$$

59. Con los datos de la figura, hallar el valor de la expresión $\dfrac{\sqrt{13}\,\text{sen}\alpha\,\sec\beta}{\tan\beta}$



Resolución:

Acomodando los ángulos a posición normal



i. De la figura:
$\csc(90° - \beta) = \dfrac{5}{-4} \Rightarrow \sec\beta = \dfrac{-5}{4}$

ii. $\cot(90 - \beta) = \dfrac{-3}{-4} \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{3}{4}$

iii. $\text{sen}(-\alpha) = \dfrac{-6}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \dfrac{6}{2\sqrt{13}}$

Nos piden:

$$E = \frac{\sqrt{13}\,\text{sen}\alpha \times \sec\beta}{\tan\beta} = \frac{\sqrt{13}(6/2\sqrt{13})(-5/4)}{3/4} \quad \therefore -5$$

60. Obtenga el valor de M, si: $M = \dfrac{\text{sen}\left(5\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(4\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 60°}$

Resolución:

$$M = \frac{\text{sen}\left(5\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(4\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 60°}$$

$$M = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}}{\cos 60°} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3})}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

61. Hallar el valor de la expresión:

$$\sec\left(\frac{61\pi}{3}\right) - \tan(1935°)$$

Resolución:

Nos piden:

$$E = \sec\left(\frac{61\pi}{3}\right) - \tan(1935°)$$

$$E = \underbrace{\sec\left(20\pi + \frac{\pi}{3}\right)} - \tan(5(360°) + 135°)$$

$$E = \underbrace{\sec\frac{\pi}{3}}_{2} - \underbrace{\tan 135°}_{-1} = 2 + 1 = 3$$

62. Calcular: $S = \left(\dfrac{\cos 300°\csc 210°\cot 330°}{\text{sen}225°\tan 565°\csc 600°}\right)\left(\dfrac{1}{\cot 25°}\right)$

Resolución:

Reduciendo al primer cuadrante

$\cos 300° = \cos(270° + 30°) = \text{sen}30° = 1/2$

$\csc 210° = \csc(180° + 30°) = -\csc 30° = -2$

$\cot 330° = \cot(360° - 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$

$\text{sen}225° = \text{sen}(270° - 45°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 565° = \tan(360° + 205°) = \tan 205°$
$= \tan(180° + 25°) = \tan 25°$

$\csc 600° = \csc(360° + 240°) = \csc 240°$
$= \csc(270° - 30°) = -\sec 30° = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

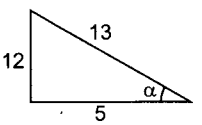
Reemplazando:

$$S = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(-2)(-\sqrt{3})}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\tan 25°)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}\right]\left[\frac{1}{\cot 25°}\right]$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{\frac{(\sqrt{2})(\sqrt{3})}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

63. Si a es un ángulo en posición normal del cuarto cuadrante, tal que $\text{sen}\alpha = -\dfrac{12}{13}$, calcular $\tan(180° + \alpha) + \text{sen}(\alpha - 180°) - \cos(450° + \alpha)$.

Resolución:



$E = \tan(180° + \alpha) + \text{sen}(\alpha - 180°) - \cos(450° + \alpha)$
$E = \tan\alpha - \text{sen}(180° - \alpha) - \cos(360° + 90° + \alpha)$
$E = \tan\alpha - \text{sen}(\alpha) + \text{sen}\alpha \Rightarrow \tan\alpha$

Dato: $\text{sen}\alpha = -12/13 \Rightarrow \tan\alpha = -\dfrac{12}{5}(\tan\alpha < 0, \alpha \in \text{IVC})$

64. Reducir:

$$A = \frac{\text{sen}(90° + x)\tan(360° - x)\cos(180° + x)}{\cos(270° - x)\cos(180° - x)}$$

Resolución:

Por partes:

$\cos(180 + x) = -\cos x$

$\cos(180 - x) = -\cos x$

$\text{sen}\underbrace{(90° + x)}_{\text{IIC}} = +\cos x$

$\tan\underbrace{(360° - x)}_{\text{IVC}} = -\tan x$

$\cos\underbrace{(270° - x)}_{\text{IIIC}} = -\text{sen}x$

Luego: $A = \dfrac{(\cos x)(-\tan x)(-\cos x)}{(-\text{sen}x)(-\cos x)} = \dfrac{\cos x\tan x}{\text{sen}x}$

$A = \left(\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}\right)\left(\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}\right) \Rightarrow A = 1$

65. Siendo α y β ángulos coterminales, distintos y además complementarios, calcular: $\text{sen}\beta + \cos\alpha$, si β es el menor ángulo positivo.

Resolución:

Como α y β son ángulos coterminales, tenemos $\alpha - \beta = n(360°)$; $n \in \mathbb{Z}$, además a y b son complementarios, entonces $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 45° - n\,(180°)$ como β es el menor ángulo positivo, y además diferente de a, entonces $n = -1$, de donde obtenemos que: $\beta = 225°$ y $\alpha = -135°$

Piden: $\text{sen}\beta + \cos\alpha = \text{sen}225° + \cos(-135°)$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

66. Siendo α, β, θ ángulos cuadrantales distintos, mayores o iguales que 0° pero menores o iguales que 270°. Además cumplen: $\cos\beta = \sqrt{\text{sen}\theta - \sqrt{\sec\alpha}}$

Calcular: $\cos(\alpha + \beta + \theta)$

Resolución:

Condición: $0° \leq \alpha, \beta, \theta \leq 270°$

como: $\cos\beta = \sqrt{\text{sen}\theta - \sqrt{\sec\alpha}}$ ...(1)

α, β, θ son ángulos cuadrantales

$\Rightarrow \alpha, \beta, \theta = 0°, 90°, 180°, 270°$

como la $\sec\alpha$ debe ser positiva; entonces α sólo puede cumplir: $\alpha = 0° \Rightarrow \sec\alpha = \sec 0° = 1$

En (1):

$\cos\beta = \sqrt{\text{sen}\theta - 1}$ ...(2)

como $\text{sen}\theta - 1 \geq 0 \Rightarrow \text{sen}\theta \geq 1$

$\Rightarrow \underbrace{\text{sen}\theta > 1}_{\text{absurdo}}$ o $\underbrace{\text{sen}\theta = 1}_{q = 90°}$

En (2)

$\cos\beta = \sqrt{1 - 1} = 0$; $\beta = 90°, 270°$

como α, β y θ son distintos, entonces $\beta = 270°$

Piden: $\cos(\alpha + \beta + \theta) = \cos(0° + 270° + 90°)$

$= \cos 360° = 1$

67. Si: α y β son ángulos coterminales, simplificar:

$$M = \frac{\cot(3\alpha - 3\theta + 45°) + \cos\alpha\sec\theta}{\text{sen}\left(\frac{8\alpha - 8\theta + 90°}{2}\right)}$$

Resolución:

Como α y θ son ángulos coterminales, se cumplen:

i. $\alpha - \theta = n \times 360°$; $n \in Z$

ii. $Rt(\alpha) = Rt(\theta)$

Entonces, en M tenemos

$$M = \frac{\cot(3(n \times 360°) + 45°) + \cos\alpha\sec\theta}{\text{sen}\left(\frac{8(n \times 360°) + 90°}{2}\right)}$$

$$M = \frac{\cot 45° + 1}{\text{sen}45°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

68. Reducir: $A = \dfrac{\text{sen}(24\pi + x)}{\cos(4\pi - x)} + \tan(80\pi - x)$

Resolución:

Por partes:

$\text{sen}(24\pi + x) = \text{sen}(12 \text{ vueltas} + x) = \text{sen}x$

$\cos(4\pi - x) = \cos(2 \text{ vueltas} - x) = \cos(-x) = \cos x$

$\tan(80\pi - x) = \tan(40 \text{ vueltas} - x) = \tan(-x) = -\tan x$

Luego: $\boxed{\dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = \tan x}$

$A = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} + (-\tan x) \Rightarrow \tan x - \tan x \Rightarrow A = 0$

69. Simplificar:

$$S = \frac{\text{sen}(\pi - \theta)\cos(2\pi - \theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\text{sen}\theta\tan(\pi - \theta)\cos(\pi - \theta)\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

Resolución:

$\text{sen}(\underbrace{\pi - \theta}_{\text{IIC}}) = \text{sen}\theta$; $\cos(\underbrace{2\pi - \theta}_{\text{IVC}}) = \cos\theta$

$\cot\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \theta}_{\text{IIC}}\right) = -\tan\theta$; $\text{sen}\left(\underbrace{\frac{3\pi}{2} - \theta}_{\text{IIIC}}\right) = -\cos\theta$

$\tan(\underbrace{\pi + \theta}_{\text{IIIC}}) = \tan\theta$; $\cos(\underbrace{\pi - \theta}_{\text{IIC}}) = -\cos\theta$

$\tan\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \theta}_{\text{IIC}}\right) = -\cot\theta$

Reemplazamos:

$$S = \frac{\text{sen}\theta\cos\theta(-\tan\theta)(-\cos\theta)}{\text{sen}\theta\tan\theta(-\cos\theta)(-\cot\theta)} \quad \therefore S = \text{sen}\theta$$

70. Reducir:

$$T = \frac{\sec\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right)\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)}{\sec(15\pi - \alpha)\cos(5\pi - \alpha)}$$

Resolución:

$\sec\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\left[6(2\pi) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$

$\sec(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_{\text{IC}}) = \cos\alpha$

$\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen}\left[2\pi + \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right] =$

$\text{sen}(\underbrace{\frac{3\pi}{2} + \alpha}_{\text{IVC}}) = -\cos\alpha$

$\sec(15\pi - \alpha) = \sec[7(2\pi) + (\pi - \alpha)] =$

$\sec(\underbrace{\pi - \alpha}_{\text{IIC}}) = -\sec\alpha$

$\cos(5\pi - \alpha) = \cos[2(2\pi) + (\pi - \alpha)] =$

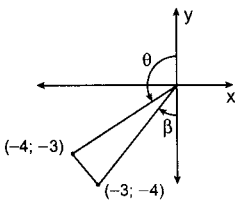
$\cos(\underbrace{\pi - \alpha}_{\text{IIC}}) = -\cos\alpha$

Reemplazando: $T = \dfrac{(\csc\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\sec\alpha)(-\cos\alpha)} = -\cot\alpha$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

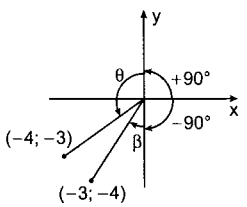
PROBLEMA 1 (UNI (2011 - I)

En la figura mostrada (tanq)(cotb) es igual a:



A) $\frac{9}{16}$ B) 1 C) $\frac{16}{9}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 3

Resolución:



Del gráfico:

i. $\underbrace{\cot(90° + \theta)} = \frac{x}{y} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$-\tan\theta = 4/3 \Rightarrow \quad \therefore \tan\theta = -4/3$

ii. $\underbrace{\tan(-90° + \beta)} = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

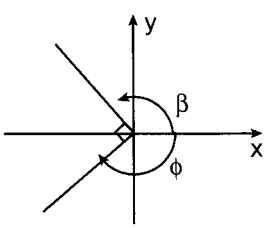
$-\cot\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \quad \therefore \cot\beta = -4/3$

Piden: $(\tan\theta)(\cot\beta) = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$

Clave: C

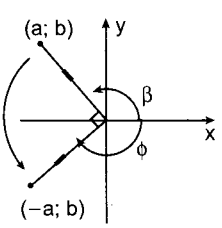
PROBLEMA 2 (UNI 2012 - II)

En la figura mostrada, el valor de $\tan\phi \times \tan\beta$, es:



A) −2 B) −1 C) −1/2 D) 1/2 E) 1

Resolución:



Piden: $\tan\phi \times \tan\beta = \left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\ 0\ -1$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Si $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{3x+5}$; $\cot\left(\frac{3\pi}{2}\right) = y - 4$

Calcule x + y

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

Resolución:

$\tan\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{3x+5} \Rightarrow 1 = \frac{1}{3x+5} \Rightarrow 3x + 5 = 1 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$

$\cot\frac{3\pi}{2} = y - 4 \Rightarrow 0 = y - 4 \Rightarrow y = 4 \quad \therefore x + y = \frac{8}{3}$

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

Para $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, calcular la variación de

$$M = \cos^2\alpha - \cos\alpha + 2$$

A) $\left[\frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right]$ B) $\left[\frac{7}{4}; 3\right]$ C) $\left[\frac{7}{4}; 4\right]$ D) $\left[\frac{9}{4}; 4\right]$ E) $\left[\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right]$

Resolución:

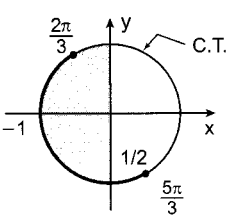
Completando cuadrados:

$M = \underbrace{\cos^2\alpha - \cos\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2$

$M = \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

Como $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, graficando en la C.T.

Para hallar la variación de cosa.



$-1 \le \cos\alpha \le \frac{1}{2} \Rightarrow -1/2 - \frac{3}{2} \le \cos\alpha - \frac{1}{2} \le 0$

$\Rightarrow \frac{9}{4} \ge \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \ge 0$

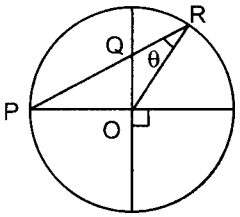
$+7/4\ \ 4 \ge \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \ge \frac{7}{4} \quad \therefore M \in \left[\frac{7}{4}; 4\right]$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

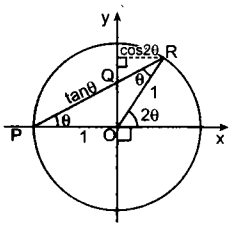
En la circunferencia trigonométrica adjunta, determine

$$\frac{\text{área del } \Delta POR}{\text{área del } \Delta RQO}$$



A) $\csc 2\theta + 1$ B) $\csc\theta + 1$ C) $\sec\theta + 1$
D) $\sec 2\theta + 1$ E) $\sec 2\theta + 2$

Resolución:



Piden: $\dfrac{\text{área del } \Delta POR}{\text{área del } \Delta RQO} = \dfrac{\frac{1\times 1}{2}\operatorname{sen}(180° - 2\theta)}{\frac{\tan\theta\cos 2\theta}{2}}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{\tan\theta\cos 2\theta} = \dfrac{\tan 20}{\tan\theta} = \sec\theta + 1$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si θ pertenece al tercer cuadrante, hallar el signo de las siguientes expresiones:

$$S = \text{sen}\frac{\theta}{4}\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{8} \wedge T = \log\left(\text{sen}\frac{\theta}{16}\right)^{\text{sen}\theta}$$

si: $\cos\frac{\theta}{4} > 0 \wedge \text{sen}\frac{\theta}{8} < 0$

además: $\frac{\theta}{4} \notin IC \wedge \frac{\theta}{8} \notin IVC$

A) +; + B) −; − C) −; +
D) +; − E) (+ ∨ −); +

2. Hallar los valores de **n** a partir de las siguientes condiciones:

$\cos^2\alpha + \cos\alpha = \text{sen}^2\beta + \text{sen}\beta, \beta \in \mathbb{R}$ ...(1)

$\cos\alpha = \frac{[\![n]\!] - 1}{2}$ ...(2)

A) $[-1; 3]$ B) $[-1; 4]$ C) $[-1; 4\rangle$
D) $\langle -1; 3\rangle$ E) $\langle -2; 3\rangle$

3. Supongamos que sea **n** un número entero mayor que uno y que el ángulo α satisface a la desigualdad $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$. Indicar la alternativa correcta.

A) $\text{sen}(n\alpha) > n\text{sen}\alpha$ B) $\text{sen}(2n\alpha) > n$
C) $\cos(n\alpha) > 2n$ D) $\tan(n\alpha) > 2n\tan\alpha$
E) $\tan(n\alpha) > n\tan\alpha$

4. Sabiendo que β y θ son ángulos cuadrantes, calcular:

$$T = \sqrt{\tan\alpha\tan\beta\tan\theta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\theta + 1} + \sqrt{\tan\alpha\tan\beta\tan\theta} + \sqrt{\cot\alpha - 1} + \sqrt{1 - \cot\alpha} + \sqrt{\cot\alpha - \cos\theta - 1}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

5. Sabiendo que:

$|\text{sen}\theta| = -\text{sen}\theta$; $|\cos\theta| = \cos\theta$; $|\cot\theta| = \cot\theta$

Calcular $P = \frac{\left|\text{sen}\left|\theta\right|\right|}{\left|\tan\left|\frac{\theta}{2}\right|\right|} + \ln\left(\left|\cot\theta\right|e + \left|\tan\frac{\theta}{2}\right|e\right)$

donde: e = 2,71...

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $\sqrt{2} + 1$

6. Si α y θ son ángulos en posición regular, positivos y menores que una vuelta, los cuales se encuentran en diferentes cuadrantes y además se cumple:

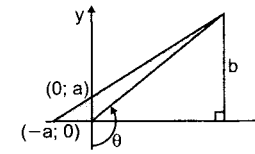
$|\tan\alpha| = -\tan\alpha$ y $\tan\alpha - \cos\theta > 0, \alpha > \theta$,

hallar el signo de:

$$S = \frac{\tan\theta + \cos\alpha(\tan\theta - \cos\theta)}{\text{sen}\alpha\tan^2\theta + \text{sen}\theta\cos\alpha}$$

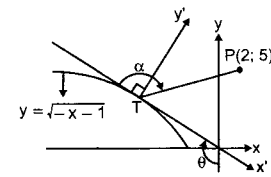
A) + B) − C) + ∨ −
D) + ∧ − E) faltan datos

7. Del gráfico mostrado, calcular el mayor valor de la $\cot\theta$, si el área del triángulo sombreado es 8, además a y b son números enteros.



A) −3/4 B) −4/3 C) −16/15
D) −15/16 E) −1

8. A partir del gráfico mostrado, hallar el valor de $\tan\theta + \cot\alpha$. (T punto de tangencia).



A) 1 B) 1/2 C) 1/3
D) 2 E) 3

9. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. Si $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, entonces $\frac{\cos a}{\cos b} > \frac{a}{b}$

II. Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces $2\log\theta + \tan\theta < 0$

III. Si $\theta \in IIC$, entonces $\text{sen}(\cos\theta) < \cos(\text{sen}\theta)$

IV. Si el menor valor de $\tan^2\theta + k\tan\theta - 7$ es 8, entonces k = 2

A) VVVF B) VFFV C) FFVF
D) VFVV E) VFVF

10. Bajo qué condiciones es posible o imposible la expresión: $\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 + 4ab}{(a+b)^2 - 2ab}$

Sabiendo que $90° < \theta < 180°$, a y b son dos números cuales quiera pero del mismo signo.

A) Es imposible
B) Siempre es posible
C) Posible solo si a > b
D) Imposible si a = b
E) Posible solo si a < 0; b < 0

11. Si α, β y $T \in \mathbb{R}$, además se cumple las siguientes condiciones:

$\log(\text{sen}\alpha) + \sqrt[8]{\cos\beta} = 1$ ...(1)

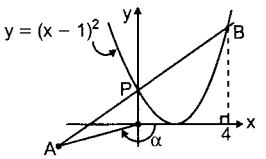
$[\![T]\!] = \text{sen}\alpha$ ...(2)

hallar el valor de $\text{sen}\frac{\alpha}{3} + \cos\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{\pi}$ siendo α el mayor valor negativo y β el menor valor no negativo.

A) 0 B) −1 C) 1
D) 2 E) π

12. A partir del siguiente gráfico, hallar el valor de:

$$21\cot\alpha - 4\tan\alpha, \text{ si } AP = PB$$



A) 5 B) 1/3 C) 4
D) 8 E) 7/3

13. Se tiene dos ángulos coterminales cuyo cociente es equivalente al valor de la tangente de 8° y que su suma de estos no es mayor que 500° ni menor de 400°. Calcular la suma de las tangentes de dichos ángulos.

A) 1 B) −1 C) 0
D) $-2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

14. Sabiendo que: $\cos(\text{sen}\theta) > \text{sen}(\cos\theta)$ y $\log(\text{sen}\phi) \leq |\cot\phi|$; indicar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. $\theta \in IC$
II. $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
III. $\theta \in \mathbb{R}$
IV. $\theta \in IC \vee IIC$
V. $\theta \in \langle 2k\pi; (2k+1)\pi\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$

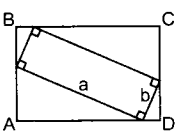
A) VFVVV B) FVVFV C) VFVVF
D) VFVFV E) FFVFF

15. A partir de la siguiente serie de $[\![\csc\theta]\!]$ términos siendo θ agudo, calcular el mayor valor de n.

$$\frac{1}{[\![\csc\theta]\!]+1} + \frac{1}{[\![\csc\theta]\!]+2} + \frac{1}{[\![\csc\theta]\!]+3} + \ldots > n$$

A) 1 B) 1/2 C) 1/4
D) 1/8 E) 1/16

16. El área del rectángulo ABCD es m^2, indicar la alternativa correcta.



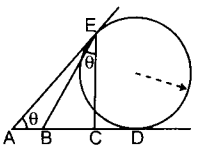
A) $\sqrt{ab} < m < \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{ab} \leq m < 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
C) $\sqrt{ab} \leq m \leq 2(\sqrt{a^2+b^2})$ D) $\sqrt{ab} < m < \frac{a+b}{2}$
E) $\sqrt{ab} < m \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

17. Si α, β, θ y $\varnothing$ son ángulos agudos, hallar el menor valor de A.

$$\frac{(\sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2)^2 + (\sec^2\theta + \sec^2\varnothing - 2)^2}{(\tan\alpha\tan\theta + \tan\beta\tan\phi)^2} \geq A$$

A) 2/3 B) 2 C) 3
D) 1/4 E) 1/2

18. Siendo E y D puntos de tangencia; además B y C trisecan a AD, calcular: $99\cos\theta - 36\cos^2\theta$



A) 17/13 B) 121/12 C) 121/2
D) 10/13 E) 4/5

19. Hallar el conjunto de valores de:

$$T = \sec[\sec(\text{sen}\alpha)] + \csc[\sec(\text{sen}\alpha)]$$

A) $\langle -\infty; -2\sqrt{2}] \cup [4\sqrt{2}; +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -2\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
E) $\langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

20. Dos alumnos dibujan circunferencias trigonométricas en dos sistemas de coordenadas diferentes. Para el primer alumno A la unidad adoptada mide 3 cm y para el alumno B mide 4 cm. Si ambos ubican un arco en posición normal θ en el IVC y con los módulos de $\tan\theta$ y $\sec\theta$ en A y B se toman como cateto e hipotenusa de un triángulo rectángulo respectivamente. Calcular la longitud del otro lado en centímetros:

A) $\sqrt{3+\tan^2\theta}$ B) $\sqrt{4-3\tan^2\theta}$ C) $\sqrt{1-\tan^2\theta}$
D) $\sqrt{2-\tan^2\theta}$ E) $\sqrt{3-\tan^2\theta}$

21. Dado el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ obtener la variación del arco ϕ sabiendo que $\sec\phi$ es positivo, $4\text{sen}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \sec\phi$.

A) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ B) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ C) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$
D) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$ E) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

22. Siendo α un arco perteneciente al tercer cuadrante, hallar los valores de la siguiente expresión:

$$S = \frac{2 - 4\cos\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha + \tan 105°}$$

A) $\langle -2; \sqrt{3}\rangle$ B) $\langle \sqrt{3} - 3; \sqrt{3} - 2\rangle$
C) $\langle -1; \sqrt{3} - 1\rangle$ D) $[\sqrt{3} - 3; \sqrt{3} + 2\rangle$
E) $\langle 0; 2 - \sqrt{3}\rangle$

23. Calcular el menor valor de k, el cual debe verificar la siguiente desigualdad:

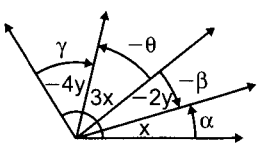
$$k \geq \text{sen}^2(\cos\alpha) - 2\cos(\cos\alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}_0^+$$

A) -1 B) -2
C) $\text{sen}^2 1 - 2\cos 1$ D) $\cos^2 1 - 2\cos 1$
E) $\text{sen}^2 1 + 2\cos 1$

24. Si se verifica la siguiente condición: $\tan^3\alpha < 9\tan\alpha$ Hallar el valor de $\sec\alpha\csc\alpha$ si $\tan\alpha$ toma su máximo valor entero negativo.

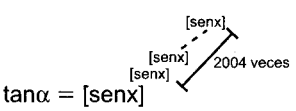
A) $-17/4$ B) -3 C) -2
D) -4 E) $-2/3$

25. En el siguiente gráfico, calcular el mínimo valor de A, si: $A = \frac{3\beta}{\alpha} + \frac{8\theta}{\gamma}$



A) -10 B) $+12$ C) -14
D) 16 E) 4

26. A partir de la siguiente igualdad, hallar α si $\tan\alpha$ es un número real.



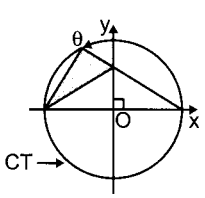
A) $\varnothing$ B) $k\pi \pm \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$
C) $2k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$ D) $k\pi - \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$
E) $\mathbb{R}$

27. ¿Qué alternativa es correcta a partir de la siguiente expresión?

$$\sec(\cos x) + \tan\left(\frac{[\![\text{senx}]\!]}{2}\right)$$

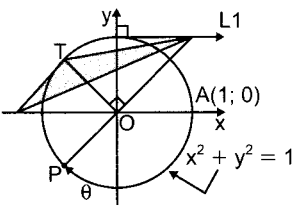
A) Su máximo valor es 2.
B) Es siempre positiva.
C) Es siempre negativa.
D) No tiene valor real para todo valor de x.
E) Los valores de la expresión son solo números enteros.

28. De la figura, determinar el área de la región sombreada en términos de θ.



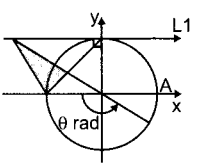
A) $2\text{sen}\theta\cot\frac{\theta}{2}$ B) $-\cos\theta\cot\frac{\theta}{2}$
C) $2\cos 2\theta\cot\frac{\theta}{2}$ D) $-\cos 2\theta\cot\frac{\theta}{2}$
E) $-\text{sen}2\theta\tan\frac{\theta}{2}$

29. A partir del gráfico adjunto, hallar el área de la región sombreada, si T es punto de tangencia.



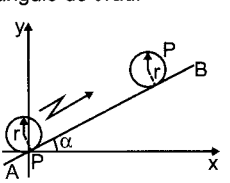
A) $\frac{1}{2}\cot\theta$ B) $\cot\theta$ C) $\frac{1}{2}\tan\theta$
D) $\tan\theta$ E) $-\frac{1}{2}\sec\theta$

30. Calcular el área de la región sombreada, en el círculo trigonométrico mostrado.



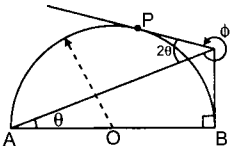
A) $\frac{\cos\theta}{2(\cos\theta - \text{sen}\theta)}$ B) $\frac{2\cos\theta}{\cos\theta - 2\text{sen}\theta}$
C) $\frac{\text{sen}\theta}{2(\text{sen}\theta - \cos\theta)}$ D) $\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta + 2\text{sen}\theta}$
E) $\frac{-\cos\theta}{2\text{sen}\theta - \cos\theta}$

31. Hallar las coordenadas del punto P, luego que la rueda de radio **r** se desplaza sobre la pista AB barriendo un ángulo de θrad.



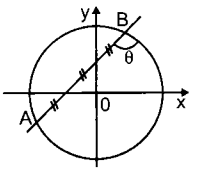
A) $x = \theta r\cos\alpha - r\text{sen}\alpha - r\text{sen}(\theta - \alpha)$
$y = \theta r\text{sen}\alpha + r\cos\alpha - r\cos(\theta - \alpha)$
B) $x = \theta r\cos\alpha - r\text{sen}\alpha - r\text{sen}(\theta - \alpha)$
$y = \theta r\text{sen}\alpha + r\cos\alpha + r\cos(\theta - \alpha)$
C) $x = \theta r\text{sen}\alpha - r\cos\alpha - r\cos(\theta - \alpha)$
$y = \theta r\cos\alpha + r\text{sen}\alpha - r\text{sen}(\theta - \alpha)$
D) $x = \theta r\text{sen}\alpha + r\cos\alpha + r\cos(\theta - \alpha)$
$y = \theta r\cos\alpha + r\text{sen}\alpha + r\text{sen}(\theta - \alpha)$
E) $x = \theta r\text{sen}\alpha + r\cos\alpha + r\cos(\theta + \alpha)$
$y = \theta r\cos\alpha - r\text{sen}\,\alpha + r\text{sen}(\theta - \alpha)$

32. Del gráfico, hallar: $S = \text{sen}\phi\sec\left(\frac{17\pi}{4}\right)$



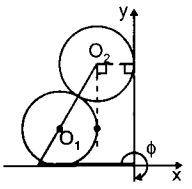
A) $\frac{2}{9}$ B) $-\frac{2}{9}$ C) $-\frac{8}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{9}{4}$

33. Del gráfico, calcular: $\tan\theta$



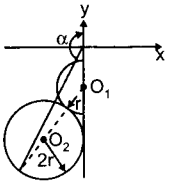
A) 2,4 B) −2 C) 3,1
D) −3 E) −1/3

34. Si en la figura las circunferencias son iguales, calcular: $\tan\phi$



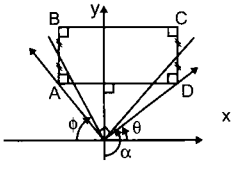
A) $2(2 + \sqrt{3})$ B) $2(\sqrt{3} - 2)$
C) $4(\sqrt{3} - 2)$ D) $-4(2 + \sqrt{3})$
E) $-5(2 + \sqrt{3})$

35. Del gráfico, calcular: $T = 2\cot\alpha - \sqrt{5}$



A) 0,3 B) 0,4 C) 0,5
D) θ,6 E) 0,8

36. De acuerdo al gráfico mostrado, señalar el equivalente de: $S = \tan\alpha\tan\phi$



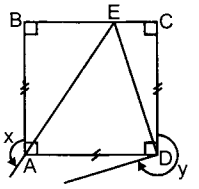
A) $\tan^2\theta$ B) $\cot^2\theta$ C) $-\tan^2\theta$
D) $-\cot^2\theta$ E) $\tan\theta$

37. En qué tipo de triángulo ABC se cumple:

$$\text{sen}(A + 2B + 3C) = \text{sen}(2A + 3B + 2C)$$

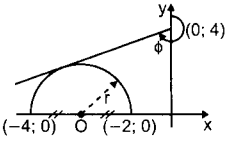
A) Equilátero B) Isósceles
C) Rectángulo D) Acutángulo
E) Obtusángulo

38. Del gráfico, hallar: $T = \cot x(1 + \cot y)$



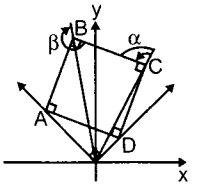
A) 1 B) −2/3 C) −2
D) −1 E) −1/2

39. Del gráfico, calcular: $T = \dfrac{1 - \cos\phi}{1 - \sqrt{6}\,\text{sen}\phi}$



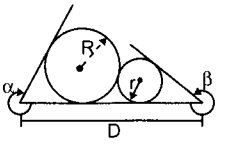
A) 1,5 B) − 1 C) 2
D) −2 E) −1/2

40. Si en el gráfico, ABCD es un cuadrado, calcular el máximo valor de: $S = \tan\alpha + \tan\beta$



A) −2 B) −4 C) −6
D) −8 E) −12

41. Del gráfico, hallar D en función de R, r, α y β



A) $2\sqrt{Rr} + R\tan\frac{\alpha}{2} - r\cot\frac{\beta}{2}$

B) $2\sqrt{Rr} + R\cot\frac{\alpha}{2} - r\cot\frac{\beta}{2}$

C) $2\sqrt{Rr} + R\cot\frac{\alpha}{2} + r\tan\frac{\beta}{2}$

D) $2\sqrt{Rr} - R\cot\frac{\alpha}{2} + r\cot\frac{\beta}{2}$

E) $2\sqrt{Rr} - R\cot\frac{\alpha}{2} + r\tan\frac{\beta}{2}$

42. Sabiendo que: $\tan(n\pi - x) = \cot\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) + 2;\ n \in \mathbb{Z}$

calcular:

$$S = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\tan x + \cot x - 2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\tan^2 x + \cot^2 x + 1}\right)$$

A) $\sqrt{3}/2$ B) $\sqrt{3}/4$ C) $\sqrt{2}/4$
D) $-\sqrt{2}/4$ E) $-\sqrt{3}/4$

43. Señalar el máximo valor de k si: $(x \neq \frac{n\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z})$

$$k - \tan(5\pi - x)\left[\tan\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \tan(5\pi + x)\right] \geq \cot(3\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cot(3\pi - x)\right]$$

A) 0 B) 2 C) 4
D) −2 E) −4

44. Sabiendo que: $\sum_{n=1}^{2003}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\theta\right)\right] = \frac{1}{2};\ \theta \in \text{IIIC}$

calcular: $T = \sum_{n=1}^{2003}\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\theta\right)\right\}$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}/2$
D) −1/2 E) $-\sqrt{15}/4$

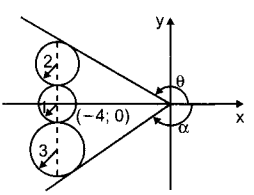
45. Si el lado final del ángulo en posición canónica β pasa por el punto M, que es punto medio del segmento AB, tal que la suma de coordenadas de los puntos A y B es cero.

Calcular: $S = \tan\beta + \sqrt{2}\csc\beta$

A) 1 B) 3 C) −3
D) −1 E) A o C

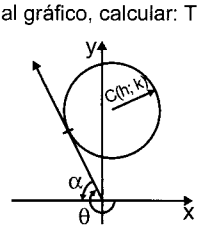
46. Del gráfico, calcular:

$$R = (2\tan^2\alpha - 5\tan\alpha)(7\tan^2\theta + 10\tan\theta)$$



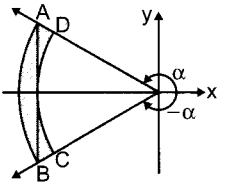
A) 3/8 B) 7/24 C) 35/24
D) 5/24 E) 13/7

47. De acuerdo al gráfico, calcular: $T = \frac{1 - \tan\theta}{1 - \tan\alpha}$



A) k/h B) h/k C) −k/h
D) −h/k E) −kh

48. En el gráfico mostrado el área de la región sombreada es **n** veces el área de la región no sombreada. Hallar: $\tan\alpha$



A) n B) −n C) $\sqrt{n}$
D) $-\sqrt{n}$ E) $-\sqrt{n}/n$

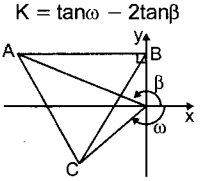
49. En la siguiente igualdad:

$\tan\alpha = \sqrt{\tan\beta + 2} + \sqrt{\tan\theta + \cot\theta + 6}$
$\tan\alpha$ asume su mínimo valor: $\beta \in$ IVC; $\theta \in$ IIIC
calcular: $V = \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta + \cos\beta\cos\theta$

A) $\sqrt{10}/5$ B) $-\sqrt{10}/5$ C) $\sqrt{10}/10$
D) $-\sqrt{10}/10$ E) $-\sqrt{5}/5$

50. Siendo ABC un triángulo equilátero, calcular:

$$K = \tan\omega - 2\tan\beta$$



A) $-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}/3$ C) $-\sqrt{3}/3$
D) $-\sqrt{3}/2$ E) $\sqrt{3}$

51. Siendo θ un ángulo estándar positivo y del cuarto cuadrante, para el cual se cumple:

$$(\sec\theta)^{\sec\theta}\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = 1$$

donde se tiene que: $\tan\phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{64}}$
hallar el valor de: $V = \csc^2\theta + \cot^2\theta$

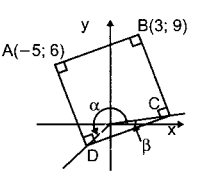
A) 7/9 B) 9/7 C) 2/7
D) 7/2 E) 2/3

52. Siendo θ un ángulo canónico perteneciente al IIIC tal que: $\tan^2\theta = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}$

calcular: $T = \sec\theta - \csc\theta$

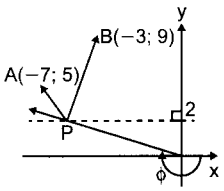
A) $\frac{5}{6}\sqrt{13}$ B) $-\frac{5}{6}\sqrt{13}$ C) $-\frac{\sqrt{13}}{6}$
D) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ E) $-\frac{\sqrt{13}}{3}$

53. Si ABCD: cuadrado, calcular: $S = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$



A) 4 B) 9 C) 6
D) 12 E) 15

54. Si en el gráfico, la suma AP + PB es mínima, calcular: $\cot\phi$



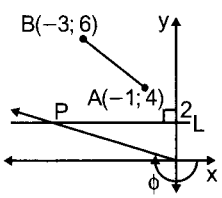
A) −1,8 B) − 2,8 C) −3,2
D) −2,9 E) − 1,6

55. Si α y β son dos ángulos cuadrantales positivos y menores a una vuelta. Además verifican la siguiente condición. $\operatorname{sen}\alpha + 1 + \tan\beta = 0$

Calcular: $V = \left[\dfrac{\csc(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right]^{(\cos 80°)^{\sec 180°}}$

A) $1/\sqrt{2}$ B) −1 C) 1
D) 2 E) −2.

56. Si en la figura desde P se divisa a AB bajo un ángulo máximo ($P \in \overleftrightarrow{L}$), calcular: $\cot\theta$



A) −2 B) −1/2 C) −2/3
D) −3/2 E) −3

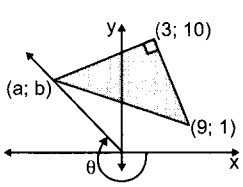
57. Se sabe que: θ_1, θ_2 y θ_3 son ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores que una vuelta. Si el coterminal de θ_1 pertenece al intervalo de −1380° al − 1320° y θ_3 es coterminal con $-\theta_3$.

Calcular:

$$S = 2\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta_2}{6}\right) + \cot\left(\frac{\theta_3}{4}\right)$$

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

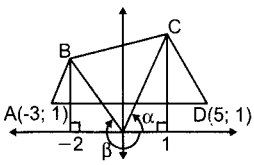
58. En el gráfico, el área del triángulo sombreado es igual a 60. Calcular: $S = 2a\tan\theta + 3b\cot\theta$



A) 4 B) −6 C) 9
D) −10 E) −11

59. Si el área del cuadrilátero ABCD es 10, calcular:

$$S = \frac{\tan\beta + 3}{\tan\alpha - 1}$$

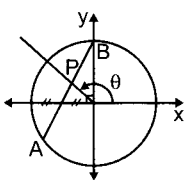


A) 0,125 B) −0,125 C) 0,875
D) −0,875 E) −0,315

60. Si en la igualdad: $\tan\alpha - \tan\beta = \sec^2\beta$ donde $\tan\alpha$ asume su mínimo valor posible, además: $\alpha \notin IC \wedge \beta \notin IIC$, calcular: $V = \operatorname{sen}\alpha\sec\beta$

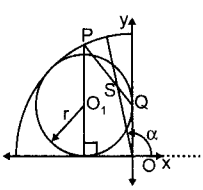
A) $0,2\sqrt{5}$ B) $-0,2\sqrt{5}$ C) $0,3\sqrt{5}$
D) $-0,3\sqrt{5}$ E) $-0,6\sqrt{5}$

61. SI en el gráfico: AP = 2PB, calcular: $\tan\theta$



A) −7/4 B) −4/7 C) −9/4
D) −4/9 E) −9/15

62. Del gráfico, calcular $\tan\alpha$, si: PS = SQ



A) $\sqrt{2+2\sqrt{2}} - 1$ B) $-\sqrt{2+2\sqrt{2}} - 1$
C) $-\sqrt{2+2\sqrt{2}} + 1$ D) $-\sqrt{2+2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$
E) $-\sqrt{2+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

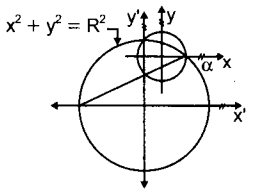
63. Sabiendo que: $\operatorname{sen}\phi = \tan\theta$; $\phi \in IIC \wedge \theta \notin IC$. Hallar: $\tan\phi$

A) $-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ B) $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ C) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

D) $-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ E) $-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}}$

64. De la figura, hallar el valor de:

$$T = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{R}\right) - \sqrt{2}\sec\left(\frac{\alpha}{R}\right) + \sqrt{2+\sqrt{2}}\tan\left(\frac{\alpha}{R}\right)$$



A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2}+1$

65. Indicar a que cuadrante pertenecen z e y, si se cumple:

$\sqrt{-\cot z} + \sqrt{\sec y} > 2$ ...(1)

$[\cos z - \operatorname{sen} y] = 1$ ...(2)

además: $y \neq \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

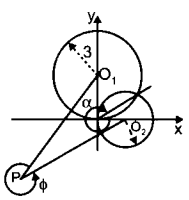
A) $y \in$ IC; $z \in$ IVC B) $y \in$ IIIC; $z \in$ IIC
C) $y \in$ IVC; $z \in$ IVC D) $y \in$ IIC; $z \in$ IC
E) $y \in$ IVC; $z \in$ IIC

66. A partir del gráfico, hallar el valor de:

$$V = 4\cos\phi - \sqrt{3}\tan\phi$$

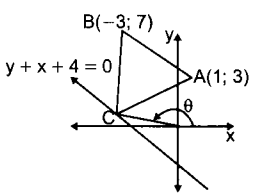
si α es coterminal con 30°, además; $PO_1 = PO_2$

La distancia más corta del punto P al segmento $\overline{O_1O_2}$ es de 3 unidades.



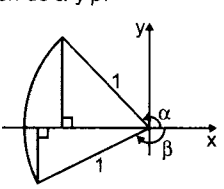
A) 5 B) 6 C) 7
D) 3 E) 4

67. Del gráfico, calcular: $\tan\theta$ (CB = CO)



A) −0,1 B) −0,2 C) −0,3
D) −0,4 E) −0,5

68. Del gráfico, expresar el área de la región sombreada en función de α y β.



A) $\frac{1}{2}(2\pi - \alpha + \beta + \operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}2\beta)$

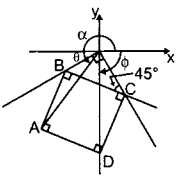
B) $\frac{1}{2}(4\pi - \alpha + \beta - \operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2\beta)$

C) $\frac{1}{4}(2\pi - \alpha + \beta - \operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2\beta)$

D) $\frac{1}{4}(4\pi - 2\alpha + 2\beta - \operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2\beta)$

E) $\frac{1}{4}(4\pi - 2\alpha + 2\beta + \operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}2\beta)$

69. Si en la figura, ABCD es un cuadrado, señalar el equivalente de: $S = (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi)^{-1}$



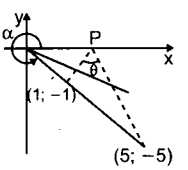
A) $\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

E) $-\frac{\sqrt{5}}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

70. Si en el gráfico, θ es máximo, (P ∈ eje x)

calcular: $T = \cot\alpha + 1$



A) $-\sqrt{0,2}$ B) $-\sqrt{0,3}$ C) $-\sqrt{0,4}$
D) $-\sqrt{0,5}$ E) $-\sqrt{0,6}$

71. Determinar el signo de: $\operatorname{sen}^3 Q \sec^5 Q \cot^4 Q$

A) −; si Q pertenece al IC.
B) +; si Q pertenece al IIC.
C) +; si Q pertenece al IIIC.
D) +; si Q pertenece al IVC.
E) −; si Q pertenece al IIC.

72. Si: $\alpha \in$ IIC $\wedge$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^2\alpha}} = (\operatorname{sen}\alpha)^{-\cos\alpha}$

calcular: $\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha$

A) $-\frac{11}{12}\sqrt{143}$ B) $\frac{13}{12}\sqrt{143}$ C) $-\frac{13}{12}\sqrt{143}$

D) $\frac{9}{12}\sqrt{143}$ E) $\frac{11}{12}\sqrt{143}$

73. Si: $f(\theta) = |\cos(3\theta)| + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(2\theta)} - \cos 2\theta$

calcular: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$

A) 2 B) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 5

D) $3+2\sqrt{3}$ E) $2-3\frac{\sqrt{3}}{2}$

74. Determinar el signo de S en cada uno de los cuadrantes (I; II; III; IV). S = cotx + senx − cscx

	I	II	III	IV
A)	+	+	+	+
B)	+	−	+	+
C)	+	−	+	−
D)	−	+	−	+
E)	+	+	−	−

75. Si $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ y α está en el segundo cuadrante.

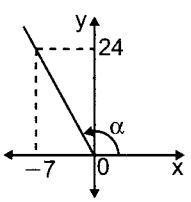
Hallar: $T = \frac{3(\cos\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha)}{2\cot\alpha}$

A) $\sqrt{10}$ B) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ E) $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

76. En la figura adjunta, hallar:

$S = 5\operatorname{sen}\alpha - 15\cos\alpha = \tan\alpha$



A) 141/35 B) 29/7 C) 99/35
D) 39/7 E) 1/4

77. Si: $\tan x = \left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}$, calcular:

$$S = \frac{a}{b\operatorname{sen}x} + \frac{b}{a\cos x};\ x \in IC$$

A) $\left(\frac{a^{1/3}}{b^{1/3}} + \frac{b^{1/3}}{a^{1/3}}\right)^3$ B) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ C) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$

D) $\left(\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}\right)^{2/3}$ E) $\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right)^{1/3}$

78. Se tiene dos ángulos que se diferencian en un múltiplo de 360°. Se sabe que el cuádruple del menor es a la suma del ángulo menor más el triple del mayor de los ángulos, como 4 es a 5. Hallar el menor de los ángulos, si se sabe que está comprendido entre 1080° y 3240°.

A) 1280° B) 2160° C) 3200°
D) 3210° E) 3230°

79. Si α es un ángulo en el primer cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}25$. ¿Cuál es el valor de $\csc\alpha - \cot^2\alpha$?

A) 15 B) 21/19 C) 19/15
D) 19/21 E) 19

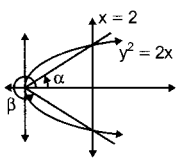
80. Si $\tan\beta = 1{,}5$, siendo β un ángulo en el III cuadrante, hallar el valor de la expresión:

$$V = \frac{1}{\sqrt{13}}(\sec\beta - \csc\beta)$$

A) $-1/6$ B) $-1/\sqrt{6}$ C) 1/6

D) $-5/6$ E) $1/\sqrt{6}$

81. Son α y β ángulos en posición normal $\beta > \alpha$, cuyos lados terminales pasan por los puntos de intersección de la curva $y^2 = 2x \wedge x = 2$.
Hallar $\sec\alpha - \csc\beta$



A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

82. Sea α un ángulo del tercer cuadrante. Indicar la alternativa correcta al simplificar:

$$V = 1 + (\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha})\cos\alpha$$

A) $2 + \operatorname{sen}^2\alpha$ B) $-\operatorname{sen}^2\alpha$ C) $1 + \cos^2\alpha$
D) $\operatorname{sen}^2\alpha$ E) $\cos^2\alpha$

83. Si α es un ángulo del tercer cuadrante, tal que: $\sqrt{1 + \cot^2\alpha} = 8$. Calcular: $(8\sec\alpha)^3$

A) $8^3\sqrt{63}$ B) $-\frac{8^3}{63}$ C) $\frac{8^3}{\sqrt{63}}$

D) $-\frac{8^3}{3\sqrt{63}}$ E) $\frac{-8^6}{63\sqrt{63}}$

84. Si el ángulo x es positivo, pertenece al cuarto cuadrante y es tal que: $0 < x \leq 2\pi$. Entonces, hallar el signo de las siguientes expresiones trigonométricas.

I. $S = \frac{\tan(x/4)}{\operatorname{sen}(x/2)\csc(x/4)}$

II. $T = \frac{\cot(x/3)\sec(3x/4)}{\cos(x/5)}$

III. $V = \frac{\operatorname{sen}(x/3)\tan(2x/3)}{\sec(3x/4)}$

A) (+)(+)(+) B) (−)(−)(−) C) (+)(+)(−)
D) (−)(+)(−) E) (−)(−)(+)

85. Hallar el signo de las expresiones trigonométricas, en el orden dado:

$\operatorname{sen}\frac{52\pi}{3}\cos\frac{25\pi}{3}$; $\operatorname{sen}\frac{32\pi}{5}\cot\frac{22\pi}{3}$;

$\text{sen}\left(\frac{-205\pi}{3}\right)\cot\frac{73\pi}{10}$

A) (+)(+)(−) B) (−)(+)(−) C) (−)(+)(+)
D) (−)(−)(+) E) (+)(−)(+)

86. Si: senx = 0,6, ¿cuál es el valor de cosx, sabiendo que x es un ángulo del segundo cuadrante?

A) cosx = 0,8 B) cosx = 0,6
C) cosx = −0,7 D) cosx = 0,9
E) cosx = −0,8

87. Calcular el coseno del ángulo α del segundo cuadrante tal que $\text{sen}\alpha = 3/5$

A) 4/5 B) 3/5 C) −2/3
D) −4/5 E) −1/3

88. Indicar la alternativa correcta para el signo de las siguientes expresiones:

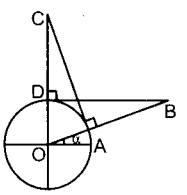
I. sen(361°) − cos(455°)

II. $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

III. $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\sec(315°)$

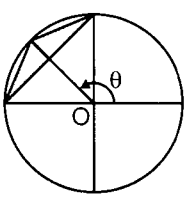
A) + ; − ; + B) + ; + ; − C) − ; − ; +
D) + ; − ; − E) + ; + ; +

89. En la circunferencia trigonométrica, indicar el valor de OC + DB, en función del ángulo α.



A) $\sec\alpha + \tan\alpha$ B) $\sec\alpha - \tan\alpha$
C) $\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$ D) $\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$
E) $\sec\alpha + \csc\alpha$

90. En el círculo trigonométrico, calcular el área de la región sombreada.



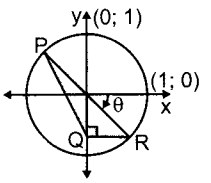
A) $(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)/2$
B) $(\text{sen}\theta - \cos\theta - 1)/2$
C) $(1 - \text{sen}\theta\cos\theta)/2$
D) $(1 - 2\cos\theta)/2$
E) $(1 - 2\text{sen}\theta)/2$

91. Si: $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; para que valores de x se cumple que:

$$(x - 1)\text{sen}^2\theta = 3x + 2$$

A) $\left[-\frac{14}{9}; -\frac{9}{14}\right]$ B) $\left[-\frac{13}{9}; -\frac{9}{13}\right]$
C) $\left[-\frac{16}{9}; -\frac{9}{16}\right]$ D) $\left[-\frac{11}{9}; -\frac{9}{11}\right]$
E) $\left[-\frac{10}{9}; -\frac{9}{10}\right]$

92. En la figura mostrada, hallar el área de la región triangular PQR.



A) $-\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{4}$ B) $-\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{8}$
C) $-\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{16}$ D) $-\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{2}$
E) $-\text{sen}\theta\cos\theta$

93. Evaluar: $\text{sen}(k\pi) + \cos(k\pi) + \tan(k\pi)$
k: número entero no negativo.

A) ±1 B) 2 C) 1
D) $(-1)^k$ E) −1

94. Si α es un arco del segundo cuadrante, positivo menor que una vuelta. Hallar la extensión de:

$$\cos(\alpha + \phi), \text{ si: } \frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{4}$$

A) $-\frac{1}{2} < \cos(\alpha + \phi) < \frac{1}{2}$

B) $-1 \le \cos(\alpha + \phi) < -\frac{1}{2}$

C) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(\alpha + \phi) < -\frac{1}{2}$

D) $-1 \le \cos(\alpha + \phi) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos(\alpha + \phi) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

95. De las siguientes proposiciones:

I. Si: $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$ entonces: $\text{sen}|x_1| > \text{sen}|x_2|$

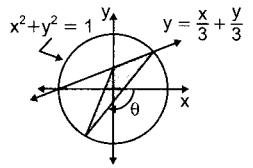
II. Si: $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$ entonces: $|\text{sen}x_2| > |\text{sen}x_1|$

III. $\frac{\text{sen}x + \tan x}{\cos x + \cot x}$

Es positivo en el primer y tercer cuadrante y negativo en el segundo y cuarto cuadrante. Son verdaderas:

A) Solo I B) Solo I y II C) II y III
D) Solo III E) I, II y III

96. En la figura siguiente, calcular el área de la región sombreada.



A) $-\cos(\theta)$ B) $-\frac{1}{2}\cos(\theta)$ C) $-\frac{1}{3}\cos(\theta)$

D) $\frac{1}{2}\cos(\theta)$ E) $\frac{1}{2}\cos(\theta)$

97. Determinar en qué límites debe estar comprendido α para que no se cumpla la relación:

$$\operatorname{sen}x = \frac{2}{3}\alpha - \frac{5}{2}$$

A) $\alpha < \frac{9}{4} \vee \alpha \geq \frac{21}{4}$ B) $\frac{9}{4} < \alpha < \frac{21}{4}$

C) $\alpha < \frac{9}{4} \vee \alpha > \frac{21}{4}$ D) $\frac{9}{4} \leq \alpha \leq \frac{21}{4}$

E) $\frac{9}{4} < \alpha \leq \frac{21}{4}$

CLAVES

1. B	14. E	27. C	40. C	53. C	66. A	79. E	92. E
2. C	15. B	28. B	41. B	54. D	67. B	80. A	93. D
3. E	16. E	29. A	42. C	55. C	68. E	81. C	94. B
4. B	17. B	30. A	43. B	56. D	69. D	82. D	95. A
5. C	18. C	31. A	44. C	57. D	70. C	83. E	96. C
6. B	19. B	32. C	45. E	58. E	71. C	84. C	97. C
7. C	20. E	33. D	46. C	59. C	72. C	85. B	
8. E	21. B	34. E	47. C	60. D	73. C	86. E	
9. E	22. B	35. D	48. D	61. A	74. C	87. D	
10. A	23. C	36. B	49. C	62. B	75. B	88. E	
11. A	24. A	37. C	50. A	63. A	76. D	89. C	
12. A	25. B	38. D	51. B	64. A	77. D	90. B	
13. E	26. B	39. D	52. D	65. C	78. B	91. D	

Identidades trigonométricas

04 capítulo

Johann Müller

Johann Müller Regiomontano (Königsberg, 6 de junio de 1436-Roma, 6 de julio de 1476) fue un astrónomo y matemático alemán. Su nombre real es Johann Müller Königsberg y el apodo «Regiomontano» proviene de la traducción latina del nombre de la ciudad alemana donde nació: Königsberg (montaña real o montaña regia). Se puede decir que Regiomontano fue verdaderamente un niño prodigio. A la edad de once años se matriculó en la Universidad de Leipzig para estudiar dialéctica. Posteriormente, ingresó en la Universidad de Viena (1450).Durante esta época su principal actividad se centró en el estudio de las Matemáticas, la Astronomía y la Cosmología. Fue tan veloz en su aprendizaje que al acabar sus estudios en 1452, las normas de la Universidad le exigían alcanzar la edad de 21 para obtener el título de licenciado.

Su obra *Triangulis* se compone de cinco libros: en el primero da las definiciones básicas: cantidad, ratio, igualdad, círculos, arcos, cuerdas y la función seno; además, proporciona algunos axiomas que serán el sustento de los 56 teoremas que enunciará; en el segundo de los libros establece la ley del seno y la emplea en la resolución de algunos problemas con triángulos; el tercero, cuarto y quinto tratan de trigonometría esférica. Asimismo, determina el área de un triángulo mediante el conocimiento de dos lados y el ángulo que los sustenta.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Una identidad trigonométrica es una igualdad en la que intervienen funciones trigonométricas y que se verifican para todo valor permitido de la variable.

IDENTIDADES PRINCIPALES

Identidades recíprocas

$\operatorname{sen}x\csc x = 1, \quad x \neq \{n\pi\}, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x\sec x = 1, \quad x \neq, \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
$\tan x\cot x = 1, \quad x \neq \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

Es muy frecuente encontrar en otros textos estas identidades expresadas de otra manera como:

$\frac{1}{\csc x} = \operatorname{sen}x$	$\frac{1}{\operatorname{sen}x} = \csc x$
$\frac{1}{\tan x} = \cot x$	$\frac{1}{\cot x} = \tan x$
$\frac{1}{\cos x} = \sec x$	$\frac{1}{\sec x} = \cos x$

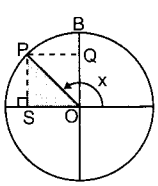
Identidades de cociente

$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \tan x; \quad x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = \cot x; \quad x \neq \{n\pi\}, n \in \mathbb{Z}$

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2x + \cos^2x = 1; \quad x \in \mathbb{R}$
$1 + \tan^2x = \sec^2x; \quad x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
$1 + \cot^2x = \csc^2x; \quad x \neq \{n\pi\}, n \in \mathbb{Z}$

Para este último caso considero que su demostración es interesante, por esta razón haciendo uso de la circunferencia trigonométrica paso a demostrarla:



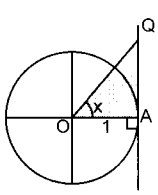
Sabemos que: $OP = 1$

$SP = \operatorname{sen}x \wedge QP = \cos x (= OS)$

Además: $SP^2 + OS^2 = OP^2$

Entonces:

$\boxed{\operatorname{sen}^2x + \cos^2x = 1}$



Sabemos que: $OA = 1$

Además: $AQ = \tan x$

También: $\frac{OQ}{OA} = \sec x \Rightarrow OQ = \sec x$

Pero: $OA^2 + AQ^2 = OQ^2$

Entonces: $\boxed{1 + \tan^2x = \sec^2x}$

Ejemplos:

1. De aplicación de identidades recíprocas
   - $\operatorname{sen}20°\csc 20° = 1$
   - $\frac{1}{\operatorname{sen}40°} = \csc 40°$
   - $\cos 50°\sec 50° = 1$
   - $\frac{1}{\cos 3x} = \sec 3x$
   - $\tan 80°\cot 80° = 1$
   - $\frac{1}{\operatorname{sen}^2x} = \csc^2x$
   - $\operatorname{sen}2x\csc 2x = 1$
   - $\frac{1}{\tan^2 2x} = \cot^2 2x$
   - $\tan 3\alpha\cot 3\alpha = 1$
2. De aplicación de identidades de cociente:
   - $\frac{\operatorname{sen}10°}{\cos 10°} = \tan 10°$
   - $\frac{\operatorname{sen}^2 20°}{\cos^2 20°} = \tan^2 20°$
   - $\frac{\cos 40°}{\operatorname{sen}40°} = \cot 40°$
   - $\cot^3 5° = \frac{\cos^3 5°}{\operatorname{sen}^3 5°}$
   - $\frac{\operatorname{sen}7x}{\cos 7x} = \tan 7x$
   - $\frac{\cos^4 3x}{\operatorname{sen}^4 3x} = \cot^4 3x$
3. De aplicación de identidades pitagóricas:
   - $\operatorname{sen}^2 20° + \cos^2 20° = 1$
   - $\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x = 1$
   - $1 + \tan^2 80° = \sec^2 80°$
   - $1 + \tan^2 7x = \sec^2 7x$
   - $1 + \cot^2 5° = \csc^2 5°$
   - $1 + \cot^2 5x = \csc^2 5x$

Nota:

Sugiero al lector analizar detenidamente los ejemplos anteriores y entender bien la aplicación de las identidades. Es muy frecuente encontrar los siguiente errores por ejemplo:

- $\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 4$
- $\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x} = \tan x$
- $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$
- $1 + \cot^3 x = \csc^3 x$
- $1 + \tan x^2 = \sec x^2$
- $\tan 3x\cot 3x = 9$

Observaciones

1.° La forma de aplicar las identidades trigonométricas es muy variada, es fundamental que el lector entienda que de las ocho identidades expuestas se deducen otras igualdades que lógicamente también son identidades. Por ejemplo:

De la identidad: $\operatorname{sen}^2x + \cos^2x = 1$ se deduce:

$\boxed{1 - \operatorname{sen}^2x = \cos^2x} \vee \boxed{1 - \cos^2x = \operatorname{sen}^2x}$

De igual manera se deducen:

- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\frac{\sec x}{\csc x} = \tan x$
- $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
- $\frac{\csc x}{\sec x} = \cot x$

2° No olvidar que:

$\boxed{\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta}$ $\boxed{\text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\theta}$

$\boxed{\text{exsec}\theta = \sec\theta - 1}$

3° Cuando se aplican las identidades trigonométricas se emplean con mucha frecuencia algunas identidades algebraicas; por ejemplo:

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Ejemplos:

1. $(\text{sen}x + \cos x)^2 = \text{sen}^2x + 2\text{sen}x\cos x + \cos^2x$
   $= 1 + 2\text{sen}x\cos x$
   - $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
   - $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
   - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. $(1 - \text{sen}x)(1 + \text{sen}x) = 1 - \text{sen}^2x = \cos^2x$
   $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
   - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
   - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
   - $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

IDENTIDADES AUXILIARES

Se denomina de esta manera a algunas identidades trigonométricas que son de frecuente aplicación y que su uso permite una solución más rápida del problema que se está resolviendo.
Dentro del grupo de identidades auxiliares consideramos las siguientes:

1. $\boxed{\text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x}$

   Demostración:
   Sabemos que: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$
   Entonces: $(\text{sen}^2x + \cos^2x)^2 = (1)^2$
   Desarrollando:
   $(\text{sen}^2x)^2 + 2(\text{sen}^2x)(\cos^2x) + (\cos^2x)^2 = 1$
   $\text{sen}^4x + 2\text{sen}^2x\cos^2x + \cos^4x = 1$
   $\text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x$

2. $\boxed{\text{sen}^6x + \cos^6x = 1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x}$

3. $\boxed{\sec^2x + \csc^2x = \sec^2x\csc^2x}$

   Demostración:
   Partimos del primer miembro (para llegar al segundo)
   $$\sec^2x + \csc^2x = \frac{1}{\cos^2x} + \frac{1}{\text{sen}^2x}$$
   $$\sec^2x + \csc^2x = \frac{\text{sen}^2x + \cos^2x}{\text{sen}^2x\cos^2x} = \frac{1}{\text{sen}^2x\cos^2x}$$
   $$= \left(\frac{1}{\text{sen}^2x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2x}\right) = \sec^2x\csc^2x$$

4. $\boxed{\tan x + \cot x = \sec x\csc x}$

5. $\boxed{(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = 2(1 + \text{sen}x)(1 + \cos x)}$

   Demostración:
   $(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = (1)^2 + (\text{sen}x)^2 + (\cos x)^2 + 2(1)(\text{sen}x) + 2(1)(\cos x) + 2(\text{sen}x)(\cos x)$
   $(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = 1 + \text{sen}^2x + \cos^2x + 2\text{sen}x + 2\cos x + 2\text{sen}x\cos x$
   $(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = 2 + 2\text{sen}x + 2\cos x + 2\text{sen}x\cos x$
   $(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = 2(1 + \text{sen}x) + 2\cos x(1 + \text{sen}x)$
   $(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 = 2(1 + \text{sen}x)(1 + \cos x)$

   De igual manera se demuestra que:
   $(1 + \text{sen}x - \cos x)^2 = 2(1 + \text{sen}x)(1 - \cos x)$
   $(1 - \text{sen}x + \cos x)^2 = 2(1 - \text{sen}x)(1 + \cos x)$
   $(1 - \text{sen}x - \cos x)^2 = 2(1 - \text{sen}x)(1 - \cos x)$

Observacion:

No es muy frecuente pero a manera de información se puede decir que:
Así como: $\text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x$
$\text{sen}^6x + \cos^6x = 1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x$

También se cumple que:
$\text{sen}^8x + \cos^8x = 1 - 4\text{sen}^2x\cos^2x + 2\text{sen}^4x\cos^4x$
$\text{sen}^{10}x + \cos^{10}x = 1 - 5\text{sen}^2x\cos^2x + 5\text{sen}^4x\cos^4x$
$\text{sen}^{12}x + \cos^{12}x = 1 - 6\text{sen}^2x\cos^2x + 9\text{sen}^4x\cos^4x - 2\text{sen}^6x\cos^6x$
$\text{sen}^{14}x + \cos^{14}x = 1 - 7\text{sen}^2x\cos^2x + 14\text{sen}^4x\cos^4x - 7\text{sen}^6x\cos^6x$

TIPOS DE PROBLEMAS

En los ejemplos que se van a desarrollar a continuación se a dividido en cuatro partes el tipo de problemas:

Demostraciones

1. Demostrar que: $(\text{sen}^2x - \cos^2x)\sec^2x = \tan^2x - 1$
   Demostración:
   $$(\text{sen}^2x - \cos^2x)\sec^2x = \text{sen}^2x\sec^2x - \underbrace{\cos^2x\sec^2x}_{1}$$
   $$(\text{sen}^2x - \cos^2x)\sec^2x = \text{sen}^2x\left(\frac{1}{\cos^2x}\right) - 1$$
   $$= \frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x} - 1 = \tan^2x - 1$$

2. Demostrar que: $\cot\theta(\tan\theta + \text{sen}\theta) - \cos\theta = 1$
   Demostración:
   $$\cot\theta(\tan\theta + \text{sen}\theta) - \cos\theta = \underbrace{\cot\theta\tan\theta}_{1} + \cot\theta\,\text{sen}\theta - \cos\theta$$
   $$\cot\theta(\tan\theta + \text{sen}\theta) - \cos\theta = 1 + \left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)\text{sen}\theta - \cos\theta$$
   $$= 1 + \cos\theta - \cos\theta = 1$$

3. Demostrar que: $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$
   Demostración:
   $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha = (\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)$
   $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
   $= (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$

4. Demostrar que: $\dfrac{\text{sen}^3x + \cos^3x}{1 - \text{sen}x\cos x} = \text{sen}x + \cos x$

Demostración:

Recordar que: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\frac{\text{sen}^3x + \cos^3x}{1 - \text{sen}x\cos x} = \frac{(\text{sen}x + \cos x)\overbrace{(\text{sen}^2x - \text{sen}x\cos x + \cos^2x)}^{1}}{1 - \text{sen}x\cos x}$$

$$= \frac{(\text{sen}x + \cos x)(1 - \text{sen}x\cos x)}{1 - \text{sen}x\cos x} = \text{sen}x + \cos x$$

5. Demostrar que: $\dfrac{\cos\theta + \cot\theta}{\tan\theta + \sec\theta} = \cot\theta\cos\theta$

Demostración:

$$\frac{\cos\theta + \cot\theta}{\tan\theta + \sec\theta} = \frac{\cos\theta + \cot\theta}{\dfrac{1}{\cot\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + \cot\theta}{\dfrac{\cos\theta + \cot\theta}{\cos\theta\cot\theta}}$$

$= \cot\theta\cos\theta$

6. Demostrar:
$(1 - \cos\alpha\cos\beta)^2 - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)^2$

Demostración:

$(1 - \cos\alpha\cos\beta)^2 - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}\beta = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta$

Hacemos:

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \wedge \text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)$

$= 1 - 2\cos x\cos\beta + \cos^2x\cos^2\beta - 1 + \cos^2x + \cos^2\beta - \cos^2x\cos^2\beta$

$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta$

$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2$

Simplificaciones

1. Simplificar: $R = (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$

Resolución:

Recordar que: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$R = \underbrace{\text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \underbrace{\text{sen}^2\alpha - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}_{1}$

$R = 1 + 1 \Rightarrow R = 2$

2. Simplificar: $R = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\csc\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} + \dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha}$

Resolución:

Sabemos que:

$\dfrac{1}{\csc\alpha} = \text{sen}\alpha;\ \dfrac{1}{\sec\alpha} = \cos\alpha;\ \dfrac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha$

Entonces:

$R = \text{sen}\alpha\left(\dfrac{1}{\csc\alpha}\right) + \cos\alpha\left(\dfrac{1}{\sec\alpha}\right) + \tan\alpha\left(\dfrac{1}{\cot\alpha}\right)$

$R = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

$\Rightarrow R = \sec^2\alpha$

3. Simplificar:

$$R = \frac{(1 - \text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2}{(\text{ex}\sec\alpha)(\text{cov}\alpha)}$$

Resolución:

$$R = \frac{(1 - \text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2}{(\sec\alpha - 1)(1 - \text{sen}\alpha)} = \frac{2(1 - \text{sen}\alpha)(1 - \cos\alpha)}{(\sec\alpha - 1)(1 - \text{sen}\alpha)}$$

$$R = \frac{2(1 - \cos\alpha)}{\sec\alpha - 1}$$

Pero:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{2(1 - \cos\alpha)}{\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^{-1}} = \frac{2(1 - \cos\alpha)}{\dfrac{(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}}$$

$\Rightarrow R = 2\cos\alpha$

4. Simplificar: $R = \dfrac{1 + \text{sen}^4\theta + \cos^4\theta}{2 + \text{sen}^6\theta + \cos^6\theta}$

Resolución:

$$R = \frac{1 + (1 - 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta)}{2 + (1 - 3\text{sen}^2\cos^2\theta)} = \frac{2 - 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}{3 - 3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$

$$R = \frac{2(1 - \text{sen}^2\theta\cos^2\theta)}{3(1 - \text{sen}^2\theta\cos^2\theta)};$$

simplificando: $R = 2/3$

5. Simplificar: $M = \dfrac{\text{cov}x\cot^2x}{\csc x(\csc x - 1)}$

Resolución:

Transformamos todos los términos a senos y cosenos.

$$M = \frac{(1 - \text{sen}x)\dfrac{\cos^2x}{\text{sen}^2x}}{\dfrac{1}{\text{sen}x}\left(\dfrac{1}{\text{sen}x} - 1\right)} = \frac{\dfrac{(1 - \text{sen}x)\cos^2x}{\text{sen}^2x}}{\dfrac{(1 - \text{sen}x)}{\text{sen}x\text{sen}x}}$$

Simplificando obtenemos: $M = \cos^2x$

Problemas con condición

1. Si $\text{sen}\phi + \cos\phi = m$, a qué es igual:
$R = (\text{vers}\phi)^2 + (\text{cov}\phi)^2$

Resolución:

$R = (1 - \cos\phi)^2 + (1 - \text{sen}\phi)^2 = 1 - 2\cos\phi + \underbrace{\cos^2\phi + 1 - 2\text{sen}\phi + \text{sen}^2\phi}_{1}$

$R = 3 - 2\text{sen}\phi - 2\cos\phi = 3 - 2(\text{sen}\phi + \cos\phi)$

Dato: $\text{sen}\phi + \cos\phi = m \Rightarrow R = 3 - 2m$

2. Si: $\text{sen}x\cos x = t$. Hallar: $R = \sec^2x(1 + \cos^2x) + \csc^2x\cos^2x$

Resolución:

$R = \sec^2x(1 + \cos^2x) + \left(\dfrac{1}{\text{sen}^2x}\right)\cos^2x =$

$= \sec^2x + \underbrace{\sec^2x\cos^2x}_{1} + \cot^2x$

$R = \sec^2x + 1 + \cot^2x \Rightarrow R = \sec^2x + \csc^2x$

$\Rightarrow R = \sec^2x\csc^2x$

$R = \dfrac{1}{\text{sen}^2x\cos^2x} = \left(\dfrac{1}{\text{sen}x\cos x}\right)^2$; dato: $\text{sen}x\cos x = t$

$\therefore R = 1/t^2$

3. Si: $\text{sen}^3x - \csc^3x = 7$, calcular: $\text{sen}^3x + \csc^3x$

Resolución:

$R = \text{sen}^3x + \csc^3x$; dato: $\text{sen}^3x - \csc^3x = 7$

Elevamos al cuadrado:

$(\text{sen}^3x - \csc^3x)^2 = 49 \Rightarrow \text{sen}^6x - 2\underbrace{\text{sen}^3x\csc^3x}_{1} + \csc^6x = 49$

$\text{sen}^6 + \csc^6x = 51 \Rightarrow \text{sen}^6x + 2\text{sen}^3x\csc^3x + \csc^6x = 51 + 2$

$(\text{sen}^3x + \csc^3x)^2 = 53 \Rightarrow R^2 = 53 \quad \therefore R = \sqrt{53}$

4. Si: $k = \tan\phi + \cot\phi$, calcular: $R = \sec^6\phi + \csc^6\phi$

Resolución:

Sabemos que: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$R = (\sec^2\phi)^3 + (\csc^2\phi)^3 =$
$(\sec^2\phi + \csc^2\phi)(\sec^4\phi - \sec^2\phi\csc^2\phi + \csc^4\phi)$

Dato: $k = \tan\phi + \cot\phi = \sec\phi\csc\phi$

Además: $\sec^2\phi + \csc^2\phi = \sec^2\phi\csc^2\phi$

$R = (\sec^2\phi\csc^2\phi)[(\sec^4\phi + \csc^4\phi) - \sec^2\phi\csc^2\phi] = k^2[\sec^4\phi + \csc^4\phi - k^2]$

$R = k^2[(\sec^2\phi + \csc^2\phi)^2 - 2\sec^2\phi\csc^2\phi - k^2] = k^2[(\sec^2\phi\csc^2\phi)^2 - 2k^2 - k^2]$

$R = k^2[(k^2)^2 - 3k^2] \Rightarrow R = k^6 - 3k^4$

Eliminación de variable

1. Eliminar θ de: $\text{sen}\theta = x \ \wedge \ \cos\theta = y$

Resolución:

$x = \text{sen}\theta \Rightarrow x^2 = \text{sen}^2\theta$

$y = \cos\theta \Rightarrow y^2 = \cos^2\theta$

Sumando miembro a miembro:

$x^2 + y^2 = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

2. Eliminar α de: $\tan\alpha + \cot\alpha = x \ \wedge \ \tan\alpha - \cot\alpha = y$

Resolución:

$\tan\alpha + \cot\alpha = x$ ...(1)

Elevado al cuadrado (1):

$\tan^2\alpha + 2\tan\alpha\cot\alpha + \cot^2\alpha = x^2$

$\tan\alpha - \cot\alpha = y$ ...(2)

Elevado al cuadrado (2):

$\tan^2\alpha - 2\tan\alpha\cot\alpha + \cot^2\alpha = y^2$

Restando miembro a miembro:

$4\tan\alpha\cot\alpha = x^2 - y^2$

Como: $\tan\alpha\cot\alpha = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4$

3. Eliminar ϕ: $\tan\phi + \text{sen}\phi = m$ y $\tan\phi - \text{sen}\phi = n$

Resolución:

$\tan\phi + \text{sen}\phi = m$ ...(1)

$\tan\phi - \text{sen}\phi = n$ ...(2)

Sumando (1) + (2) se obtiene: $\tan\phi = \dfrac{m+n}{2}$

Restando (1) − (2) se obtiene: $\text{sen}\phi = \dfrac{m-n}{2}$

$\tan\phi = \dfrac{m+n}{2} \Rightarrow \cot\phi = \dfrac{2}{m+n} \Rightarrow \cot^2\phi = \dfrac{4}{(m+n)^2}$

$\text{sen}\phi = \dfrac{m-n}{2} \Rightarrow \csc\phi = \dfrac{2}{m-n} \Rightarrow \csc^2\phi = \dfrac{4}{(m-n)^2}$

$\csc^2\phi - \cot^2\phi = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{(m-n)^2} - \dfrac{4}{(m+n)^2} = 1$

Simplificando:

$16mn = (m^2 - n^2)^2$

4. Eliminar θ:

$\text{acov}\theta = b\text{sen}\theta \ \wedge \ \text{avers}\theta = b\cos\theta$

Resolución:

$\text{acov}\theta = b\text{sen}\theta \Rightarrow a(1 - \text{sen}\theta) = b\text{sen}\theta$

$\Rightarrow a - a\text{sen}\theta = b\text{sen}\theta$

$a = (a + b)\text{sen}\theta$ ...(1)

$\text{avers}\theta = b\cos\theta \Rightarrow a(1 - \cos\theta) = b\cos\theta$

$\Rightarrow a - a\cos\theta = b\cos\theta$

$a = (a + b)\cos\theta$ ... (2)

Elevamos la cuadrado (1) y (2):

$a^2 = (a + b)^2\text{sen}^2\theta$

$a^2 = (a + b)^2\cos^2\theta$

Sumando miembro a miembro:

$2a^2 = (a + b)^2\underbrace{[\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta]}_{1} \Rightarrow 2a^2 = (a + b)^2$

$2a^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 2a^2 - a^2 - b^2 = 2ab$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2ab$

5. Eliminar ϕ:

$x = 1 + \text{sen}\phi + \text{sen}^2\phi + \text{sen}^3\phi + \ldots$

$y = 1 + \cos\phi + \cos^2\phi + \cos^3\phi + \ldots$

Resolución:

$x = 1 + \text{sen}\phi[\underbrace{1 + \text{sen}\phi + \text{sen}^2\phi + \ldots}_{x}]$

$\Rightarrow x = 1 + x\text{sen}\phi \Rightarrow \text{sen}\phi = \dfrac{x-1}{x}$ ...(1)

$y = 1 + \cos\phi[\underbrace{1 + \cos\phi + \cos^2\phi + \ldots}_{y}]$

$\Rightarrow y = 1 + y\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{y-1}{y}$ ...(2)

Reemplazamos (1) y (2) en la identidad:

$\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{y-1}{y}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow (xy - x)^2 + (xy - y)^2 = (xy)^2$

Ejemplos:

1. Si: $\cos^4\theta - \text{sen}^4\theta = M\cos^2\theta - 1$ es una identidad. Hallar M.

Resolución:

Sabemos que: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$\cos^4\theta - \text{sen}^4\theta = M\cos^2\theta - 1$

$\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{1}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = M\cos^2\theta - 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = M\cos^2\theta - 1$

Como:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = M\cos^2\theta - 1$

Luego: $2\cos^2\theta - 1 = M\cos^2\theta - 1$

Simplificando: $M = 2$

2. Determinar M para que la igualdad sea una identidad: $\dfrac{1}{\cos^2\phi} + \dfrac{1}{\tan^2\phi} = \dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{\cot^2\phi}$

Resolución:

$$\Rightarrow \frac{1}{M} = \frac{1}{\cos^2\phi} + \frac{1}{\tan^2\phi} - \frac{1}{\cot^2\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} = \sec^2\phi + \cot^2\phi - \tan^2\phi$$

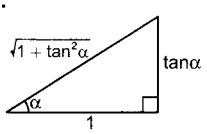
$$\Rightarrow \frac{1}{M} = \cot^2\phi + \overbrace{(\sec^2\phi - \tan^2\phi)}^{=1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} = \cot^2\phi + 1 \Rightarrow \frac{1}{M} = \csc^2\phi$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{\csc^2\phi} \qquad \therefore M = \text{sen}^2\phi$$

3. Expresar $\text{sen}\alpha$ (α: agudo) en términos de la $\tan\alpha$.

Resolución:



Construimos un triángulo rectángulo en términos de la $\tan\alpha$.

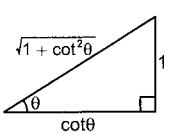
$$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

4. Si $\theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ expresar en términos de la $\cot\theta$.

La expresión:

$$R = \frac{\text{sen}\theta}{\tan\theta} + \frac{\tan\theta}{\csc\theta}$$

Resolución:



$$R = \frac{\text{sen}\theta}{\left(\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\right)} = \cos\theta + \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

$$R = \frac{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$R = \sec\theta$

$$\Rightarrow R = \sec\theta = \frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$$

5. Para qué valor de m la expresión es independiente del ángulo. ¿Cuál es el valor de J en dicho caso?

$J = 3\tan^2\theta + \tan^4\theta + m\sec^2\theta(\sec^2\theta + 1)$

Resolución:

Expresamos: J en términos de $\tan\theta$, para esto debemos recordar que $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.

$J = 3\tan^2\theta + \tan^4\theta + m(1 + \tan^2\theta)(1 + \tan^2\theta + 1)$

$J = 3\tan^2\theta + \tan^4\theta + m(2 + 3\tan^2\theta + \tan^4\theta)$

$J = 3\tan^2\theta + \tan^4\theta + 2m + m(3\tan^2\theta + \tan^4\theta)$

Como J debe ser independiente de θ entonces este se tiene que anular, si observa bien se dará cuenta que si $m = -1$ entonces $\tan\theta$ se anula.

$J = 3\tan^2\theta + \tan^4\theta + 2(-1) + (-1)(3\tan^2\theta + \tan^4\theta)$

$J = 3\tan^2\theta + \tan^4\theta - 2 - 3\tan^2\theta - \tan^4\theta$

$J = -2 \quad \therefore m = -1 \ \wedge \ J = -2$

6. Hallar la extensión de:

$F = \text{sen}x + \cos x$

Resolución:

Hay diversas maneras de hallar el rango de esta función, aplicando identidades se procede así:

Como:

$F = \text{sen}x + \cos x \Rightarrow F - \text{sen}x = \cos x$

Elevamos al cuadrado:

$(F - \text{sen}x)^2 = \cos^2 x$

$F^2 - 2F\text{sen}x + \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$2\text{sen}^2 x - 2F\text{sen}x + (F^2 - 1) = 0$

Se ha formado una ecuación de segundo grado en senx.

Sabemos que en una ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$; el discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\Delta \geq 0$ entonces la ecuación tiene raíces reales.

Por lo tanto, en nuestro caso analizamos al discriminante:

$(-2F)^2 - 4(2)(F^2 - 1) \geq 0$

$4F^2 - 8F^2 + 8 \geq 0 \Rightarrow -4F^2 + 8 \geq 0 \Rightarrow 4F^2 \leq 8$

$\Rightarrow F^2 \leq 2 \Rightarrow |F| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq F \leq \sqrt{2}$

El rango de la función es:

$$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Nota:

Esto significa que:

$$-\sqrt{2} \leq \text{sen}x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

El máximo valor de (senx + cosx) es: $\sqrt{2}$

El mínimo valor de (senx + cosx) es: $-\sqrt{2}$

De igual manera se deduce que:

$$-\frac{1}{2} \leq \text{sen}x\cos x \leq \frac{1}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Simplificar: $T = \dfrac{3}{1+\text{sen}x} + \dfrac{3}{\csc x - 1}$

Resolución:

T equivale a:

$T = \dfrac{3}{1+\text{sen}x} + \dfrac{3}{\dfrac{1}{\text{sen}x} - 1} \Rightarrow T = \dfrac{3}{1+\text{sen}x} + \dfrac{3\text{sen}x}{1-\text{sen}x}$

$T = \dfrac{3 - 3\text{sen}x + 3\text{sen}x + 3\text{sen}^2x}{(1+\text{sen}x)(1-\text{sen}x)}$

Como: $1 = \text{sen}^2x + \cos^2x \Rightarrow 1 - \text{sen}^2x = \cos^2x$

Luego:

$T = \dfrac{3 + 3\text{sen}^2x}{\cos^2x} = 3\left(\dfrac{1}{\cos^2x}\right) + 3\left(\dfrac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}\right)$

$T = 3\sec^2x + 3\tan^2x \Rightarrow T = 3(1 + \tan^2x) + 3\tan^2x$

$\therefore\ T = 3 + 6\tan^2x$

2. Hallar una relación entre a y b a partir de:

$a\text{sen}x = b\text{sen}x + \cos x$

$b\cos x = \text{sen}x - a\cos x$

Resolución:

$a\text{sen}x = b\text{sen}x + \cos x$ ...(1)

$b\cos x = \text{sen}x - a\cos x$ ...(2)

De (1): $a\text{sen}x - b\text{sen}x = \cos x$

$(a - b)\text{sen}\,x = \cos x$ ...(3)

De (2): $a\cos x + b\cos x = \text{sen}x$

$(a + b)\cos x = \text{sen}x$ ...(4)

Hagamos (3) × (4): $(a^2 - b^2)\,\text{sen}x\cos x = \cos x\text{sen}x$

$\therefore\ a^2 - b^2 = 1$

3. Si se cumple que $\sec\theta + \tan\theta = 6$, entonces. Hallar: $S = \dfrac{1 - \text{sen}\theta}{\cos\theta}$

Resolución:

Sabemos que:

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \Rightarrow \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

De donde se obtiene:

$\underbrace{(\sec\theta + \tan\theta)}_{6}(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

Luego: $\sec\theta - \tan\theta = 1/6$

$\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{1 - \text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore\ S = \dfrac{1}{6}$

4. Si $\cot\alpha + \csc\alpha = a$. Hallar $\text{sen}\alpha$, sabiendo que α es agudo.

Resolución:

Dado que: $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha \Rightarrow \csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

De donde obtenemos:

$\underbrace{(\csc\alpha + \cot\alpha)}_{a}(\csc\alpha - \cot\alpha) = 1$

$\Rightarrow \csc\alpha - \cot\alpha = \dfrac{1}{a}$

$\csc\alpha + \cot\alpha = a$ (+)

$2\csc\alpha = \dfrac{1}{a} + a \Rightarrow \csc\alpha = \dfrac{1 + a^2}{2a}$

$\therefore\ \text{sen}\alpha = \dfrac{2a}{1 + a^2}$

5. Si $\tan^6x = 6\cot^2x + 5$

Hallar: $E = (\tan^2x - 1)(\tan^4x + 1)$

Resolución:

Del dato: $\tan^6x = 6\cot^2x + 5$

Tenemos: $\tan^6x = 6\left(\dfrac{1}{\tan^2x}\right) + 5$

$\tan^8x = 6 + 5\tan^2x \Rightarrow \tan^8x - 1 = 5 + 5\tan^2x$

$(\tan^4x + 1)(\tan^4x - 1) = 5(1 + \tan^2x)$

$(\tan^4x + 1)(\tan^2x + 1)(\tan^2x - 1) = 5(\tan^2x + 1)$

$(\tan^4x + 1)(\tan^2x - 1) = 5 \quad \therefore\ E = 5$

6. Reducir: $S = \left(\dfrac{1 + 2\text{sen}x\cos x}{\text{sen}x + \cos x} - \cos x\right)\csc x$

Resolución:

Se sabe que: $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 1 + 2\text{sen}x\cos x$

Reemplacemos en:

$S = \left(\dfrac{1 + 2\text{sen}x\cos x}{\text{sen}x + \cos x} - \cos x\right)\csc x$

$S = \left[\dfrac{(\text{sen}x + \cos x)^2}{\text{sen}x + \cos x} - \cos x\right]\csc x$

$S = (\text{sen}x + \cos x - \cos x)\csc x$

$S = \text{sen}x\csc x \quad \therefore\ S = 1$

7. Si $\text{sen}\phi\cos\phi = k\tan\phi$, simplificar:

$T = (k + \text{sen}^2\phi)(k + \cos^2\phi) - k$

Resolución:

Simplifiquemos T:

$T = (k + \text{sen}^2\phi)(k + \cos^2\phi) - k$

$T = k^2 + k\cos^2\phi + k\text{sen}^2\phi + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi - k$

$T = k^2 + k\underbrace{(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi)}_{1} + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi - k$

$T = k^2 + k + \underbrace{(\text{sen}\phi\cos\phi)^2}_{\text{dato}} - k$

$T = k^2 + k^2\tan^2\phi = k^2(1 + \tan^2\phi) \quad \therefore\ T = k^2\sec^2\phi$

8. Reducir la siguiente expresión:

$S = \dfrac{\text{sen}^{10}x + \cos^{10}x - \text{sen}^8x - \cos^8x}{-\text{sen}^6x - \cos^6x}$

Resolución:

$S = \dfrac{\text{sen}^{10}x + \cos^{10}x - \text{sen}^8x - \cos^8x}{-\text{sen}^6x - \cos^6x}$

$S = \dfrac{-\text{sen}^8x(1 - \text{sen}^2x) - \cos^8x(1 - \cos^2x)}{-\text{sen}^6x - \cos^6x}$

De:

$1 = \text{sen}^2x + \cos^2x$; se tiene

$1 - \text{sen}^2x = \cos^2x \wedge 1 - \cos^2x = \text{sen}^2x$

Luego:

$$S = \frac{-(\text{sen}^8x\cos^2x + \cos^8x\text{sen}^2x)}{-(\text{sen}^6x + \cos^6x)}$$

$$S = \frac{\text{sen}^2x\cos^2x[\text{sen}^6x + \cos^6x]}{(\text{sen}^6x + \cos^6x)}$$

$$S = (\text{sen}x\cos x)^2 = \left(\frac{2\text{sen}x\cos x}{2}\right)^2 \quad \therefore S = \frac{\text{sen}^2 2x}{4}$$

9. Simplificar:

$$Y = \frac{(3\text{sen}^4x - 2) - (1 - 3\cos^4x)}{(\text{sen}^6x - 2) + (\text{sen}^6x + 2\cos^6x)}$$

Resolución:

Y equivale a

$$Y = \frac{3\text{sen}^4x - 2 - 1 + 3\cos^4x}{\text{sen}^6x - 2 + \text{sen}^6x + 2\cos^6x}$$

$$Y = \frac{3(\text{sen}^4x + \cos^4x) - 3}{2(\text{sen}^6x + \cos^6x) - 2}$$

Apliquemos las identidades:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x \\ \text{sen}^6x + \cos^6x = 1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x\end{array}}$$

$$Y = \frac{3(1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x) - 3}{2(1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x) - 2}$$

$$Y = \frac{-6\text{sen}^2x\cos^2x}{-6\text{sen}^2x\cos^2x} \quad \therefore Y = 1$$

10. Reducir la suma:

$$S = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\cot\left(\frac{n\pi}{2} - \theta\right), \text{ si } \cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$$

Resolución:

$$10S = \sum_{n=1}^{10}\cot\left(\frac{n\pi}{2} - \theta\right)$$

$$10S = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cot(\pi - \theta) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \cot(2\pi - \theta) + \cot\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) + \cot(3\pi - \theta) + \cot\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) + \cot(4\pi - \theta) + \cot\left(\frac{9\pi}{2} - \theta\right) + \cot(5\pi - \theta)$$

Observemos que:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\cot\left(\frac{9\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

Además:

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\cot\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

Y aplicando $\cot(k\pi - \theta) = \cot(-\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$, tenemos:

$10S = 3\tan\theta + 3\cot(-\theta) + 2\tan\theta + 2\cot(-\theta)$

$10S = 5\tan\theta + 5\cot(-\theta)$

$2S = \tan\theta - \cot\theta = -(\cot\theta - \tan\theta)$

$2S = -2\cot 2\theta \quad \therefore S = -\cot 2\theta$

11. Si $5\text{sen}\alpha = 6\text{sen}\beta$ y $8\cos\beta = 5\sqrt{3}\cos\alpha$; hallar $\tan^2\beta$.

Resolución:

Dato: $6\text{sen}\beta = 5\text{sen}\alpha$

Multiplicamos por $\sqrt{3}$: $6\sqrt{3}\,\text{sen}\beta = 5\sqrt{3}\,\text{sen}\alpha$

Dato: $8\cos\beta = 5\sqrt{3}\cos\alpha$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro:

$$(6\sqrt{3}\,\text{sen}\beta)^2 + (8\cos\beta)^2 = (5\sqrt{3})^2\underbrace{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1}$$

$108\text{sen}^2\beta + 64\cos^2\beta = 75$

Dividiendo entre $\cos^2\beta$ resulta:

$$108\left(\frac{\text{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}\right) + 64\left(\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\right) = 75\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right)$$

$108\tan^2\beta + 64 = 75\sec^2\beta$

$108\tan^2\beta + 64 = 75(1 + \tan^2\beta)$

$33\tan^2\beta = 11 \quad \therefore \tan^2\beta = 1/3$

12. Si: $\sec\alpha = m + n$, $\tan\alpha = m - n$, hallar: $P = \dfrac{1}{8mn}$

Resolución:

Conocemos la identidad: $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

De donde: $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

$\Rightarrow (m + n)^2 - (m - n)^2 = 1 \Rightarrow 4mn = 1$

Luego : $P = \dfrac{1}{8mn} = \dfrac{1}{2(4mn)} \quad \therefore P = \dfrac{1}{2}$

13. Si $5\text{sen}x = 1 - \cos x$; reducir: $E = 10 + 10\cos x$

Resolución:

E equivale a:

$E = 10(1 + \cos x)$ ...(1)

Como dato se tiene:

$5\text{sen}x = (1 - \cos x)$ ...(2)

Hagamos $(1) \times (2)$:

$E(5\text{sen}x) = 10(1 - \cos^2x)$

$E\text{sen}x = 2\text{sen}^2x \quad \therefore E = 2\text{sen}x$

14. Reducir: $T = (\sec^2 x + \csc^2x)\tan^2x(1 - \cos^2x)\cot^4x$

Resolución:

Se sabe: $\sec^2x + \csc^2x = \sec^2x\csc^2x$

Reemplacemos en T:

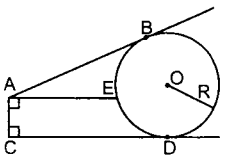
$T = (\sec^2x + \csc^2x)\tan^2x(1 - \cos^2x)\cot^4x$

$T = \sec^2x\underbrace{\csc^2x\tan^2x}_{1}\text{sen}^2x\cot^4x$

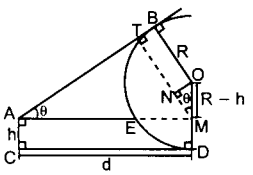
$T = \sec^2x\underbrace{\tan^2x\cot^2x}_{1}\cot^2 x$

$$T = \frac{1}{\cos^2x}\left(\frac{\cos^2x}{\text{sen}^2x}\right) \quad \therefore T = \csc^2x$$

15. En la figura, calcular el radio R en función de h, d y θ, si; $m\angle BAE = \theta$, AC = h, CD = d, B y D son puntos de tangencia.



Resolución:



$\triangle ATM$: $\dfrac{TM}{AM} = \text{sen}\theta \Rightarrow \dfrac{TM}{d} = \text{sen}\theta \Rightarrow TM = d\text{sen}\theta$

$\triangle NOM$: $\dfrac{NM}{OM} = \cos\theta \Rightarrow \dfrac{NM}{R-h} = \cos\theta$

$\Rightarrow NM = (R - h)\cos\theta$

Pero: $TM = TN + NM$

$\Rightarrow d\text{sen}\theta = R + (R - h)\cos\theta$

$d\text{sen}\theta + h\cos\theta = R(1 + \cos\theta)$

$\therefore R = \dfrac{d\text{sen}\theta + h\cos\theta}{1 + \cos\theta}$

16. Si $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \wedge \tan x + \cot x = n$, expresar:

$T = \text{sen}x + \csc x + \cos x + \sec x$ en términos de n.

Resolución:

Dato: $\tan x + \cot x = n$; $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$\Rightarrow \sec x\csc x = n \Rightarrow \text{sen}x\cos x = \dfrac{1}{n}$

Se pide:

$T = \text{sen}x + \dfrac{1}{\text{sen}x} + \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$

$T = (\text{sen}x + \cos x) + \left(\dfrac{\text{sen}x + \cos x}{\text{sen}x\cos x}\right)$

$T = (\text{sen}x + \cos x) + (\text{sen}x + \cos x)\sec x\csc x$

$T = (\text{sen}x + \cos x)(1 + \sec x\csc x)$

$T = \sqrt{1 + 2\text{sen}x\cos x}\,(1 + \sec x\csc x)$

$T = \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sec x\csc x}}\,(1 + \sec x\csc x)$

$\therefore T = \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}}\,(1 + n) = (n + 1)\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}$

17. Si: $-5\pi < 4\theta < -4\pi \ \wedge$

$a\cos^4\theta + b\text{sen}^4\theta = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{b}\right)}$,

tal que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces hallar $\tan\theta$.

Resolución:

$a\cos^4\theta + b\text{sen}^4\theta = \dfrac{ab}{a+b}$; $\theta \in \left\langle -\frac{5\pi}{4}; -\pi\right\rangle$

$a\cos^4\theta + b\text{sen}^4\theta = \dfrac{ab}{a+b}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+b}{b}\right)\cos^4\theta + \left(\dfrac{a+b}{a}\right)\text{sen}^4\theta = 1$

Luego:

$\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\cos^4\theta + \left(\dfrac{a+b}{a}\right)\text{sen}^4\theta = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+b}{b}\right)\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \dfrac{b}{a+b}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+b}{a}\right)\text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = \dfrac{a}{a+b}$

Dividiendo:

$\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a+b}} \Rightarrow \tan^2\theta = \dfrac{a}{b}$

Como: $\theta \in \left\langle -\frac{5\pi}{4}; -\pi\right\rangle \quad \therefore \tan\theta = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

18. Si $A + B + C = 360°$, $\tan A = p$, $\tan B = q$, hallar: $E = (1 - pq)\tan C$

Resolución:

Se pide: $E = (1 - pq)\tan C$

$\Rightarrow E = (1 - \tan A\tan B)\tan C$

$\Rightarrow E = \tan C - \tan A\tan B\tan C$

Como: $A + B + C = 360°$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

En E:

$E = \tan C - (\tan A + \tan B + \tan C)$

$E = -(\tan A + \tan B) \quad \therefore E = -(p + q)$

19. Eliminar θ de: $\tan\theta + \cot\theta = x$
$\sec\theta + \csc\theta = y$

Resolución:

Condición:

$\tan\theta + \cot\theta = x \Rightarrow \sec\theta\csc\theta = x \quad ...(1)$

$\sec\theta + \csc\theta = y \quad ...(2)$

Elevamos al cuadrado la expresión (2):

$(\sec\theta + \csc\theta)^2 = y^2$

$\sec^2\theta + 2\sec\theta\csc\theta + \csc^2\theta = y^2$

$\sec^2\theta\csc^2\theta + 2\sec\theta\csc\theta = y^2$

Reemplazamos (1): $x^2 + 2x = y^2$

20. Reducir: $S = \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \text{sen}x)}{\cos x(1 - \cos x + \text{sen}x)}$

Resolución:

Elevamos al cuadrado:

$S^2 = \dfrac{(1 - \cos x)^2 2(1 + \cos x)(1 + \text{sen}x)}{(\cos^2 x)2(1 - \cos x)(1 + \text{sen}x)}$

$S^2 = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow S^2 = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \quad \therefore S = \tan x$

21. Simplificar:

$$T = \sqrt{|\sec^2 x \csc^2 x| - 4} - |\tan x - \cot x|$$

Resolución:

$$T = \sqrt{|\sec^2 x \csc^2 x| - 4} - |\tan x - \cot x|$$

$$T = \sqrt{\underbrace{\sec^2 x}_{\tan^2 x + 1} + \underbrace{\csc^2 x}_{\cot^2 x + 1} - 4} - |\tan x - \cot x|$$

$$T = \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - \underbrace{2}_{2\tan x \cot x}} - |\tan x - \cot x|$$

$$T = \sqrt{(\tan x - \cot x)^2} - |\tan x - \cot x|$$

$$T = |\tan x - \cot x| - |\tan x - \cot x|$$

$$\therefore\ T = 0$$

22. Simplificar: $R = \dfrac{\sec^4\phi(1 - \text{sen}^4\phi) - 2\tan^2\phi}{\csc^4\phi(1 - \cos^4\phi) - 2\cot^2\phi}$

Resolución:

$$R = \frac{\sec^4\phi - \sec^4\phi\,\text{sen}^4\phi - 2\tan^2\phi}{\csc^4\phi - \csc^4\phi\cos^4\phi - 2\cot^2\phi}$$

Como:

$\sec^4\phi\,\text{sen}^4\phi = \tan^4\phi$; $\sec^2\phi = 1 + \tan^2\phi$

$\csc^4\phi\cos^4\phi = \cot^4\phi$; $\csc^2\phi = 1 + \cot^2\phi$

Reemplazando:

$$R = \frac{(1 + \tan^2\phi)^2 - \tan^4\phi - 2\tan^2\phi}{(1 + \cot^2\phi)^2 - \cot^4\phi - 2\cot^2\phi}$$

$$R = \frac{1 + 2\tan^2\phi + \tan^4\phi - \tan^4\phi - 2\tan^2\phi}{1 + 2\cot^2\phi + \cot^4\phi - \cot^4\phi - 2\cot^2\phi} = 1$$

23. Simplificar: $R = \dfrac{\dfrac{\text{sen}x}{1 - \text{sen}x} + \dfrac{\csc x}{1 - \csc x}}{\dfrac{\cos x}{1 + \cos x} + \dfrac{\sec x}{1 + \sec x}}$

Resolución:

Sabemos: $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}x}$ y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$$R = \frac{\dfrac{\text{sen}x}{1 - \text{sen}x} + \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen}x}}{1 - \dfrac{1}{\text{sen}x}}}{\dfrac{\cos x}{1 + \cos x} + \dfrac{\dfrac{1}{\cos x}}{1 + \dfrac{1}{\cos x}}} = \frac{\dfrac{\text{sen}x}{1 - \text{sen}x} + \dfrac{1}{\text{sen}x - 1}}{\dfrac{\cos x}{1 + \cos x} + \dfrac{1}{\cos x + 1}}$$

$$R = \frac{\dfrac{\text{sen}x - 1}{1 - \text{sen}x}}{\dfrac{\cos x + 1}{1 + \cos x}} = \frac{-1}{1} \qquad \therefore\ R = -1$$

24. Simplificar: $U = \dfrac{(1 - \text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2}{(\text{sen}\alpha + \tan\alpha)(\cos\alpha - \cot\alpha)}$

Resolución:

$$U = \frac{2(1 - \text{sen}\alpha)(1 + \cos\alpha)}{\left(\text{sen}\alpha + \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha - \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)}$$

$$U = \frac{2(1 - \text{sen}\alpha)(1 + \cos\alpha)}{\text{sen}\alpha\left(\dfrac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha\left(\dfrac{\text{sen}\alpha - 1}{\text{sen}\alpha}\right)} \qquad \therefore\ U = -2$$

25. Reducir:

$$B = \left(\frac{\text{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\sec\theta + \csc\theta}\right)\left(\frac{\tan\theta + \cot\theta}{1 - \text{sen}\theta\cos\theta}\right)$$

Resolución:

Sabemos:

$\text{sen}^3\theta + \cos^3\theta = (\text{sen}\theta + \cos\theta)(1 - \text{sen}\theta\cos\theta)$

$\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

Reemplazando:

$$B = \frac{(\text{sen}\theta + \cos\theta)(1 - \text{sen}\theta\cos\theta)}{\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\text{sen}\theta}}\left(\frac{\sec\theta\csc\theta}{1 - \text{sen}\theta\cos\theta}\right)$$

$$B = \text{sen}\theta\underbrace{\cos\theta\sec\theta}_{1}\csc\theta^{\,1} \qquad \therefore\ B = 1$$

26. Reducir:

$$E = \frac{\tan^2 x - \text{sen}^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$$

Resolución:

$$E = \frac{\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \text{sen}^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - \cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - 1\right)}$$

$$E = \frac{\text{sen}^2 x\overbrace{(\sec^2 x - 1)}^{\tan^2 x}}{\cos^2 x\underbrace{(\csc^2 x - 1)}_{\cot^2 x}} = \frac{\text{sen}^2 x\tan^2 x}{\cos^2 x\cot^2 x}$$

$$E = \left(\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{\tan^2 x}{\dfrac{1}{\tan^2 x}}\right) = (\tan^2 x)(\tan^4 x)$$

$$\therefore\ E = \tan^6 x$$

27. Simplificar:

$$N = \cot\theta + \frac{\cos\theta}{\csc\theta + \cot\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{(\cot\theta + \csc\theta)^2}$$

Resolución:

$$N = \cot\theta + \frac{\cos\theta}{\dfrac{1 + \cos\theta}{\text{sen}\theta}} + \frac{\text{sen}\theta}{\left(\dfrac{1 + \cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)^2}$$

$$N = \cot\theta + \frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{\text{sen}^3\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$$

$$N = \cot\theta + \frac{\text{sen}\theta\cos\theta(1 + \cos\theta) + \text{sen}^3\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$$

$$N = \cot\theta + \frac{\text{sen}\theta(\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}{(1 + \cos\theta)^2}$$

$$N = \cot\theta + \frac{\text{sen}\theta(\cos\theta + 1)}{(1 + \cos\theta)^2}$$

$$N = \cot\theta + \frac{\text{sen}\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$$

$$N = \frac{\cos\theta(1 + \cos\theta) + \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta(1 + \cos\theta)} = \frac{\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$N = \frac{\cos\theta + 1}{\text{sen}\theta(1 + \cos\theta)} = \frac{1}{\text{sen}\theta} \qquad \therefore\ N = \csc\theta$$

28. Simplificar:

$$L = \left(\frac{\text{versx}}{\text{senx}} + \frac{\text{covx}}{\cos x}\right)(1 + \text{senx})(1 + \cos x)$$

Resolución:

$$L = \frac{(1 - \cos x)(1 + \text{senx})(1 + \cos x)}{\text{senx}} + \frac{(1 - \text{senx})(1 + \text{senx})(1 + \cos x)}{\cos x}$$

$$L = \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \text{senx})}{\text{senx}} + \frac{(1 - \text{sen}^2 x)(1 + \cos x)}{\cos x}$$

Sabemos: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Entonces: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \wedge \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$$L = \frac{\text{sen}^2 x(1 + \text{senx})}{\text{senx}} + \frac{\cos^2 x(1 + \cos x)}{\cos x}$$

$L = \text{senx}(1 + \text{senx}) + \cos x(1 + \cos x)$

$L = \text{senx} + \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \cos x$

$\therefore\ L = 1 + \text{senx} + \cos x$

29. Hallar el valor de L para que la igualdad:

$$\frac{1 + \text{sen}^4\phi}{1 + \cos^2\phi} + \frac{1 + \cos^4\phi}{1 + \text{sen}^2\phi} = \frac{L(1 - \text{sen}^2\phi\cos^2\phi)}{2 + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi};$$ sea una identidad.

Resolución:

Analizamos el primer miembro:

$$\frac{1 + \text{sen}^4\phi}{1 + \cos^2\phi} + \frac{1 + \cos^4\phi}{1 + \text{sen}^2\phi}$$

$$= \frac{(1 + \text{sen}^4\phi)(1 + \text{sen}^2\phi) + (1 + \cos^4\phi)(1 + \cos^2\phi)}{(1 + \cos^2\phi)(1 + \text{sen}^2\phi)}$$

$$= \frac{1 + \text{sen}^4\phi + \text{sen}^2\phi + \text{sen}^6\phi + 1 + \cos^4\phi + \cos^2\phi + \cos^6\phi}{1 + \cos^2\phi + \text{sen}^2\phi + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

Agrupamos en forma conveniente:

$$= \frac{2 + (\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi) + (\text{sen}^4\phi + \cos^4\phi) + (\text{sen}^6\phi + \cos^6\phi)}{1 + (\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi) + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

Recordar:

$\text{sen}^4\phi + \cos^4\phi = 1 - 2\text{sen}^2\phi\cos^2\phi$

$\text{sen}^6\phi + \cos^6\phi = 1 - 3\text{sen}^2\phi\cos^2\phi$

$$= \frac{2 + 1 + 1 - 2\text{sen}^2\phi\cos^2\phi + 1 - 3\text{sen}^2\phi\cos^2\phi}{2 + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \frac{5 - 5\text{sen}^2\phi\cos^2\phi}{2 + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi} = \frac{5(1 - \text{sen}^2\phi\cos^2\phi)}{2 + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \frac{L(1 - \text{sen}^2\phi\cos^2\phi)}{2 + \text{sen}^2\phi\cos^2\phi} \qquad \therefore\ L = 5$$

30. Si: $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = 2$ (α agudo), hallar $15(\tan\alpha + \text{sen}\alpha)$

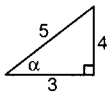
Resolución:

$$\frac{1 + \cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \csc\alpha + \cot\alpha = 2 \ldots(\text{I})$$

$\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1 \Rightarrow (\csc\alpha - \cot\alpha)(\csc\alpha + \cot\alpha) = 1$

$\csc\alpha - \cot\alpha = \dfrac{1}{2} \qquad \ldots(\text{II})$

de (I) y (II): $\csc\alpha = \dfrac{5}{4}$



$$\therefore\ 15(\tan\alpha + \text{sen}\alpha) = 15\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5}\right) = 32$$

31. Al simplificar la expresión

$$T = \frac{\sec^2\theta + \cos^2\theta - 2}{\sec\theta + \cos\theta - 2} - 2\sec\theta - \cos\theta - 2$$

se obtiene

Resolución:

$$T = \frac{\sec^2\theta + \cos^2\theta - 2\sec\theta\cos\theta - 2 + 2}{\sec\theta + \cos\theta - 2} - 2\sec\theta - \cos\theta - 2$$

$$T = \frac{(\sec\theta + \cos\theta - 2)(\sec\theta + \cos\theta + 2)}{\sec\theta + \cos\theta - 2} - 2\sec\theta - \cos\theta - 2$$

$T = \sec\theta + \cos\theta + 2 - 2\sec\theta - \cos\theta - 2$

$\therefore\ T = -\sec\theta$

32. Hallar k si:

$$4\cot^2\frac{\pi}{5} - \cos^2\frac{\pi}{5} + 5 = (k - 2)\left(\text{sen}\frac{\pi}{5} + 2\csc\frac{\pi}{5} + \csc\frac{\pi}{6}\right)$$

Resolución:

$$k - 2 = \frac{4\left(\cot^2\frac{\pi}{5} + 1\right) + \text{sen}^2\frac{\pi}{5}}{\text{sen}\frac{\pi}{5} + 2\csc\frac{\pi}{5} + 2}$$

$$k - 2 = \frac{4\csc^2\frac{\pi}{5} - 4 + 4 + \text{sen}^2\frac{\pi}{5}}{\text{sen}\frac{\pi}{5} + 2\csc\frac{\pi}{5} + 2}$$

$$k - 2 = \frac{\left(2\csc\frac{\pi}{5} + \text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^2 - 2^2}{\text{sen}\frac{\pi}{5} + 2\csc\frac{\pi}{5} + 2}$$

$$k - 2 = 2\csc\frac{\pi}{5} + \text{sen}\frac{\pi}{5} - 2$$

$$\therefore\ k = 2\csc\frac{\pi}{5} + \text{sen}\frac{\pi}{5}$$

33. Calcular el valor de: $M = \dfrac{\sec x}{\text{cov}x} + \dfrac{1 + \text{senx}}{\cos^3 x}$

si se cumple: $(\text{versx} + \text{covx} - 1)2 = \text{exsecx}$

Resolución:

Recordando las identidades

$\text{vers} = 1 - \cos x$

$\text{covx} = 1 - \text{senx}$

$\text{exsecx} = \sec x - 1$

En la condición del problema:

$(1 - \cos x + 1 - \text{senx} - 1)^2 = \sec x - 1$

$(1 - \cos x - \text{senx})^2 = \dfrac{1}{\cos x} - 1$

$2(1 - \cos x)(1 - \text{senx}) = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

$\Rightarrow \cos x(1 - \text{senx}) = \dfrac{1}{2}$

Simplificando la expresión que piden:

$$M = \frac{\frac{1}{\cos x}}{1 - \text{senx}} + \frac{1 + \text{senx}}{\cos^2 x\cos x}$$

$$M = \frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen}x)} + \frac{1+\operatorname{sen}x}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)\cos x}$$

$$\therefore\ M = \frac{2}{\cos x(1-\operatorname{sen}x)}$$

34. De la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{\cot x+1} + \frac{1}{\cot x-1} = \cot^k(ax)$$

calcular: $a + k$

Resolución:

Efectuando en el primer miembro:

$$\frac{\cot x - 1 + \cot x + 1}{(\cot x+1)(\cot x-1)} = \cot^k(ax)$$

$$\frac{2\cot x}{\cot^2 x - 1} = \cot^k(ax)$$

Multiplicando por $\tan^2 x$

$$\frac{2\cot x\tan^2 x}{(\cot^2 x-1)\tan^2 x} = \cot^k(ax)$$

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \cot k(ax)$$

$\tan 2x = \cot^k(ax)$

$(\cot 2x)^{-1} = \cot^k(ax) \Rightarrow a = 2,\ k = -1$

$\therefore\ a + k = 1$

35. Hallar x si: $\tan x + \cot x = \left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{\sec x - \csc x}{\operatorname{sen}\theta}$

Resolución:

Dato: $\tan x + \cot x = \frac{\sec x - \csc x}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\sec x\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$$

$$\frac{1}{\cos x\operatorname{sen}x} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}x - \cos x}{\cos x\operatorname{sen}x}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}x - \cos x \Rightarrow$ Elevamos al cuadrado:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$2\operatorname{sen}x\cos x = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$

$2\operatorname{sen}x\cos x = \cos^2\theta$ ...(1)

Dato: $\tan x + \cot x = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$

$$\sec x\csc x = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

$x^2 = \sec x\csc x\cos^2\theta$

$$x^2 = \frac{\cos^2\theta}{\cos x\operatorname{sen}x} \quad ...(2)$$

(1) en (2): $x^2 = \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x\operatorname{sen}x}$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{2}$

36. Hallar: $T = \csc x + \cot x$. Si: $\sec x + \tan x = n$

Resolución:

Del dato: $\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = n$

Restando 1: $\frac{1+\operatorname{sen}x - \cos x}{\cos x} = n - 1$ ...(1)

Además: $T = \frac{1}{\operatorname{sen}x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$

Restando 1: $\frac{1+\cos x - \operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x} = T - 1$ ...(2)

Se sabe que:

$(1 + \operatorname{sen}x - \cos x)(1 - \operatorname{sen}x + \cos x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$

al multiplicar (1) × (2):

$$\frac{(1+\operatorname{sen}x-\cos x)}{\cos x}\frac{(1-\operatorname{sen}x+\cos x)}{\operatorname{sen}x} = (n-1)(T-1)$$

$$\Rightarrow \frac{(2\operatorname{sen}x\cos x)}{\cos x\operatorname{sen}x} = (n-1)(T-1)$$

Luego de multiplicar:

$$\frac{2}{n-1} = T - 1 \quad \therefore\ T = \frac{n+1}{n-1}$$

37. Obtener $\tan\theta$ si:

$x = \tan\theta + \sec\theta + m\tan\theta$

$y = \cot\theta + \csc\theta + n\cot\theta$

Resolución:

$x = \tan\theta(m+1) + \sec\theta \Rightarrow x - \tan\theta(m+1) = \sec\theta$

$y = \cot\theta(n+1) + \csc\theta \Rightarrow y - \cot\theta(n+1) = \csc\theta$

Dividiendo: $\frac{x - \tan\theta(m+1)}{y - \cot\theta(n+1)} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}$

$x - \tan\theta(m+1) = \tan\theta(y - \cot\theta(n+1))$

$x - \tan\theta(m+1) = y\tan\theta - (n+1)$

$x + n + 1 = (y + m + 1)\tan\theta$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{x+n+1}{y+m+1}$

38. Si: $\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x$

Hallar: $T = \sec^2 x + \csc^2 x$, en términos de θ

Resolución:

Con el dato: $\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos^2 x) + \cos^4 x$

$\cos^2 x - \cos^4 x = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$

$\cos^2 x(1 - \cos^2 x) = \cos^2\theta$

$\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x = \cos^2\theta$

$\sec^2 x\csc^2 x = \sec^2\theta$

Como: $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x\csc^2 x$

$\therefore\ T = \sec^2\theta$

39. El equivalente de:

$M = (1 + 2\tan^2 x)(1 + 2\sec^2 x\tan^2 x)$, es:

Resolución:

Recordar: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$M = (\underbrace{1+\tan^2 x}_{\sec^2 x} + \tan^2 x)(1 + 2\underbrace{\sec^2 x}_{1+\tan^2 x}\tan^2 x)$$

$$M = \underbrace{\overbrace{(\sec^2 x - \tan^2 x)}^{1}(\sec^2 x + \tan^2 x)}_{\operatorname{sen}^4 x - \tan^4 x}(1 + 2\tan^2 x + 2\tan^4 x)$$

$$M = (\sec^4 x - \tan^4 x)(\underbrace{1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x}_{(1+\tan^2 x)^2} + \tan 4x)$$

$M = (\sec^4x - \tan^4x)(\underbrace{(\sec^2x)^2}_{\sec^4x} + \tan^4x)$

Por diferencia de cuadrados:

$\therefore\ M = \sec^8x - \tan^8x$

40. Calcular: $T = \dfrac{\tan^2x}{\csc^4\phi} - \dfrac{\csc^2x}{\operatorname{sen}^2\theta}$

Sabiendo que: $\operatorname{sen}x = \cot\theta$

$\operatorname{sen}\phi = \cot x$

Resolución:

$T = \tan^2x\underbrace{\operatorname{sen}^4\phi} - \csc^2x\csc^2\theta$

$T = \tan^2x\,(\cot^4x) - \csc^2x\,(\underbrace{\cot^2\theta})$

$T = \dfrac{1}{\cot^2x}\cot^4x - \csc^2x\,(1 + (\operatorname{sen}x)^2)$

$T = \cot^2x - \csc^2x - \underbrace{\csc^2x\operatorname{sen}^2x}$

$T = \cot^2x - (1 + \cot^2x) - 1$

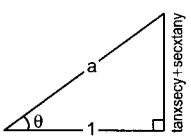
Simplificando: $\therefore\ T = -2$

41. Si x, y, θ son agudos, tales que:

$\tan\theta = \tan x\sec y + \sec x\tan y$

Reducir: $T = (\sec x\sec y + \tan x\tan y)\cot\theta$

Resolución:



$\Rightarrow\ a^2 = 1^2 + (\tan x\sec y + \sec x\tan y)^2$

$a^2 = 1 + \tan^2x\sec^2y + \tan^2y\sec^2x +$
$+ 2\tan x\sec y\tan y\sec x$

Si en lugar de "1" reemplazamos: $\sec^2y - \tan^2y$

Luego de agrupar convenientemente se tendrá:

$a^2 = \sec^2y(1 + \tan^2x) + \tan^2y(\sec^2x - 1)$
$+ 2\sec x\sec y\tan x\tan y$

$a^2 = \sec^2y\sec^2x + \tan^2y\tan^2x +$
$+ 2(\sec x\sec y)(\tan x\tan y)$

$a^2 = (\sec x\sec y + \tan x\tan y)^2$

$\Rightarrow\ a = \sec x\sec y + \tan x\tan y$

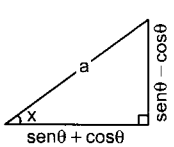
Reemplazando en T: $T = (a)\cot\theta \Rightarrow \dfrac{a\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Pero del triángulo $a\cos\theta = 1 \quad \therefore\ T = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

42. Siendo: $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

Calcular: $V = \csc x(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

Resolución:



$a^2 = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2$

efectuando:

$a^2 = 2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

como no se conoce el cuadrante de x: $a = \pm\sqrt{2}$

Luego: $\csc x = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

$\Rightarrow\ \underbrace{\csc x(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}_{V} = a$

Luego: $V = \pm\sqrt{2}$

43. Dada la siguiente relación:

$\operatorname{sen}^3x + \operatorname{sen}^2x + \cot^2x = \csc^2x$

hallar el valor de: $E = \sec^2x - \csc x$

Resolución:

Dato: $\operatorname{sen}^3x + \operatorname{sen}^2x = \underbrace{\csc^2x - \cot^2x}_{1}$

$\Rightarrow\ \operatorname{sen}^3x = 1 - \operatorname{sen}^2x \Rightarrow \operatorname{sen}^3x = \cos^2x$

en E:

$E = \dfrac{1}{\cos^2x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^3x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$

$E = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}^2x} = \dfrac{\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x} \quad \therefore\ E = 1$

44. Si: $\cos a = \dfrac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x}$ ...(1)

$\cos b = \dfrac{\tan y}{\tan x}$ ...(2)

Hallar cosx en función de a y b solamente.

Resolución:

De (1): $\operatorname{sen}y = \cos a\operatorname{sen}x$

$\csc y = \dfrac{1}{\cos a\operatorname{sen}x}$

De (2): $\tan y = \cos b\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \quad \cot y = \dfrac{\cos x}{\cos b\operatorname{sen}x}$

Se sabe: $\csc^2y - \cot^2y = 1$

$\left(\dfrac{1}{\cos a\operatorname{sen}y}\right)^2 - \left(\dfrac{\cos x}{\cos b\operatorname{sen}x}\right)^2 = 1$

$\sec^2a - \sec^2b\cos^2x = \operatorname{sen}^2x$

$1 + \tan^2a - \sec^2b\cos^2x = 1 - \cos^2x$

$\tan^2a = \sec^2b\cos^2x - \cos^2x$

$\tan^2a = \cos^2x\,(\underbrace{\sec^2b - 1}_{\tan^2b})$

Luego: $\cos^2x = \dfrac{\tan^2a}{\tan^2b} \quad \therefore\ \cos x = \pm\dfrac{\tan a}{\tan b}$

45. Hallar en términos de θ

$S = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\operatorname{sen}x}\sqrt{\tan x} + \sqrt{\sec x}$

Sabiendo que: $\sqrt{\operatorname{sen}x + \tan x + \sec x} = \tan\theta$

$(\theta \in IC)$

Resolución:

Transformando S:

$S = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\operatorname{sen}x}\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}x}}{\sqrt{\cos x}} + \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

$$S = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x + 1}{\sqrt{\cos x}} \Rightarrow S^2 = \frac{(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\cos x}$$

$$S^2 = \frac{2(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)}{\cos x}$$

$$S^2 = 2\frac{(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos x)}{\cos x}$$

$$S^2 = 2\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}\right)$$

$$S^2 = 2(\sec x + \tan x + \operatorname{sen} x + 1)$$

Pero el dato:

$\sec x + \tan x + \operatorname{sen} x = \tan^2\theta$

$\Rightarrow S^2 = 2(\tan^2\theta + 1) = 2(\sec^2\theta) \quad \therefore S = \sqrt{2}\sec\theta$

46. Hallar el intervalo de: $T = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$

Resolución:

$T = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$

$T = (\underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_{1})(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

$T = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$T = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$T = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$

$T = 2\cos^2 x - 1$

Sabemos que: $0 \le \cos^2 x \le 1$

$0 \le 2\cos^2 x \le 2$

$-1 \le \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{T} \le 1$

$\therefore -1 \le T \le 1$

47. Si la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{\sec x + \csc x + \sec x \csc x} + \frac{1}{\sec x + \csc x - \sec x \csc x}$$

es equivalente a otra de la forma: $A\operatorname{sen} x - B\cos x$

Hallar: A y B

Resolución:

$$P = \frac{\sec x + \csc x - \sec x \csc x + \sec x + \csc x + \sec x \csc x}{(\sec x + \csc x)^2 - (\sec x \csc x)^2}$$

Se sabe: $\sec^2 x \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

$$P = \frac{2(\sec x + \csc x)}{\sec^2 x + \csc^2 x + 2\sec x \csc x - \sec^2 x \csc^2 x}$$

$$P = \frac{2(\sec x + \csc x)}{2\sec x \csc x}$$

A senos y cosenos:

$$P = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \Rightarrow P = \frac{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x \operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}}$$

$$P = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x \operatorname{sen} x)}{\cos x \operatorname{sen} x}$$

$P = \operatorname{sen} x + \cos x$

Luego: $A\operatorname{sen} x - B\cos x \equiv \operatorname{sen} x + \cos x$

$\therefore A = 1 \wedge B = -1$

48. Si: $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta = m$

Hallar: $T = \dfrac{\cot^2\theta - \tan^2\alpha}{\sec^2\alpha \csc^2\theta}$

Resolución:

Sumamos y restamos 1 en el numerador:

$$T = \frac{\cot^2\theta - \tan^2\alpha + 1 - 1}{\sec^2\alpha \csc^2\theta}$$

Agrupando convenientemente:

$$T = \frac{(1 + \cot^2\theta) - (1 + \tan^2\alpha)}{\sec^2\alpha \csc^2\theta}$$

Sabemos que: $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

$$\Rightarrow T = \frac{\csc^2\theta - \sec^2\alpha}{\sec^2\alpha \csc^2\theta}$$

A senos y cosenos:

$$T = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}} \Rightarrow T = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$T = \frac{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta)}{(\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\alpha)}$$

$T = \underbrace{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta}_{m} \quad \therefore T = m$

49. De la siguiente igualdad se ha considerado que: $x \ne n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$, calcular: $S + T + V$

$$\frac{3}{1 + \cos x} + \frac{3}{\sec x - 1} = T + V(\tan x)^S$$

Resolución:

Del primer miembro:

$$\frac{3}{1 + \cos x} + \frac{3}{\sec x - 1} \Rightarrow \frac{3}{1 + \cos x} + \frac{3}{\frac{1}{\cos x} - 1}$$

$$\frac{3}{1 + \cos x} + \frac{3}{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} \Rightarrow \frac{3}{1 + \cos x} + \frac{3\cos x}{1 - \cos x}$$

$$3\left[\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 - \cos x}\right]$$

$$3\left[\frac{1 - \cos x + \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}\right] \Rightarrow 3\left[\frac{1 + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$$

$3[\csc^2 x + \cot^2 x]$

$3[1 + \cot^2 x + \cot^2 x]$

$3[1 + 2\cot^2 x]$

$3 + 6\cot^2 x$

Igualando al segundo miembro:

$3 + 6\cot^2 x = T + V(\tan x)^S$

$\Rightarrow T = 3;\ V = 6;\ S = -2 \quad \therefore -2 + 3 + 6 = 7$

50. Calcular A sabiendo que es independiente de x

$A = \operatorname{sen}^4 x(1 - k\operatorname{sen}^2 x) + \cos^4 x(1 - \cos^2 x)$

Resolución:

En la expresión N:

$A = \text{sen}^4x(1 - k\text{sen}^2x) + \cos^4x(1 - k\cos^2x)$
$A = \underline{\text{sen}^4x} - \underline{\underline{k\text{sen}^6x}} + \underline{\cos^4x} - \underline{\underline{k\cos^6x}}$
Agrupando convenientemente:
$A = \underbrace{\text{sen}^4x + \cos^4x} - \underline{\underline{k}}\text{sen}^6x - \underline{\underline{k}}\cos^6x$
$A = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x - k(\underbrace{\text{sen}^6x + \cos^6x})$
$A = 1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x - k(1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x)$
$A = 1 - k + (3k - 2)\,\text{sen}^2x\cos^2x$
Como es independiente de x:
$3k - 2 = 0 \Rightarrow 3k = 2$
$k = \frac{2}{3} \quad \therefore A = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

51. Determinar el valor de T, si: $T = n + m$ a partir de la siguiente identidad

$$1 - 4\text{sen}^2x\cos^2x + 2\text{sen}^4x\cos^4x = \frac{\text{sen}^mx + \cos^mx}{\text{sen}^mx + \cos^nx}$$

Resolución:
Realizando un artificio en el primer miembro así:
Sumamos y restamos $2\text{sen}^4x\cos^4$
$= 1 - 4\text{sen}^2x\cos^2x + 2\text{sen}^4x\cos^4x$
$= \underbrace{1 - 4\text{sen}^2x\cos^2x + 4\text{sen}^4x\cos^4x} - 2\text{sen}^4x\cos^4x$
$= (1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x)^2 - 2\text{sen}^4x\cos^4x$
$= (\text{sen}^4x + \cos^4x)^2 - 2\text{sen}^4x\cos^4x$
$= \text{sen}^8x + \cos^8x + 2\text{sen}^4x\cos^4x - 2\text{sen}^4x\cos^4x$
$= \frac{\text{sen}^8x + \cos^8x}{1} = \frac{\text{sen}^mx + \cos^mx}{\text{sen}^nx + \cos^nx}$
Pero: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$
$\Rightarrow \frac{\text{sen}^8x + \cos^8x}{\text{sen}^2x + \cos^2x} = \frac{\text{sen}^mx + \cos^mx}{\text{sen}^nx + \cos^nx}$
Identificando valores: $m = 8$; $n = 2$
Nos piden: $\therefore T = n + m = 8 + 2 = 10$

52. Si se cumple: $\frac{\text{sen}^3\alpha\cos\alpha + 1}{\cos^3\alpha\,\text{sen}\alpha + 1} = \frac{\cot\alpha}{3}$

Calcular: $M = \frac{\text{sen}\alpha - \cos^7\alpha + \cos^5\alpha - \text{sen}^3\alpha}{\cos\alpha - \text{sen}^7\alpha + \text{sen}^5\alpha - \cos^3\alpha}$

Resolución:
De la condición: $\frac{\text{sen}^3\alpha\cos\alpha + 1}{\cos^3\alpha\,\text{sen}\alpha + 1} = \frac{\cot\alpha}{3}$

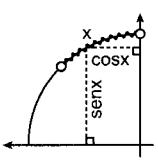
$$\frac{\text{sen}^3\alpha\cos\alpha + 1}{\cos^3\alpha\,\text{sen}\alpha + 1} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Efectuando: $\frac{\text{sen}^4\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos^4\alpha\,\text{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{3}$ ...(1)

Agrupando convenientemente en M
$$M = \frac{\text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha + \cos^5\alpha - \cos^7\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha + \text{sen}^5\alpha - \text{sen}^7\alpha}$$
Factorizando:
$$M = \frac{\text{sen}\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha) + \cos^5\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) + \text{sen}^5\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha)}$$
$$M = \frac{\text{sen}\alpha\cos^2\alpha + \cos^5\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^5\alpha\cos^2\alpha}$$
Factorizando: $\text{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$
$$M = \frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha(\cos\alpha + \cos^4\alpha\,\text{sen}\alpha)}{\text{sen}\alpha\cos\alpha(\text{sen}\alpha + \text{sen}^4\alpha\cos\alpha)}$$
$$M = \frac{\cos\alpha + \cos^4\alpha\,\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha + \text{sen}^4\alpha\cos\alpha} \quad ...(2)$$
De las expresiones (1) y (2)
$\therefore M = 3$

53. Si: $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{4} \right\rangle$
Reducir:
$$T = \sqrt{2} + \sqrt{1 - \text{sen}x + \cos x - \text{sen}x\cos x} - \sqrt{1 + \text{sen}x\cos x + \text{sen}x + \cos x}$$

Resolución:
Factorizando en M:
$$T = \sqrt{2} + \sqrt{1 - \text{sen}x + \cos x - \text{sen}x\cos x} - \sqrt{1 + \text{sen}x\cos x - \text{sen}x + \cos x}$$
$$T = \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \cos x) - \text{sen}x(1 + \cos x)} - \sqrt{(1 + \cos x) + \text{sen}x(\cos x + 1)}$$
$$T = \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \text{sen}x)} - \sqrt{(1 + \cos x)(1 + \text{sen}x)}$$
Luego, multiplicamos y dividimos por 2:
$$T = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2(1 + \cos x)(1 - \text{sen}x)}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2(1 + \cos x)(1 + \text{sen}x)}}{\sqrt{2}}$$
Por productos notables trigonométricos sabemos que:
$(1 \pm \text{sen}x \mp \cos x)^2 = 2(1 \pm \text{sen}x)(1 \mp \cos x)$
$(1 \pm \text{sen}x \mp \cos x)^2 = 2(1 \pm \text{sen}x)(1 \mp \cos x)$
$$T = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{(1 - \text{sen}x + \cos x)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(1 + \text{sen}x + \cos x)^2}}{\sqrt{2}}$$
$$T = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}|1 - \text{sen}x + \cos x| - \frac{\sqrt{2}}{2}|1 + \text{sen}x + \cos x|$$
Del gráfico:



$1 - \text{sen}x + \cos x$: negativo
$1 + \text{sen}x + \cos x$: positivo
Reemplazamos en T:
$$T = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}[-(1 - \text{sen}x + \cos x)] - \frac{\sqrt{2}}{2}[1 + \text{sen}x + \cos x]$$
Resolviendo: $T = -\sqrt{2}\cos x$

54. Dado: $a\cos x\,\text{sen}y + b\,\text{sen}x\cos y = 0$
Calcular: $T = \frac{a^2\csc^2x - b^2\cot^2y}{a} - \frac{a^2\cot^2x - b^2\csc^2y}{b}$

Resolución:
De la condición: $a\cos x\,\text{sen}y + b\,\text{sen}x\cos y = 0$
$$a = \frac{-b\,\text{sen}x\cos y}{\cos x\,\text{sen}y}$$

$a = -b\tan x\cot y \ \wedge\ b = -a\cot x\tan y$

Reemplazando en N:

$$T = \frac{a^2\csc^2 x - a^2\cot^2 x\overbrace{\tan^2 y\cot^2 y}^{1}}{a} - \frac{b^2\tan^2 x\cot^2 y\cot^2 x - b^2\csc^2 y}{b}$$

$$T = \frac{a^2(\csc^2 x) - \cot^2 x}{} - \frac{b^2(\cot^2 y - \csc^2 y)}{b}$$

$$T = \frac{a^2}{a} - \frac{-b^2}{b} \quad \therefore\ T = a + b$$

55. Dado: $\sec\alpha\csc\alpha = 5$

Hallar:

$E = \text{sen}^3\alpha\tan\alpha + \cos^2\alpha\cot\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$

Resolución:

Expresando E en términos de senos y cosenos:

$$E = \frac{\text{sen}^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\text{sen}\alpha} + 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$E = \frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\cos\alpha\,\text{sen}\alpha} + 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$E = \frac{1 - 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,\text{sen}\alpha} + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$E = \frac{1 - 2\text{sen}^2\alpha\cos\alpha + 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,\text{sen}\alpha}$$

$$\therefore\ E = \frac{1}{\cos\alpha\,\text{sen}\alpha} = \sec\alpha\csc\alpha = 5$$

56. Si: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; 0\right\rangle$ reducir:

$$T = \sqrt{\sec^2 x\csc^2 x + 2(\tan x + \cot x)} - \sqrt{\sec^2 x\csc^2 x - 2\sec x\csc x}$$

Resolución:

En:

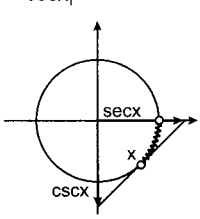
$$T = \sqrt{\sec^2 x\csc^2 x + 2(\tan x + \cot x)} - \sqrt{\sec^2 x\csc^2 x - 2\sec x\csc x}$$

$$T = \sqrt{\sec^2 x\csc^2 x + 2\sec x\csc x} - \sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x - 2\sec x\csc x}$$

$$T = \sqrt{(\sec x + \csc x)^2} - \sqrt{(\sec x - \csc x)^2}$$

$$T = |\sec x + \csc x| - |\sec x - \csc x|$$

Dato: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; 0\right\rangle$



$\Rightarrow \sec x > \csc x$

$\sec x - \csc x > 0$

Del gráfico:

$\sec x + \csc x < 0$

$\Rightarrow T = -(\sec x + \csc x) - (\sec x - \csc x)$

$T = -\sec x - \csc x - \sec x + \csc x$

$\therefore\ T = -2\sec x$

57. Reducir: $T = \tan^2 x\left[\sum_{k=1}^{n}\sec^k x\right]$

Resolución:

Sea: $M = \sum_{k=1}^{n}\sec^k x$

$M = \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x \ldots \sec^n x \qquad \ldots(I)$

Multiplicando a "M" por cosx:

$\cos x M = \underbrace{\cos x\sec x} + \underbrace{\cos x\sec^2 x} + \underbrace{\cos x\sec^3 x} + \ldots + \cos x\sec^n x$

$\cos x M = 1 + \sec x + \sec^2 x + \ldots + \sec^{n-1} x \quad \ldots(II)$

(II) − (I): $M(\cos x - 1) = 1 - \sec^n x$

$$M = \frac{1 - \sec^n x}{\cos x - 1}$$

En T:

$$T = \tan^2 x\left(\frac{1 - \sec^n x}{\cos x - 1}\right)$$

$$T = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\left(\frac{1 - \sec^n x}{\cos x - 1}\right)$$

$$T = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\left(\frac{1 - \sec^n x}{\cos x - 1}\right)$$

$$T = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x}\left(\frac{1 - \sec^n\alpha}{\cos x - 1}\right)$$

$$T = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\cos^2 x}(\sec^n x - 1)$$

$$T = (\sec^2 x + \sec x)(\sec^n x - 1)$$

$$\therefore\ T = \sec x(\sec x + 1)(\sec^n x - 1)$$

58. Si se cumple: $\frac{\csc x}{\cot\theta} - \frac{\cot x}{\cot\phi} = \sqrt{\sec^2\theta - \sec^2\phi}$

Calcular: cosx

Resolución:

De la condición: $\frac{\csc x}{\cot\theta} - \frac{\cot x}{\cot\phi} = \sqrt{\sec^2\theta - \sec^2\phi}$

$$\frac{\frac{1}{\text{sen}x}}{\frac{1}{\tan\theta}} - \frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan\phi}} = \sqrt{\sec^2\theta - \sec^2\phi}$$

$$\left[\frac{\tan\theta}{\text{sen}x} - \frac{\tan\phi}{\tan x}\right]^2 = \tan 2\theta - \tan 2\phi$$

$$\left[\frac{\tan\theta}{\text{sen}x} - \frac{\cos x\tan\phi}{\text{sen}x}\right]^2 = \tan^2\theta - \tan^2\phi$$

$$\tan^2\theta - 2\cos x\tan\theta\tan\phi + \cos^2 x\tan^2\phi = \text{sen}^2 x\tan^2\theta - \text{sen}^2 x\tan^2\phi$$

$$\tan^2\theta\,(1 - \text{sen}^2 x) + \tan^2\phi(\underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1}) = 2\cos x\tan\theta\tan\phi$$

$$\tan^2\theta\cos^2 x - 2\cos x\tan\theta\tan\phi + \tan^2\phi = 0$$

$$(\tan\theta + \cos x - \tan\phi)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta\cos x - \tan\phi = 0$$

$$\therefore\ \cos x = \tan\phi\cot\theta$$

59. Si $\cot(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$, encuentre el valor de la siguiente expresión:

$$E = \frac{a}{b\,\text{sen}x} + \frac{b}{a\cos x}$$

siendo x un arco del primer cuadrante.

Resolución:

Por dato: $\cot x = \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$ de donde $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\cos^3 x}{\text{sen}^3 x}}$

Reemplazando en E.

$$E = \frac{1}{\text{sen}x}\sqrt{\frac{\text{sen}^3x}{\cos^3x}} + \frac{1}{\cos x}\sqrt{\frac{\cos^3x}{\text{sen}^3x}}$$

Reduciendo: $E = (\sec x \csc x)^{3/2}$

$E = (\tan x + \cot x)^{3/2}$

Reemplazando dato

$$\therefore\ E = \left[\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}\right]^{3/2}$$

60. ¿Qué se puede afirmar de la siguiente expresión:

$$S = \sqrt{1 + \frac{2}{\tan x + \cot x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{\tan x + \cot x}}$$

$x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$

Resolución:

Sabemos que: $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$$S = \sqrt{1 + \frac{2}{\sec x \csc x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{\sec x \csc x}}$$

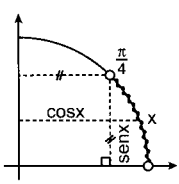
$$S = \sqrt{1 + \frac{2}{\frac{1}{\cos x \text{sen}x}}} - \sqrt{1 - \frac{2}{\frac{1}{\cos x \text{sen}x}}}$$

$$S = \sqrt{1 + 2\cos x \text{sen}x} - \sqrt{1 - 2\cos x \text{sen}x}$$

Como: $1 \pm 2\text{sen}x\cos x = (\text{sen}x \pm \cos x)^2$

$S = |\text{sen}x + \cos x| - |\text{sen}x - \cos x|$

Graficando: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$



Luego: $\cos x > \text{sen}x$

$0 > \text{sen}x - \cos x$

$S = \text{sen}x + \cos x - [-(\text{sen}x - \cos x)]$

$\therefore\ E = 2\text{sen}x$

61. Si: $\dfrac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sec^4\theta + \tan^4\theta} = \dfrac{A}{B^2 + 2A}$

Hallar: $A + B$

Resolución:

Del enunciado: $\dfrac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sec^4\theta + \tan^4\theta} = \dfrac{A}{B^2 + 2A}$

A senos y cosenos:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{\frac{1}{\cos^4\theta} + \frac{\text{sen}^4\theta}{\cos^4\theta}} = \frac{A}{B^2 + 2A}$$

$$\frac{\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}}{\frac{1 + \text{sen}^4\theta}{\cos^4\theta}} = \frac{A}{B^2 + 2A}$$

$$\frac{(\text{sen}^2\theta)(\cos^4\theta)}{(\cos^4\theta)(1 + \text{sen}^4\theta)} = \frac{A}{B^2 + 2A}$$

$$\frac{\text{sen}^2\theta}{1 + \text{sen}^4\theta} = \frac{A}{B^2 + 2A} \qquad ...(I)$$

Sabemos que: $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$

Al cuadrado: $\cos^4\theta = 1 + \text{sen}^4\theta - 2\text{sen}^2\theta$

$\Rightarrow 1 + \text{sen}^4\theta = \cos^4\theta + 2\text{sen}^2\theta \qquad ...(II)$

Reemplazando (II) en (I):

$$\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^4\theta + 2\text{sen}^2\theta} = \frac{A}{B^2 + 2A}$$

$\Rightarrow A = \text{sen}^2\theta \wedge B = \cos^2\theta$

$\therefore\ A + B = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

62. Eliminar x de las ecuaciones:

$\sec x - \csc x = m \qquad ...(1)$

$\tan^2x + 1 = n\tan x \qquad ...(2)$

Resolución:

De (2): $\sec^2x = n\tan x \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2x} = n\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x \text{sen}x} = n \Rightarrow \sec x \csc x = n \qquad ...(3)$$

$(1)^2$: $\underbrace{\sec^2x + \csc^2x}_{\sec^2x\csc^2x} - 2\sec x \csc x = m^2$

Y reemplazando, lo hallado en (3):

$n^2 - 2n = m^2 \quad \therefore\ n^2 - m^2 = 2n$

63. Reducir:

$$A = \frac{\tan x - \sec x \text{sen}y}{1 - \sec x \cos y} + \frac{1 + \cos x \sec y}{\tan y + \text{sen}x \sec y}$$

Resolución:

Llevando a senos y cosenos:

$$A = \frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\text{sen}y}{1 - \frac{1}{\cos x}\cos y} + \frac{1 + \cos x\frac{1}{\cos y}}{\frac{\text{sen}y}{\cos y} + \text{sen}x\frac{1}{\cos y}}$$

Efectuando y simplificando:

$$A = \frac{\text{sen}x - \text{sen}y}{\cos x - \cos y} + \frac{\cos y + \cos x}{\text{sen}y + \text{sen}x}$$

$$A = \frac{\text{sen}^2x - \text{sen}^2y + \cos^2x - \cos^2y}{(\cos x - \cos y)(\text{sen}y + \text{sen}x)}$$

$$A = \frac{1 - 1}{(\cos x - \cos y)(\text{sen}y + \text{sen}y)} \qquad \therefore\ A = 0$$

64. Si se cumple que: $n\tan x = m$

Hallar: $R = \dfrac{m\text{sen}x - n\cos x}{n\text{sen}x + m\cos x}$

Resolución:

Reemplazando el valor de m:

$$R = \frac{n\tan x\text{sen}x - n\cos x}{n\text{sen}x + n\tan x\cos x}$$

$$R = \frac{n(\tan x\text{sen}x - \cos x)}{n(\text{sen}x + \tan x\cos x)}$$

Pasando a senos y cosenos:

$$R = \frac{\dfrac{sen^2x - cos^2x}{cos\,x}}{senx + \dfrac{senx}{cos\,x}cos\,x}$$

$$R = \frac{sen^2x - cos^2x}{2senx\,cos\,x} \qquad ...(\beta)$$

De la condición: $ntanx = m$

$$n\frac{senx}{cos\,x} = m$$

$$nsenx = mcosx \qquad ...(\alpha)$$

(α) al cuadrado: $n^2sen^2x = m^2cos^2x$

$$sen^2x = \frac{m^2cos^2x}{n^2} \qquad ...(I)$$

Multiplicando a $(\alpha) \times cosx$: $nsenxcosx = mcos^2x$

$$senxcosx = \frac{m\,cos^2x}{n}$$

Multiplicando $\times$ 2:

$$2senxcosx = \frac{2m\,cos^2x}{n} \qquad ...(II)$$

Reemplazando (I) y (II) en (β):

$$R = \frac{\dfrac{m^2cos^2x}{n^2} - cos^2x}{\dfrac{2m\,cos^2x}{n}}$$

Factorizando "cos^2x":

$$R = \frac{cos^2x\left(\dfrac{m^2}{n^2} - 1\right)}{\dfrac{2m\,cos^2x}{n}} = \frac{\dfrac{m^2 - n^2}{n^2}}{\dfrac{2m}{n}}$$

$$R = \frac{(m^2 - n^2)(n)}{n^2(2m)} \qquad \therefore\ R = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$$

65. Eliminar θ: $sec\theta - cos\theta = acsc\theta$
$csc\theta - sen\theta = bsec\theta$

Resolución:

De la primera condición:

$$\frac{1}{cos\theta} - cos\theta = a\frac{1}{sen\theta}$$

$$1 - cos^2\theta = a\frac{cos\,\theta}{sen\theta}$$

$$sen^2\theta sen\theta = acos\theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{sen^3\theta}{cos\,\theta} \qquad ...(1)$$

Análogamente de la segunda condición:

$$b = \frac{cos^3\theta}{sen\theta} \qquad ...(2)$$

Ahora: $(1)^3 \times (2)$:

$$a^3b = \frac{sen^9\theta}{cos^3\theta}\left(\frac{cos^3\theta}{sen\theta}\right) = sen^8\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{a^3b} = sen^2\theta \qquad ...(3)$$

$$(2)^3 \times (1):\ b^3a = \frac{cos^9\theta}{sen^3\theta}\left(\frac{sen^3\theta}{cos\,\theta}\right) = cos^8\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{b^3a} = cos^2\theta \qquad ...(4)$$

$\therefore$ (3) + (4): $\sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{b^3a} = 1$

66. Eliminar x: $\dfrac{senx}{a} = \dfrac{cos\,x}{b} = \dfrac{tan\,x}{c}$

Resolución:

$$\frac{senx}{a} = \frac{cos\,x}{b} \Rightarrow tanx = \frac{a}{b}$$

Pero además del dato:

$$\frac{senx}{a} = \frac{tan\,x}{c} \Rightarrow \frac{senx}{a} = \frac{senx}{c\,cos\,x}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{cos\,x} \Rightarrow secx = \frac{c}{a}$$

pero: $sec^2x - tan^2x = 1$

Luego, reemplazando, se tiene: $\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow c^2b^2 - a^4 = a^2b^2$

$\therefore\ b^2c^2 = a^2(b^2 + a^2)$

67. Reducir: $y = \dfrac{sen^4\alpha - cos^4\alpha - 1}{sen^4\alpha - cos^4\alpha + 1}$

Resolución:

$$y = \frac{sen^4\alpha - cos^4\alpha - 1}{sen^4\alpha - cos^4 + 1}$$

$$y = \frac{(sen^2\alpha + cos^2\alpha)(sen^2\alpha - cos^2\alpha) - 1}{(sen^2\alpha + cos^2\alpha)(sen^2\alpha - cos^2\alpha) + 1}$$

$$y = \frac{sen^2\alpha - cos^2\alpha - 1}{sen^2\alpha - cos^2\alpha + 1}$$

$$y = \frac{-2cos^2\alpha}{2sen^2\alpha} \qquad \therefore\ y = -cot^2\alpha$$

68. Eliminar la variable x:

$acosx + bsenx = c \qquad ...(1)$

$mcosx + nsenx = p \qquad ...(2)$

Resolución:

Se hallará senx :

$(1) \times m$: $macosx + mbsenx = mc$

$(2) \times a$: $amcosx + ansenx = ap$

Restando: $(mb - an)senx = mc - ap$

$$\Rightarrow senx = \frac{mc - ap}{mb - an}$$

Ahora se hallará cosx:

$(1) \times n$: $nacosx + nbsenx = nc$

$(2) \times b$: $bmcosx + bnsenx = bp$

Restando: $(na - bm)\,cosx = nc - bp$

$$\Rightarrow cosx = \frac{nc - bp}{na - bm} = \frac{bp - nc}{mb - an}$$

Pero: $sen^2x + cos^2x = 1$

y reemplazando, lo hallado:

$$\left(\frac{mc - ap}{mb - an}\right)^2 + \left(\frac{bp - nc}{nb - an}\right)^2 = 1$$

$\therefore\ (mc - ap)^2 + (bp - nc)^2 = (mb - an)^2$

69. Eliminar θ y ϕ de las ecuaciones:

$asen^2\theta + bcos^2\theta = m$

$bsen^2\phi + acos^2\phi = n$

$atan\theta = btan\phi$

Resolución:

De la primera ecuación (dividiendo entre $\cos^2\theta$)

$$a\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + b\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{m}{\cos^2\theta}$$

$\Rightarrow a\tan^2\theta + b = m\sec^2\theta$

$a\tan^2\theta + b = m(1 + \tan^2\theta)$

$$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{m-b}{a-m} \qquad ...(1)$$

Análogamente en la segunda ecuación:

$$\frac{b\text{sen}^2\phi}{\cos^2\phi} + a\frac{\cos^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{n}{\cos^2\phi}$$

$\Rightarrow b\tan^2\phi + a = n\sec^2\phi$

$b\tan^2\phi + a = n(1 + \tan^2\phi)$

$$\Rightarrow \tan^2\phi = \frac{n-a}{b-n} \qquad ...(2)$$

Elevando al cuadrado la tercera ecuación de los datos:

$a^2\tan^2\theta = b^2\tan^2\phi$ y reemplazando (1) y (2):

$$\therefore a^2\left(\frac{m-b}{a-m}\right) = b^2\left(\frac{n-a}{b-n}\right)$$

70. Al eliminar a y θ de las ecuaciones:

$a\text{sen}\theta = m$

$a\cos\theta = n$

$a\tan\theta = p$

Se obtiene:

Resolución:

Dividiendo los dos primeros datos:

$$\frac{a\text{sen}\theta}{a\cos\theta} = \frac{m}{n} \Rightarrow \tan\theta = \frac{m}{n}$$

Reemplazando en el tercer dato:

$$a\left(\frac{m}{n}\right) = p \Rightarrow a = \frac{pn}{m}$$

Ahora elevando al cuadrado los dos primeros datos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2\text{sen}^2\theta = m^2 \\ a^2\cos^2\theta = n^2 \end{array}\right\} \text{sumando: } a^2(\underbrace{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) = m^2 + n^2$$

y reemplazando el valor de "a":

$$\frac{p^2n^2}{m^2} = m^2 + n^2 \Rightarrow p^2n^2 = m^4 + m^2n^2$$

$\therefore n^2(p^2 - m^2) = m^4$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2002 - I)

Si $f(\tan^2x + \cot^2x) = \sec^4x + \csc^4x$

Hallar $f(2) + f(3)$

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

Resolución:

Calculando f(2):

$x = 45° \Rightarrow \tan^2x + \cot^2x = 2$

$f(2) = \sec^4 45° + \csc^4 45°$

$f(2) = 8$

Calculando f(3):

$$\tan^2x + \cot^2x = 3 \Rightarrow \tan^2x = \frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \cot^2x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Pero: $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$; $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

Aplicando: $\sec^2x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$; $\csc^2x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

$$\sec^4x = \frac{10(3+\sqrt{5})}{4};\ \csc^4x = \frac{10(3-\sqrt{5})}{4}$$

Luego: $f(3) = 15$

$\therefore f(2) + f(3) = 23$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2002 - II)

Si $\sec^2x + \csc^2x = 7$, hallar:

$E = (\sec^2x + \tan^2x)(\csc^2x + \cot^2x)$

A) 13 B) 14 C) 22 D) 16 E) 15

Resolución:

Sabemos: $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$

Aplicando: $\sec^2x\csc^2x = 7$

Además: $\tan^2x + 1 = \sec^2x$; $\cot^2x + 1 = \csc^2x$

En "E": $E = (2\sec^2x - 1)(2\csc^2x - 1)$

$E = 4\sec^2x\csc^2x - 2(\sec^2x + \csc^2x) + 1$

Luego: $E = 4(7) - 2(7) + 1$

$\therefore E = 15$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2008 - II)

Si: $\text{sen}x - \cos x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ entonces el valor de

$M = \text{sen}x + \cos x$ es:

A) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$ C) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$

D) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ E) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Resolución:

Dado: $\text{sen}x - \cos x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Elevando al cuadrado: $(\text{sen}x - \cos x)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

$$1 - 2\text{sen}x\cos x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ...(I)$$

Nos piden: $M = \text{sen}x + \cos x$

Elevando al cuadrado "M":

$M^2 = (\text{sen}x + \cos x)^2 = 1 + 2\text{sen}x\cos x \qquad ...(II)$

(I) en (II): $M^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ M = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2011 - I)

Sea $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tal que

$\log_5(\tan\theta) + \log_5(\tan\theta + 6) = \frac{1}{2}\log 5^9$

Determine el valor de $\sec^2\theta$.

A) $24 - 12\sqrt{3}$ B) $22 - 12\sqrt{3}$ C) $20 - 12\sqrt{3}$
D) $17 - 12\sqrt{3}$ E) $12 - \sqrt{12}$

Resolución:

Del dato:

$\log_5(\tan\theta) + \log_5(\tan\theta + 6) = \log_5 9^{1/2}$

$\log_5(\tan\theta)(\tan\theta + 6) = \log_5 3$

$\tan\theta(\tan\theta + 6) = 3$

$\tan^2\theta + 6\tan\theta - 3 = 0$

$\tan\theta = \frac{-6 \pm \sqrt{48}}{2(1)}$

$\tan\theta = -3 \pm 2\sqrt{3}$

Como: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = -3 + 2\sqrt{3}$

Piden: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\therefore\ \sec^2\theta = 22 - 12\sqrt{3}$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Si $\tan^2\alpha = 2\tan^2 x + 1$,
halle el valor de $y = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2 x$.

A) $\operatorname{sen}^2\alpha$ B) $\cos^2\alpha$ C) $1 + \operatorname{sen}^2\alpha$
D) $\tan^2\alpha$ E) $1 + \cos^2\alpha$

Resolución:

Del dato:

$\tan^2\alpha = 2\tan^2 x + 1$

$\sec^2\alpha - 1 = 2(\sec^2 x - 1) + 1$

$\sec^2\alpha = 2\sec^2 x$

$\cos^2 x = 2\cos^2\alpha$

$1 - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2\alpha$

$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2 x$

$\therefore\ y = \operatorname{sen}^2\alpha$

Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Eliminar x de: $a\operatorname{sen}x + \cos x = b$
$\operatorname{sen}x - a\cos x = c$

A) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
B) $a^2 + b^2 - c^2 = 1$
C) $a^2 - b^2 + c^2 = 1$
D) $b^2 + c^2 - a^2 = 1$
E) $b^2 - c^2 + a^2 = 1$

2. Eliminar x de:
$\operatorname{sen}x + \tan x = a$
$\cos x + \cot x = b$

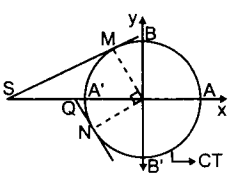
A) $(a + b + 1 - \sqrt{2ab})(ab - \sqrt{2ab}) = 1$
B) $(a + b + 1 + \sqrt{2ab})(ab + \sqrt{2ab}) = 2$
C) $(a + b + 1 + \sqrt{2ab})(ab - \sqrt{2ab}) = 2$
D) $(a + b + 1 + \sqrt{2ab})(ab - \sqrt{ab}) = 1$
E) $(a + b + 1 - \sqrt{2ab})(ab - \sqrt{2ab}) = 2$

3. Siendo: $\tan x - \cot x = \sqrt{2}$

calcular: $S = \dfrac{\sec^5 x + \csc^5 x}{\sec x + \csc x}$

A) $3(5 - \sqrt{6})$ B) $6(5 - \sqrt{6})$ C) $6(3 - \sqrt{6})$
D) $3(3 - \sqrt{6})$ E) $5(3 - \sqrt{6})$

4. En la CT mostrada se cumple que: $\overline{SQ}$ mide 1. Calcular el producto de la distancia de A a $\overline{ON}$ y $\overline{OM}$.



A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2} - 1$ C) $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ E) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

5. Sabiendo que:
$\dfrac{\sec\phi + \tan\phi + 1}{\sec\theta - \tan\theta - 1} = a$; $\dfrac{\sec\phi - \tan\phi - 1}{\sec\theta + \tan\theta + 1} = b$

Se verifica que:
$\dfrac{(\sec\phi + \tan\phi)^2 - 1}{(\sec\theta + \tan\theta)^2 - 1} = P\left(\dfrac{\sec\phi + \tan\phi}{\sec\theta + \tan\theta}\right)$; hallar P

A) a/b B) b/a C) −a/b
D) −b/a E) ab

6. Señalar el valor máximo de:
$S = \dfrac{\operatorname{sen}^{12}x + \cos^{12}x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^{14}x + \cos^{14}x}{7}$

A) 3/14 B) 5/14 C) 7/14
D) 1 E) 1/7

7. Siendo: $\tan x + \cot x = 3$, calcular: $V = \dfrac{\operatorname{sen}^7 x - \cos^7 x}{\operatorname{sen}x - \cos x}$

A) 13/27 B) 19/27 C) 29/27
D) 25/27 E) 31/27

8. Siendo:
$\dfrac{\operatorname{sen}^m x - \cos^m x}{\operatorname{sen}^n x - \cos^n x} = 1 - 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^4 x\cos^4 x$
calcular: mn

A) 8 B) 16 C) 32
D) 24 E) 28

9. Siendo: $a\operatorname{sen}\beta + b\cos\beta = m$; $a\sec\beta + b\csc\beta = n$

hallar: $T = \dfrac{a\sqrt{\tan\beta} + b\sqrt{\cot\beta}}{\sqrt{\tan\beta} + \sqrt{\cot\beta}}$

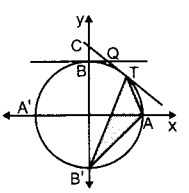
A) $\dfrac{m\sqrt{n}}{\sqrt{n + 2}}$ B) $\dfrac{m\sqrt{n}}{\sqrt{n + 2m}}$ C) $\dfrac{n\sqrt{m}}{\sqrt{m + 2n}}$
D) $\dfrac{\sqrt{mn}}{\sqrt{m + n}}$ E) $\dfrac{\sqrt{mn}}{\sqrt{m + 2n}}$

10. Siendo: $\operatorname{sen}x + \cos x = n$

hallar: $S = \dfrac{\sec x + \tan x + 1}{\sec x - \tan x + 1} + \dfrac{\csc x + \cot x + 1}{\csc x - \cot x + 1}$

A) $\dfrac{2}{n + 1}$ B) $\dfrac{2}{n - 1}$ C) $\dfrac{2}{n^2 + 1}$
D) $\dfrac{2}{n^2 - 1}$ E) $\dfrac{1}{n + 1}$

11. En la CT mostrada: BQ = 0,5; calcular el área de la reglón sombreada, si T es punto de tangencia.



A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4
D) 0,6 E) 0,8

12. Sabiendo que: $\sec x + \csc x = \sqrt{15}$

calcular: $S = \dfrac{\tan^5 x - \cot^5 x}{\tan x - \cot x}$

A) 55 B) 551 C) 550
D) A y B E) A y C

13. Sabiendo que: $\operatorname{sen}x + \cos x = n$; $x \in$ IVC

reducir: $S = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen}x}{1 - \operatorname{sen}x}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

A) $\dfrac{1}{n + 1}$ B) $\dfrac{1}{n - 1}$ C) $\dfrac{2}{n + 1}$
D) $\dfrac{2}{n - 1}$ E) $\dfrac{2}{n^2 - 1}$

14. Si: $\dfrac{\sec x + \tan x + 3}{\csc x + \cot x + 3} = \dfrac{1}{2}\tan x$

calcular: $C = \dfrac{\sec x + \tan x}{\csc x + \cot x}$

A) $-0{,}1$ B) $-0{,}2$ C) $0{,}1$
D) $0{,}2$ E) $0{,}3$

15. Si las expresiones:
$A = (\sec^2 x + 2)(\csc^2 x + 2) + a(\tan x + \cot x)^2$
$B = \tan x[(\tan x + \cot x)^3 + (\tan x - \cot x)^3 + b\tan^3 x]$
son independientes de x.
Calcular: $V = \dfrac{A + B}{a + b}$

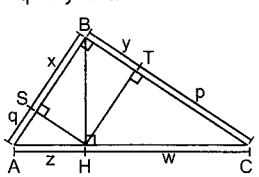
A) 3 B) 5 C) -3
D) -5 E) -2

16. Siendo: $\operatorname{sen}x = \cot y$; $\operatorname{sen}y = \cot z$; $\operatorname{sen}z = \cot x$
calcular: $\cot x$

A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

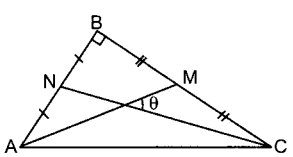
D) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ E) $\sqrt{\sqrt{5}-1}$

17. Si en el gráfico: $p^2 + x^2 + z = \dfrac{24}{25}$; $z + w = 1$
calcular: $C = q^2 + y^2 + w^2$



A) 0,96 B) 0,92 C) 0,76
D) 0,72 E) 0,48

18. Señalar el valor mínimo de $\cot\theta$



A) 2/3 B) 3/2 C) 3/4
D) 4/3 E) 5/3

19. Si: $A \neq 2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, hallar la expresión equivalente de: $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}A} - 2\sec^2 A$

A) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}A}$ B) $\dfrac{-1}{1 - \operatorname{sen}A}$ C) $\dfrac{-1}{1 + \operatorname{sen}A}$

D) $\dfrac{-1}{1 - \cos A}$ E) $\dfrac{1}{1 - \cos A}$

20. Si: $\operatorname{sen}a + \csc a = 5/2$, calcular: $T = \cot a + \cos a$

A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

21. Si: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\pi}{4} + \cos\theta$, calcular:

$S = \tan\left(\sqrt{1 - \dfrac{2}{\tan\theta + \cot\theta}}\right)$

A) -1 B) 1 C) $\sqrt{3}$
D) $-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}/3$

22. Si: $\tan x = \dfrac{\cos y + b\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}y - b\cos y}$

calcular: $S = \dfrac{(b\operatorname{sen}y + \cos y)(\operatorname{sen}y - b\cos y)}{\operatorname{sen}x\cos x} - 1$

A) $b^2 + 1$ B) $b^2 - 1$ C) b^2
D) $b + 1$ E) $b - 1$

23. Si: P; Q y R son constantes que satisfacen la relación: $P + Q\tan^R x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}x} + \dfrac{1}{\csc x - 1}$
calcular: PQR

A) -6 B) 2 C) 4
D) 8 E) 12

24. Si: $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = \dfrac{7}{9}$

calcular: $T = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

25. Si: $f(\tan^2 x + \cot^2 x) = \sec^4 x + \csc^4 x$.
calcular: $f(2) + f(3)$

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

26. Si: $\sec^2 x + \csc^2 x = 7$
calcular: $T = (\sec^2 x + \tan^2 x)(\csc^2 x + \cot^2 x)$

A) 13 B) 14 C) 22
D) 16 E) 15

27. Sabiendo que: $m\operatorname{sen}\left(55\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\left(77\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = 1$

calcular: $E = \tan\theta + \cot\theta$, en términos de m

A) m^2 B) $-m^2$ C) $2m$
D) $-m$ E) m

28. Si: $\sec^2 x = n\tan x$, hallar: $S = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{(\operatorname{sen}x + \cos x)^3}$

A) $\dfrac{n+1}{n+2}$ B) $\dfrac{n-2}{n-1}$ C) $\dfrac{n-1}{n+2}$

D) $\dfrac{n+2}{n+1}$ E) $\dfrac{n+2}{n-1}$

29. Simplificar:

$K = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 - \operatorname{sen}x}} + \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 + \operatorname{sen}x}}$; $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

A) $-\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}\sec x$ C) $\sqrt{2}\sec x$
D) $\sqrt{2}\cos x$ E) $-\sqrt{2}\cos x$

30. Calcular: $\cos^2 A + \text{sen}^2 B$
si se sabe que A y B son ángulos suplementarios.

A) -1 B) $-1/2$ C) 0
D) 1/2 E) 1

31. Consideremos el siguiente razonamiento secuencial:
Paso 1: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$; válido $\forall x \in \mathbb{R}$
Paso 2: Elevando a la 3/2
$\text{sen}^3 x = (1 - \cos^2 x)^{3/2}$
Paso 3: Por la propiedad aditiva
$1 + \text{sen}^3 x = 1 + (1 - \cos^2 x)^{3/2}$
Paso 4 : Elevando al cuadrado.
$(1 + \text{sen}^3 x)^2 = [1 + (1 - \cos^2 x)^{3/2}]^2$
Paso 5: Evaluando para $x = -\pi/2$ se obtiene $0 = 4$
Lo cual es falso, entonces el error del razonamiento comienza en:

A) Paso 1 B) Paso 2 C) Paso 3
D) Paso 4 E) Paso 5

32. Si: $\tan x + \cot x = 2$ y
$E = \sqrt{\tan^n x + \cot^n x}^{\sqrt{\tan^n x + \cot^n x}} \cdot \sqrt{\tan^n x + \cot^n x}^{-}$
Siendo n potencia de 2; calcular: E^2

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

33. Sean a y b números reales tales que: $0 < b < a$
Si: $a\text{sen}\theta + b\cos\theta = a$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y

$$K = \sqrt{(a^2 - b^2)\csc\theta + (a^2 + b^2)\cos\theta}$$

expresar K solo en términos de a y b.

A) $a^2 + 2b^2$ B) $\frac{b^2 - 2a}{b}$ C) $a^2 + b^2$
D) $2a^2 + 3b^2$ E) $a + b$

34. Si: $x_1 \wedge x_2$ son dos soluciones de la ecuación:

$$5\cos x - 4\text{sen}x = 4$$

calcular: $\text{sen}x_1 + \text{sen}x_2 + \text{sen}x_1\text{sen}x_2$

A) 0 B) -1 C) 1
D) $-1 + \sqrt{2}$ E) $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

35. Si: $\cot x = \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$, hallar: $S = \frac{a}{b\text{sen}x} + \frac{b}{a\cos x}$.
Siendo : $x \in IC$

A) $\left(\frac{a^{1/3}}{b^{1/3}} + \frac{b^{1/3}}{a^{1/3}}\right)^3$ B) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ C) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$
D) $\left(\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}\right)^{3/2}$ E) $\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right)^{1/3}$

36. Hallar: $y = \text{sen}x\cos x$. Si: $\tan x - \text{sen}x = 1$

A) $-1 - \sqrt{2}$ B) $1 + \sqrt{2}$ C) $1 - \sqrt{2}$
D) $\sqrt{2} - 1$ E) $\sqrt{2}$

37. Calcular el mínimo valor de: $S = \sec^4 x + \csc^4 x$

A) 6 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

38. Si: $\frac{1 - 2\cos^2\theta}{\text{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{1}{2}$, hallar: $E = \text{sen}\theta\cos\theta$

A) 1/4 B) 1/8 C) 3/8
D) 3/4 E) 1/2

39. Hallar la suma de valores de a y b que satisfacen la siguiente relación:
$\sec^2 k\theta \csc^2 k\theta = \left(\frac{a^2 + b^2}{20}\right)\sec^2 k\theta + \frac{ab}{8}\csc^2 k\theta$;
$a, b > 0$

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

40. Sabiendo que
$\sec\alpha + \sec\theta = a$ ...(1)
$\tan\alpha + \tan\theta = b$ ...(2)
$(\sec\alpha - \tan\alpha)(\sec\theta - \tan\theta) = c$ ...(3)
eliminar α y θ.

A) $\frac{a - b}{a + b} = c^2$ B) $\frac{a - b}{a + b} = c^4$ C) $\frac{a - b}{a + b} = c$
D) $\frac{a - b}{a + b} = c^3$ E) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c^4$

41. Eliminar α y θ a partir de las siguientes igualdades:
$\text{sen}\alpha\sec\theta = a$ ...(1)
$\text{sen}\theta\sec\alpha = b$ ...(2)
$\cos\alpha\csc\alpha = c^{-1}$ ...(3)

A) $ab = 1 + c^2$ B) $b^2(1 - a^2) = c^2(1 - b^2)$
C) $a^2 + b^2 = c^2$ D) $a^2(1 + b^2) = c^2(1 + a^2)$
E) $a^2(1 - b^2) = c^2(1 - a^2)$

42. Eliminar θ a partir de
$\cos\theta(\csc\theta - \text{sen}\theta) = p$ ...(1)
$\text{sen}\theta(\sec\theta - \cos\theta) = q$ ...(2)

A) $p^{1/2} + q^{1/2} = (pq)^{-1/2}$ B) $p^{1/2} + q^{1/2} = (pq)^{-1/4}$
C) $p^{1/2} - q^{1/2} = (pq)^{-1/2}$ D) $p^{1/4} + q^{1/4} = (pq)^{-1/4}$
E) $p^{1/2} - q^{1/2} = (pq)^{-1/4}$

43. Si: $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} - k\pi \wedge$
$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} - (2k + 1)\frac{\pi}{2}$
Siendo $k = \{...-1; 0; 1...\}$, además
$(1 - \cos\alpha_1)(1 + \text{sen}\alpha_2)(1 - \cos\alpha_3) ...(1 + \text{sen}\alpha_n)$
$= \text{sen}\alpha_1\cos\alpha_2\text{sen}\alpha_3 ... \cos\alpha_n$
Reducir la siguiente expresión:
$F = (1 + \cos\alpha_1)(1 - \text{sen}\alpha_2)(1 + \cos\alpha_3)...$
$(1 - \text{sen}\alpha_n)\csc\alpha_1\sec\alpha_2\csc\alpha_3 ... \csc\alpha_{n-1}$

A) $\cos\alpha_n$ B) $\text{sen}\alpha_n$ C) $\text{sen}\alpha_{n-1}$
D) $\cos\alpha_{n-1}$ E) $\tan\alpha_{n-1}$

44. Siendo a, b y c medidas de ángulos agudos, además $\left(\frac{\cos a - \csc}{\cos b - \csc}\right)\left(\frac{\text{sen}b\cot a}{\text{sen}a\cot b}\right) = 1$
hallar T= cotacscb + cotbcsca.

A) senc B) cosc C) tanc
D) cotc E) sec

45. Siendo $\tan^2x - 3\tan x + 1 = 0$; $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$ calcular $T = \cos^3x - \text{sen}^3x$

A) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ C) $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$
D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

46. Evaluar $\theta = 22°30'$ en la siguiente expresión

$$\frac{(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)^8(1-\text{sen}\theta-\cos\theta)^8}{64(1-2\cos^4\theta-4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta+4\text{sen}^4\theta\cos^4\theta+4\text{sen}^2\theta\cos^6\theta+\cos^8\theta)}$$

A) $6 + 4\sqrt{2}$ B) $17 + 12\sqrt{2}$
C) $68 + 48\sqrt{2}$ D) $60 + 20\sqrt{2}$
E) $16 + 48\sqrt{2}$

47. Sabiendo que:

$$f = \frac{(\csc^2x+\cot^2x)(\csc^4x+\cot^4x)...(\csc^{2^n}x+\cot^{2^n}x)}{(\sec^2x+\tan^2x)(\sec^4x+\tan^4x)...(\sec^{2^n}x+\tan^{2^n}x)}$$

$$d = \frac{\sec^{2^{n+2}}x\tan^2x-\tan^{2^{n+3}}x-\tan^{n+2}x}{\csc^{2^{n+2}}x\cot^2x-\cot^{2^{n+3}}x-\cot^{2^{n+2}}x}$$

calcular $\sqrt[3]{fd} - \sec^2x + 3$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

48. Sabiendo que
$a = (\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)(1 - 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha)$
$b = 1 - 4\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + 2\text{sen}^4\alpha\cos^4\alpha$
$c = 1 - 8\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + 20\text{sen}^4\alpha\cos^4\alpha - 16\text{sen}^6\alpha\cos^6\alpha + 2\text{sen}^8\alpha\cos^8\alpha$
evaluar: $d = \frac{2^{19}}{577}(abc)$, si $a = 22°30'$.

A) $-21\sqrt{2}$ B) $20\sqrt{2}$ C) $21\sqrt{2}$
D) $51\sqrt{2}$ E) $-51\sqrt{2}$

49. Si $a\tan x + b\tan y = c$
hallar el mínimo valor de $a\sec x + b\sec y$
siendo x e y ángulos agudos, a, b y c valores positivos.

A) $((a+b)^2 - c^2)^{1/2}$ B) $((a+b)^2 + c^2)^{1/2}$
C) $((a+c)^2 - b^2)^{1/2}$ D) $((a+c)^2 + b^2)^{1/2}$
E) $(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}$

50. Si $\theta \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$; calcular el mínimo valor de la expresión: $S = \frac{2+\cot^2\theta}{\sec\theta\csc\theta - \text{sen}^2\theta\tan\theta}$

A) 1 B) $\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt[4]{7}$
D) 2 E) 7

51. Simplifique: $S = \frac{\sqrt{1+2\text{sen}\alpha\cos\alpha}}{4\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + 4\text{sen}\alpha\cos\alpha + 1}$
$\alpha \in IC$.

A) $\text{sen}\alpha + \cos\alpha$ B) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2$
C) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^3$ D) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^{-3}$
E) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^{-2}$

52. Si $\cos x = -2\cos x$, calcule $\cos x$.

A) 2/7 B) $-1/5$ C) $\{0; -4/5\}$
D) $-1/3$ E) $-4/5$

53. Si $(m + n)\text{sen}x = n\cos x + \sqrt{m^2 + 2mn + 2n^2}$ halle $\tan x$.

A) $-\frac{m+n}{n}$ B) $-\frac{n}{m+n}$ C) $\frac{m}{n}$
D) $-\frac{n}{m}$ E) $\frac{m+2n}{n}$

54. Si:
$(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^6 = A + B\text{sen}\alpha\cos\alpha + C\text{sen}^2\cos^2\alpha + D\text{sen}^3\alpha\cos^3\alpha$
es un identidad, calcule: $T = \sqrt[3]{3ABCD}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 12

55. Simplifique
$A = (\text{sen}\alpha + \cos\alpha + 1)^3 - (\text{sen}\alpha + \cos\alpha - 1)^3$

A) $4(2 + \text{sen}\alpha\cos\alpha)$ B) $4(2 + 3\text{sen}\alpha\cos\alpha)$
C) $2 + 3\text{sen}\alpha\cos\alpha$ D) $2(2 + 3\text{sen}\alpha\cos\alpha)$
E) $3(2 + 3\text{sen}\alpha\cos\alpha)$

56. Reduzca la expresión

$$S = \frac{2\cos x}{\text{sen}x + \cos x - 1} - \frac{\text{sen}x}{1 - \cos x}$$

A) 0 B) 1 C) $\sec x$
D) $\csc x$ E) $\text{sen}x$

57. Reduzca: $T = \frac{(\tan\alpha + 2)(\tan\alpha + 1) - 3\tan\alpha - 1}{\sec^2\alpha}$

A) $5\text{sen}\alpha\cos\alpha$ B) 2
C) $1 - 5\text{sen}\alpha\cos\alpha$ D) $1 - 3\text{sen}\alpha\cos\alpha$
E) 1

58. Simplifique: $S = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} - \tan\alpha\tan\beta$

A) -1 B) 0 C) 1
D) $\tan\alpha$ E) $\tan\beta$

59. Si $\tan(2\pi + x) - \cot(3\pi - x) = -3$, halle el valor de la expresión.
$S = (\text{sen}x + \cos x)^2 - (\text{sen}x - \cos x)^2$

A) $\frac{4}{3}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $-\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) 4

60. Reduzca: $T = \frac{\cot\theta - \sec\theta\csc\theta(1 - 2\text{sen}^2\theta)}{\tan\theta}$

A) 0 B) 1 C) $\cot\theta$
D) $\tan\theta$ E) $\sec\theta$

61. Si $\text{sen}^3x = \cos^5x$,
calcule $\tan^{10}x + 2\tan^8x + \tan^6x$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

62. Si $\tan x = \frac{m}{n}$, calcule $S = \frac{n\text{sen}x - m\cos x}{n\text{sen}x + m\cos x}$

A) 2n B) 2m C) $\frac{2n}{3}$ D) $\frac{2m}{3}$ E) 0

63. Si $2 < \sec\theta < 3$; halle los valores de la $\tan\theta$, ($\theta \in$ IIC).

A) $\langle -2; -\sqrt{5}\rangle$ B) $\langle -1; 0\rangle$ C) $\langle -2\sqrt{5}; -1\rangle$
D) $\langle -5; -2\rangle$ E) $\langle -2\sqrt{2}; -\sqrt{3}\rangle$

64. Elimine x.
$a\cos^3x - b\operatorname{sen}^3x = \sqrt[3]{a}\cos x - \sqrt[3]{b}\operatorname{sen}x$
$a\operatorname{sen}^3x - b\cos^3x = \sqrt[3]{a}\operatorname{sen}x + \sqrt[3]{b}\cos x$

A) $a^{2/3} + b^{2/3} = 2$ B) $a + b = 1$
C) $a - b = 1$ D) $a^{1/3} + b^{1/3} = 1$
E) $a^{1/2} + b^{1/2} = 1$

65. Halle k para que P no dependa de x.
$T = k\cot^2x - \csc^2x + 3$

A) 2 B) 1 C) −1
D) −2 E) 3

66. Halle el equivalente de
$V = (\csc x + \cot x - 1)(\csc x - \cot x + 1)$

A) 2tanx B) 2cscx C) 2senx
D) 2secx E) 2cotx

67. Elimine la variable angular q a partir de
$x = 2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$
$y = 2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$

A) $x^2 + y^2 = 4$ B) $x^2 + y^2 = 5$ C) $x^2 + y^2 = 3$
D) $x^2 - y^2 = 5$ E) $x^2 + y^2 = 10$

68. Reduzca la siguiente expresión.
$S = (\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y)^2 - (1 - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)^2$

A) $-\cos^2x\cos^2y$ B) $\cos^2x\cos^2y$
C) $-\operatorname{sen}^2x\operatorname{sen}^2y$ D) $\operatorname{sen}^2x\operatorname{sen}^2y$
E) cosxcosy

69. Si se cumple que $\sec\theta + \tan\theta = 2$; halle el valor de la siguiente expresión.
$T = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\sec\theta - \csc\theta}$

A) −12/25 B) −25/12 C) 12/25
B) 25/12 D) 3/4

70. Si $f(\sec x\csc x) = \dfrac{\tan x + \cot x + 1}{\tan^2x + \cot^2x + 2}$
halle f(3).

A) 2/9 B) 4/9 C) 1/3
D) 9/4 E) 4/7

71. Si se cumple que $\tan x - \cot x = \sqrt{3}$
halle el valor de $\sec^4x + \csc^4x$.

A) 20 B) 23 C) 25
D) 35 E) 33

72. A partir de las siguientes condiciones, halle tanx en términos de m y n.
$m = \operatorname{sen}x + \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$
$n = \cos x + \dfrac{1}{\csc x - \cot x}$

A) $\dfrac{n+1}{m+1}$ B) $\dfrac{m}{n}$ C) $\dfrac{m+1}{n+1}$
D) $\dfrac{n}{m}$ E) $\dfrac{m-1}{n-1}$

73. Simplifique la siguiente expresión
$S = \dfrac{1 - \cos 10°}{\tan 10°} + \dfrac{\cos 10° - 1}{\operatorname{sen}10°\cos 10°} + \tan 10°$

A) sen10° B) cos10° C) cot10°
D) sec10° E) csc10°

74. Si $\operatorname{sen}^3x = \cos x + \cos 2x$
halle tanx + cotx

A) $-2\sqrt{2}$ B) $-(\sqrt{2} + 1)$ C) $\sqrt{2} + 1$
D) $2\sqrt{2}$ E) −3

75. Si los arcos x e y pertenece al primer cuadrante.
Además: $\sec(2x + 2y) = -1$
$\csc(2x - 2y) = 1$
calcule el valor de: $R = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) + \cos(x-y)}{\sec(x-y) + \cot(x+y)}$

A) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) $-\sqrt{2}$

76. Indique los valores que toma ϕ tal que cumpla la siguiente relación $\operatorname{sen}\phi - \cos\phi \geq 0$ siendo ϕ positivo y menor que una vuelta.

A) [0; p] B) $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ C) $\left\langle 0; \dfrac{5\pi}{3}\right]$
D) $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ E) $\left\langle \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$

77. Indique la variación de
$N = \cos(\tan x + \cot x)$, si $x \in$ IIIC

A) R^+ B) $R - \{2\}$ C) $[-1; 1]$
D) R E) $[2; 3\rangle$

78. Indique los valores que puede tomar el arco $\phi \in [0; 2\pi]$ para que la siguiente expresión este definida.
$S = \sqrt{\sqrt{3} - \tan\phi} + \sqrt{\cot\phi - 1}$

A) $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$
C) $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left\langle \pi; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ D) $\left\langle 0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$
E) $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi; \dfrac{5\pi}{4}\right]$

79. Si: $\sec\alpha = 4 + \cos\alpha$
$\sec\alpha = p - \cos\alpha$
Calcule el valor(es) de p

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\pm 5\sqrt{5}$
D) $\pm 2\sqrt{5}$ E) $\pm\sqrt{5}$

80. Halle la suma del mayor valor negativo de x y el menor valor positivo de ϕ en la siguiente ecuación.

$\sqrt{sen^2x\cos^2x + sen^4x - 1} = sen2\phi$

A) 0 B) $\frac{\pi}{2}$ C) $-\frac{\pi}{2}$
D) $-\frac{\pi}{4}$ E) π

81. Si $U_n = \frac{sen^n\theta - \cos^n\theta}{sen\theta - \cos\theta}$, halle $\frac{U_3 - U_1}{U_2U_4 - 1}$

A) 1 B) 1/2 C) −1 D) 2 E) 4

82. Si $\tan x + \cot x = 2\sqrt{2}$, calcule $32(sen^8x + \cos^8x)$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

83. Si se cumple: $x = sen^2\phi\cos^2\phi$
$y = sen^4\phi + \cos^4\phi$
Indique la relación entre x e y independiente de ϕ.

A) $2x + y = 1$ B) $x^2 + y^2 = 2$ C) $x + y = \sqrt{2}$
D) $x^2 + y^3 = \sqrt{2}$ E) $x^2 - y^2 = 2$

84. Calcule M + N para que la siguiente igualdad sea una identidad.

$$\left(\frac{1 - \tan y}{1 - \cot y}\right)^2 = M + N\tan^2y$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5/2

85. Si $16\cos^2x + 3sen^2x = 7$, calcule $\csc^2x$

A) 9/11 B) 13/9 C) 9/13
D) 1/9 E) 13/7

86. Calcule los valores que toma
$R = sen^2x\tan x + \cos^2x\cot x + 2sen x\cos x$
si $x \in IIC$

A) $\langle 2; 5]$ B) $\langle -\infty; -2]$ C) $[2; +\infty\rangle$
D) $[-2; 2]$ E) $[-1; 1]$

87. Sabiendo que: $\frac{a}{sen y} = \frac{b}{\cos y} = \frac{c}{\tan y}$

halle: $T = \frac{a^2}{b^2c^2}(a^2 + b^2)$

A) 2 B) 1/2 C) 1
D) 1/4 E) 4

88. Indique el valor de k para la siguiente igualdad
$(sec\theta + \cos\theta)^2 + (sen\theta + csc\theta)^2 + \tan^2\theta + \cot^2\theta + k$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 1 E) 7

89. Reduzca: $S = \frac{\cot^2\theta - \cos^2\theta}{\tan^2\theta - sen^2\theta}$

A) $\tan^2\theta$ B) $\cos^2\theta$ C) $\tan^2\theta$
D) $\cot^6\theta$ E) $\tan^4\theta$

90. Si $\sec x - \tan x = 2$, calcule $sen x$.

A) 4/5 B) −3/5 C) ±3/4
D) ±3/5 E) 4/7

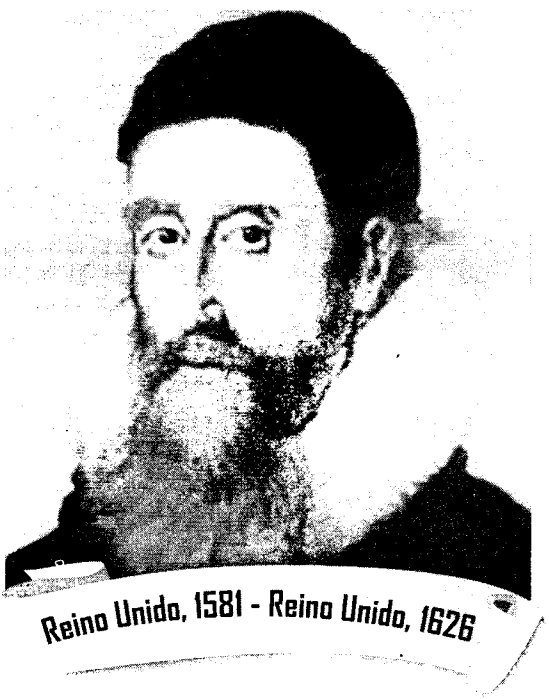
CLAVES

1. D	13. D	25. D	37. C	49. B	61. A	73. A	85. B
2. A	14. E	26. E	38. C	50. D	62. E	74. C	86. B
3. B	15. E	27. E	39. C	51. D	63. E	75. A	87. C
4. B	16. B	28. C	40. C	52. C	64. A	76. D	88. E
5. E	17. B	29. B	41. E	53. A	65. B	77. C	89. D
6. B	18. D	30. E	42. A	54. E	66. E	78. C	90. B
7. C	19. B	31. B	43. A	55. B	67. B	79. B	
8. D	20. C	32. B	44. D	56. B	68. A	80. A	
9. B	21. B	33. E	45. C	57. E	69. C	81. B	
10. B	22. C	34. B	46. C	58. B	70. B	82. C	
11. D	23. C	35. D	47. C	59. B	71. D	83. A	
12. D	24. E	36. D	48. E	60. B	72. C	84. B	

Identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

05 capítulo

Edmund Gunter (1581-10 de diciembre de 1626) fue un clérigo y matemático inglés, de familares descendientes directamente de Gales. Nació en Hertfordshire en 1581 y estudió en el Christ Church de Oxford, donde destacó por sus habilidades matemáticas. Fue profesor de Astronomía en el Gresham College y diseñó varios instrumentos de medida; además, realizó numerosas aportaciones a la topografía, matemática y astronomía. Sus publicaciones se realizaron en inglés y no en latín como era la costumbre científica en los siglos XVI y XVII. Sus principales trabajos trataron sobre trigonometría y cálculo logarítmico. Asimismo, introdujo los términos coseno y cotangente, y desarrolló la aritmética logarítmica.



Edmund Gunter

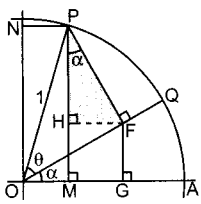
Las aportaciones que ha realizado a la trigonometría se han aplicado a la topografía. Inventó a lo largo de su carrera diversos instrumentos que han llevado su nombre, como fueron el cuadrante de Gunter (una especie de cuadrante que posee una proyección estereográfica), la escala de Gunter (denominada simplemente «Gunter» por los marineros), así como la denominada cadena de Gunter (que fue considerada como una unidad de medida en muchos países de habla anglosajona). Fue uno de los primeros científicos en descubrir la existencia de la declinación magnética terrestre.

Fuente: Wikipedia

SENO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\,\text{sen}\theta}$$
$$\boxed{\text{sen}(\alpha-\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta-\cos\alpha\,\text{sen}\theta}$$

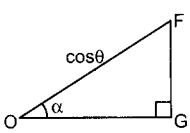
Demostración:



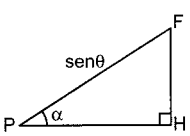
En la circunferencia trigonométrica ubicamos dos ángulos α y θ como se muestra en la figura.
Se traza $\overline{MP}$ entonces: $MP = \text{sen}(\alpha+\theta)$ ...(1)
Se traza $PF \perp OQ$, entonces en el ⊾OFP se cumple:

$$PF = \text{sen}\theta \quad \text{y} \quad OF = \cos\theta$$

Se trazan $\overline{FG} \perp \overline{OA}$ y $\overline{FH} \perp \overline{MP}$, formándose los triángulos OGF y PHF.
Para mayor entendimiento dichos triángulos los dibujamos aparte:



Se deduce:
$GF = \cos\theta\,\text{sen}\alpha$
$OG = \cos\theta\cos\alpha$



Se deduce:
$HF = \text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha$
$HP = \text{sen}\theta\cos\alpha$

Observar que:

$$\underbrace{MP}_{\text{sen}(\alpha+\theta)} = \underbrace{MH}_{\cos\theta\,\text{sen}\alpha} + \underbrace{HP}_{\text{sen}\theta\cos\alpha}$$

Ordenando queda:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\,\text{sen}\theta}$$

COSENO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

$$\boxed{\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}$$
$$\boxed{\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}$$

Demostración:
Para demostrar esta identidad usamos las figuras de la demostración anterior.
Observar que: $NP = \cos(\alpha+\theta)$
Pero: $NP = OM$ y $OM = OG - MG$
Además: $MG = HF$

Entonces:

$$\underbrace{NP}_{\cos(\alpha+\theta)} = \underbrace{OG}_{\cos\theta\cos\alpha} - \underbrace{HF}_{\text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha}$$

Ordenando queda:

$$\boxed{\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}$$

TANGENTE DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Demostración:
Se tiene:

$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\text{sen}(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}=\frac{\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\,\text{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}$$

Divide al numerador y denominador por: $\cos\alpha\cos\theta$

$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\dfrac{\text{sen}\alpha\cos\theta}{\cos\alpha\cos\theta}+\dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\theta}{\cos\alpha\cos\theta}-\dfrac{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}$$

Simplificando se obtiene:

$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}{1-\left(\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}}$$

$\tan(\alpha-\theta)=\tan[\alpha+(-\theta)]$, aplicando $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$$\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\theta)}{1-\tan\alpha\tan(-\theta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}}$$

Nota

Igual que en la identidad anterior, esta es aplicable si α, θ y $(\alpha-\theta)$ no son de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

COTANGENTE DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

$\cot(\alpha+\theta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\theta-1}{\cot\theta+\cot\alpha}$	$\cot(\alpha-\theta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\theta+1}{\cot\theta-\cot\alpha}$

Ejemplos:

Primero, desarrollar:

- $\text{sen}(10°+x)=\text{sen}10°\cos x+\cos10°\,\text{sen}x$
- $\cos(20°+\alpha)=\cos20°\cos\alpha-\text{sen}20°\,\text{sen}\alpha$
- $\text{sen}(30°-\theta)=\text{sen}30°\cos\theta-\cos30°\,\text{sen}\theta$
- $\cos(40°-\beta)=\cos40°\cos\beta+\text{sen}40°\,\text{sen}\beta$

Segundo, observar el desarrollo e identificar de qué se trata:

- $\text{sen}60°\cos\theta + \cos60°\text{sen}\theta = \text{sen}(60° + \theta)$
- $\cos3x\cos\alpha - \text{sen}3x\text{sen}\alpha = \cos(3x + \alpha)$
- $\text{sen}2\theta\cos20° - \cos2\theta\text{sen}20° = \text{sen}(2\theta - 20°)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\phi + \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\text{sen}\phi = \cos\left(\frac{\pi}{7} - \phi\right)$

Aplicaciones:

1. Indicar un valor de θ, si:
   $\text{sen}\theta\cos10° - \cos\theta\text{sen}10° = \cos40°\cos5° + \text{sen}40°\text{sen}5°$

   Resolución:
   En este caso observar que:
   $\text{sen}\theta\cos10° - \cos\theta\text{sen}10° = \text{sen}(\theta - 10°)$
   $\cos40°\cos5° + \text{sen}40°\text{sen}5° = \cos(40° - 5°) = \cos35°$

   Entonces:
   $\text{sen}(\theta - 10°) = \cos35° \Rightarrow \theta - 10° + 35° = 90°$
   $\therefore\ \theta = 65°$

2. Calcular:
   - sen15°
   - cos15°
   - sen8°

   Resolución:
   - $\text{sen}15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen}45°\cos30° - \cos45°\text{sen}30°$

     $\text{sen}15° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

     $\text{sen}15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

   - $\cos15° = \cos(45° - 30°) = \cos45°\cos30° + \text{sen}45°\text{sen}30°$

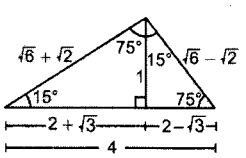
     $\cos15° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

   - $\text{sen}8° = \text{sen}(45° - 37°) = \text{sen}45°\cos37° - \cos45°\text{sen}37°$

     $\text{sen}8° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{10} - \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

Observaciones

Aplicando las identidades de suma y diferencia de dos ángulos se pueden calcular las razones trigonométricas de $15°\left(\frac{\pi}{12}\text{ rad}\right)$ y $75°\left(\frac{5\pi}{12}\text{ rad}\right)$ y otros.

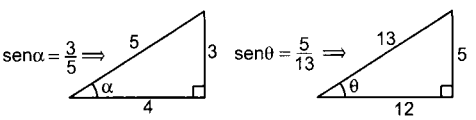


Del gráfico se deduce:

RT (15°)	RT (75°)
$\text{sen}15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\text{sen}75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
$\cos15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\cos75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
$\tan15° = 2 - \sqrt{3}$	$\tan75° = 2 + \sqrt{3}$
$\cot15° = 2 + \sqrt{3}$	$\cot75° = 2 - \sqrt{3}$
$\sec15° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sec75° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
$\csc15° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\csc75° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

3. Sabiendo que α y θ son ángulos que pertenecen al primer cuadrante y que $\text{sen}\alpha = 3/5$, $\text{sen}\theta = 5/13$. Calcular: $\text{sen}(\alpha + \theta)$ y $\cos(\alpha - \theta)$.

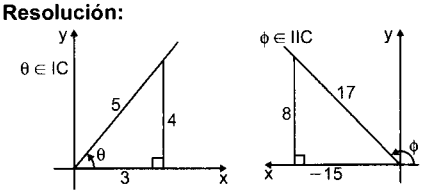
   Resolución:



   Dato: α y $\theta \in$ IC (quiere decir que todas sus RT son positivas).
   $\Rightarrow \text{sen}(\alpha + \theta) = \text{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\text{sen}\theta$
   $\text{sen}(\alpha + \theta) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{56}{65}$
   $\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha\cos\theta + \text{sen}\alpha\text{sen}\theta$
   $\cos(\alpha - \theta) = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{63}{65}$

4. Sabiendo que: $\phi \in$ IIC, $\theta \in$ IC, $\text{sen}\phi = \frac{8}{17}$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$; calcular: $\text{sen}(\phi - \theta)$ y $\cos(\phi + \theta)$

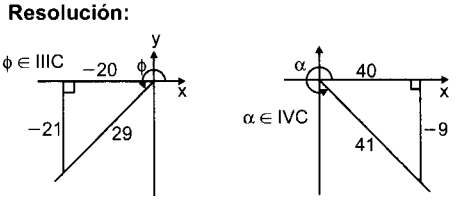
   Resolución:



   $\text{sen}(\phi - \theta) = \text{sen}\phi\cos\theta - \cos\phi\text{sen}\theta$
   $\text{sen}(\phi - \theta) = \left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{84}{85}$
   $\cos(\phi + \theta) = \cos\phi\cos\theta - \text{sen}\phi\text{sen}\theta$
   $\cos(\phi + \theta) = \left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{77}{85}$

5. Sabiendo que: $\phi \in$ IIIC, $\alpha \in$ IVC, $\cot\phi = \frac{20}{21}$ y $\csc\alpha = -\frac{41}{9}$; calcular: $\cos(\alpha + \phi)$ y $\tan(\alpha - \phi)$

   Resolución:



$\cos(\alpha + \phi) = \cos\alpha\cos\phi - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\phi$

$\cos(\alpha + \phi) = \left(\frac{40}{41}\right)\left(-\frac{20}{29}\right) - \left(-\frac{9}{41}\right)\left(-\frac{21}{29}\right) = -\frac{989}{1189}$

$\tan(\alpha - \phi) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\phi}{1 + \tan\alpha\tan\phi} = \dfrac{\left(-\frac{9}{40}\right) - \left(\frac{21}{20}\right)}{1 + \left(-\frac{9}{40}\right)\left(\frac{21}{20}\right)}$

$\tan(\alpha - \phi) = \dfrac{-\frac{51}{40}}{\frac{611}{800}} = -\frac{1020}{611}$

6. Si: $\alpha - \theta = \frac{\pi}{3}$; calcular:

$R = (\cos\alpha + \cos\theta)^2 + (\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta)^2$

Resolución:

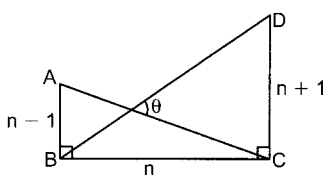
$R = (\cos\alpha + \cos\theta)^2 + (\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta)^2$

$R = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta + \text{sen}^2\theta$

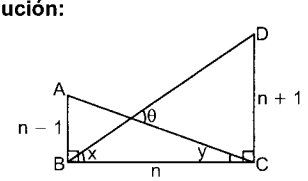
$R = (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 2\cos\alpha\cos\theta + 2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta$

$R = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore R = 3$

7. Del gráfico adjunto, calcular: $\tan\theta$ $(n > 1)$.



Resolución:



Observar que: $\theta = x + y$

$\tan\theta = \tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Se deduce de ⊿ABC: $\tan y = \dfrac{n-1}{n}$

⊿BCD: $\tan x = \dfrac{n+1}{n}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{n}}{1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \dfrac{\frac{2n}{n}}{1 - \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)}$

$\tan\theta = \dfrac{2}{\frac{n^2 - n^2 + 1}{n^2}} = 2n^2$

IDENTIDADES AUXILIARES

$\text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\theta$
$\cos(\alpha + \theta)\cos(\alpha - \theta) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\theta$

Demostración:

Sabemos que:

$\text{sen}(\alpha + \theta) = \text{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\theta \quad ...(1)$

$\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}\alpha\cos\theta - \cos\alpha\,\text{sen}\theta \quad ...(2)$

Multiplicando (1) y (2):

$\text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}^2\alpha\underbrace{\cos^2\theta}_{1 - \text{sen}^2\theta} - \underbrace{\cos^2\alpha}_{1 - \text{sen}^2\alpha}\text{sen}^2\theta$

$= \text{sen}^2\alpha(1 - \text{sen}^2\theta) - (1 - \text{sen}^2\alpha)\text{sen}^2\theta$

$= \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\theta$

$\therefore \text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\theta$

$\tan\alpha + \tan\theta = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$	$\tan\alpha - \tan\theta = \dfrac{\text{sen}(\alpha - \theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$
$\cot\alpha + \cot\theta = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \theta)}{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}$	$\cot\alpha - \cot\theta = \dfrac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}$

$\tan(\alpha + \theta) = \tan\alpha + \tan\theta + \tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha + \theta)$

$\tan(\alpha - \theta) = \tan\alpha - \tan\theta - \tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha - \theta)$

Demostración:

Sabemos que: $\tan(\alpha + \theta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta}$

$\tan(\alpha + \theta)(1 - \tan\alpha\tan\theta) = \tan\alpha + \tan\theta$

$\tan(\alpha + \theta) - \tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha + \theta) = \tan\alpha + \tan\theta$

$\tan(\alpha + \theta) = \tan\alpha + \tan\theta + \tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha + \theta)$

Aplicaciones:

1. Si: $\alpha + \phi = \pi/12$; calcular:

$R = \dfrac{\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\phi}{\text{sen}\alpha\cos\phi - \cos\alpha\,\text{sen}\phi} + \dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\phi}{\cos\alpha\cos\phi + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\phi}$

Resolución:

Sabemos que:

$\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\theta = \text{sen}(\alpha + \phi)\text{sen}(\alpha - \phi)$ y

$\cos^2\alpha - \text{sen}^2\phi = \cos(\alpha + \phi)\cos(\alpha - \phi)$

$R = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \phi)\text{sen}(\alpha - \phi)}{\text{sen}\alpha\cos\phi - \cos\alpha\,\text{sen}\phi} + \dfrac{\cos(\alpha + \phi)\cos(\alpha - \phi)}{\cos\alpha\cos\phi + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\phi}$

Los denominadores son expresiones conocidas.

$R = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \phi)\text{sen}(\alpha - \phi)}{\text{sen}(\alpha - \phi)} + \dfrac{\cos(\alpha + \phi)\cos(\alpha - \phi)}{\cos(\alpha - \phi)}$

$R = \text{sen}(\alpha + \phi) + \cos(\alpha + \phi)$

Dato: $\alpha + \phi = \pi/12$

$\Rightarrow R = \text{sen}\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2. Simplificar:

$R = \text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y) + \text{sen}(y + z)\text{sen}(y - z) + \text{sen}(z + x)\text{sen}(z - x)$

Resolución:

Sabemos que:

$\text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\theta$

$R = \text{sen}^2x - \text{sen}^2y + \text{sen}^2y - \text{sen}^2z + \text{sen}^2z - \text{sen}^2x$

$\therefore R = 0$

3. Simplificar:

$$R = \frac{\text{sen}(\alpha - \theta)}{\text{sen}\alpha\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}(\theta - \phi)}{\text{sen}\theta\text{sen}\phi} + \frac{\text{sen}(\phi - \alpha)}{\text{sen}\phi\text{sen}\alpha}$$

Resolución:

Sabemos que: $\cot a - \cot b = \dfrac{\text{sen}(b - a)}{\text{sen}b\text{sen}a}$

$R = \cot\theta - \cot\alpha + \cot\phi - \cot\theta + \cot\alpha - \cot\phi$

$\therefore R = 0$

4. Reducir:

$$L = \frac{\text{sen}2x}{\cos x\cos 3x} + \frac{\text{sen}3x}{\cos 3x\cos 6x} - \frac{\text{sen}4x}{\cos 6x\cos 2x}$$

Resolución:

$$L = \frac{\text{sen}(3x - x)}{\cos x\cos 3x} + \frac{\text{sen}(6x - 3x)}{\cos 3x\cos 6x} - \frac{\text{sen}(6x - 2x)}{\cos 6x\cos 2x}$$

$L = (\tan 3x - \tan x) + (\tan 6x - \tan 3x) - (\tan 6x - \tan 2x)$

$L = \tan 3x - \tan x + \tan 6x - \tan 3x - \tan 6x + \tan 2x$

Simplificando:

$$L = \tan 2x - \tan x = \frac{\text{sen}(2x - x)}{\cos 2x\cos x} = \frac{\text{sen}x}{\cos 2x\cos x}$$

$\therefore L = \sec 2x\tan x$

5. Demostrar:

$$\frac{\cos(\alpha + \phi)}{\text{sen}\alpha\cos\phi} = \cot\alpha - \tan\phi \wedge \frac{\cos(\alpha - \phi)}{\cos\alpha\text{sen}\phi} = \cot\phi + \tan\alpha$$

Demostración:

$$\frac{\cos(\alpha + \phi)}{\cos\phi\text{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha\cos\phi - \text{sen}\alpha\text{sen}\phi}{\cos\phi\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{\cos(\alpha + \phi)}{\cos\phi\text{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha\cos\phi}{\cos\phi\text{sen}\alpha} - \frac{\text{sen}\alpha\text{sen}\phi}{\cos\phi\text{sen}\alpha} = \cot\alpha - \tan\phi$$

$$\frac{\cos(\alpha - \phi)}{\cos\alpha\text{sen}\phi} = \frac{\cos\alpha\cos\phi + \text{sen}\alpha\text{sen}\phi}{\cos\alpha\text{sen}\phi}$$

$$\frac{\cos(\alpha - \phi)}{\cos\alpha\text{sen}\phi} = \frac{\cos\alpha\cos\phi}{\cos\alpha\text{sen}\phi} + \frac{\text{sen}\alpha\text{sen}\phi}{\cos\alpha\text{sen}\phi} = \cot\phi + \tan\alpha$$

6. Hallar el valor de:

$R = \tan 22° + \tan 23° + \tan 22°\tan 23°$

$A = \tan 10° + \tan 20° + \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 10°\tan 20°$

$C = \tan 13° + \tan 12° + \tan 12°\tan 13°\tan 25°$

$L = \tan 35° - \tan 5° - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 35°\tan 5°$

$N = \tan 80° - \tan 20° - \sqrt{3}\tan 80° + \tan 20°$

$Y = \tan 60° - \tan 10° - \sqrt{3}\tan 50°\tan 10°$

Resolución:

Sabemos:

$\tan(\alpha + \theta) = \tan\alpha + \tan\theta + \tan(\alpha + \theta)\tan\alpha\tan\theta$

$\tan(\alpha - \theta) = \tan\alpha - \tan\theta - \tan(\alpha - \theta)\tan\alpha\tan\theta$

$R = \tan 22° + \tan 23° + 1\tan 22°\tan 23°$

$R = \tan 22° + \tan 23° + \tan(22° + 25°)\tan 22°\tan 23°$

$\therefore R = \tan 45° = 1$

$A = \tan 10° + \tan 20° + \tan(10° + 20°)\tan 10°\tan 20°$

$\therefore A = \tan 30° = \sqrt{3}/3$

$C = \tan 13° + \tan 12° + \tan 13°\tan 12°\tan(12° + 13°)$

$\therefore C = \tan 25°$

$L = \tan 35° - \tan 5° - \tan(35° - 5°)\tan 35°\tan 5°$

$\therefore L = \tan 30° = \sqrt{3}/3$

$N = \tan 80° - \tan 20° - \tan(80° - 20°)\tan 20°\tan 80°$

$\therefore N = \tan 60° = \sqrt{3}$

$Y = \tan 60° - \tan 10° - \sqrt{3}\tan 10°\tan 50°$

$Y = \tan 60° - \tan 10° - \tan 60°\tan 50°\tan 10°$

$Y = \tan 60° - \tan 10° - \tan(60° - 10°)\tan 10°\tan 60°$

$\therefore Y = \tan 50°$

7. Si α y ϕ son ángulos complementarios, calcular:

$$R = \left(1 + \tan\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{\phi}{2}\right)$$

Resolución:

$$R = \left(1 + \tan\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{\phi}{2}\right)$$

$$R = 1 + \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\phi}{2}$$

Pero: $\alpha + \phi = 90°$; entonces:

$$R = 1 + \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\phi}{2} + \tan\left(\frac{\alpha + \phi}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\phi}{2}$$

$$R = 1 + \tan\left(\frac{\alpha + \phi}{2}\right) = 1 + 1 \quad \therefore R = 2$$

8. Simplificar:

$R = \csc 3\alpha(\tan\alpha + \tan 2\alpha + \tan\alpha\tan 2\alpha\tan 3\alpha)$

Resolución:

$R = \csc 3\alpha(\tan\alpha + \tan 2\alpha + \tan\alpha\tan 2\alpha\tan 3\alpha)$

Por propiedad:

$$R = (\csc 3\alpha)(\tan 3\alpha) = \left(\frac{1}{\text{sen}3\alpha}\right)\left(\frac{\text{sen}3\alpha}{\cos 3\alpha}\right)$$

$\therefore R = \sec 3\alpha$

Observaciones

Toda expresión de la forma: $a\text{sen}\alpha + b\cos\alpha$: se puede expresar como el producto de una constante positiva por el seno (o coseno) de una suma (o diferencia) de dos ángulos:

$$\boxed{a\text{sen}\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\,\text{sen}(\alpha + \phi) \;/\; \tan\phi = \frac{b}{a}}$$

- $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \phi \in$ IC
- $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \phi \in$ IIC
- $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \phi \in$ IVC
- $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \phi \in$ IIIC

De esta igualdad se deduce:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \le a\text{sen}\alpha \pm b\cos\alpha \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplos:

- Determinar el mayor valor de: $3\text{sen}\alpha + 4\cos\alpha$

  Rpta.: $\sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$

- Determinar el menor valor de: $8\text{sen}x + 15\cos x$

  Rpta.: $-\sqrt{(8)^2 + (15)^2} = -17$

- Determinar el mayor valor de: $20\text{sen}\theta - 21\cos\theta$
  Rpta.: $\sqrt{(20)^2 + (21)^2} = 29$
- Determinar el menor valor de: $-5\text{sen}\phi + 12\cos\phi$
  Rpta.: $-\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = -13$
- Determinar el mayor valor de: $\text{sen}x + \cos x$
  Rpta.: $\sqrt{2}$
- Determinar el menor valor de:
  $3\text{sen}(\alpha - x) - 4\cos(\alpha - x)$
  Rpta.: $-\sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = -5$

Observaciones

Por su frecuente aplicación es recomendable que recuerde las siguientes identidades:

$\text{sen}x \pm \cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}(x \pm 45°)$
$\sqrt{3}\,\text{sen}x \pm \cos x = 2\text{sen}(x \pm 30°)$
$\text{sen}x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\text{sen}(x \pm 60°)$

Ejemplos:

- $\text{sen}5° + \cos5° = \sqrt{2}\,\text{sen}(5° + 45°) = \sqrt{2}\,\text{sen}50°$
- $\text{sen}8° - \cos8° = \sqrt{2}\,\text{sen}(8° - 45°) = -\sqrt{2}\,\text{sen}37°$
- $\text{sen}80° - \cos80° = \sqrt{2}\,\text{sen}(80° - 45°) = \sqrt{2}\,\text{sen}35°$
- $\sqrt{3}\,\text{sen}10° + \cos10° = 2\text{sen}(10° + 30°) = 2\text{sen}40°$
- $\sqrt{3}\,\text{sen}20° - \cos20° = 2\text{sen}(20° - 30°) = -2\text{sen}10°$
- $\sqrt{3}\cos50° + \text{sen}50° = 2\text{sen}(50° + 60°) = 2\text{sen}110°$
- $\text{sen}40° - \sqrt{3}\cos40° = 2\text{sen}(40° - 60°) = -2\text{sen}20°$
- $\text{sen}\frac{\pi}{5} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{5} = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\text{sen}\frac{8\pi}{15}$
- $\text{sen}\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,\text{sen}\frac{3\pi}{28}$
- Simplificar: $M = \dfrac{\text{sen}65° + \sqrt{3}\cos65°}{\text{sen}10° + \cos10°}$

  Resolución:

  $$M = \frac{2\text{sen}(65° + 60°)}{\sqrt{2}\,\text{sen}(10° + 45°)} = \frac{2\text{sen}125°}{\sqrt{2}\,\text{sen}55°} = \frac{2\text{sen}55°}{\sqrt{2}\,\text{sen}55°}$$

  $$M = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

- Simplificar: $L = \dfrac{3\text{sen}7° + \sqrt{3}\cos7°}{\text{sen}8° - \cos8°}$

  Resolución:

  $$L = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}\,\text{sen}7° + \cos7°)}{\text{sen}8° - \cos8°} = \frac{\sqrt{3}[2\text{sen}(7° + 30°)]}{\sqrt{2}\,\text{sen}(8° - 45°)}$$

  $$L = \frac{2\sqrt{3}\,\text{sen}37°}{-\sqrt{2}\,\text{sen}37°} = -\sqrt{6}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE TRES ÁNGULOS

$\text{sen}(\alpha + \phi + \theta) = \text{sen}\alpha\cos\phi\cos\theta + \cos\alpha\cos\phi\,\text{sen}\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\phi\cos\theta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta$
$\cos(\alpha + \phi + \theta) = \cos\alpha\cos\phi\cos\theta - \cos\alpha\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta - \text{sen}\alpha\cos\phi\,\text{sen}\theta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\phi\cos\theta$
$\tan(\alpha + \phi + \theta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\phi + \tan\theta - \tan\alpha\tan\phi\tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\phi - \tan\alpha\tan\theta - \tan\phi\tan\theta}$
$\cot(\alpha + \phi + \theta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\phi\cot\theta - \cot\alpha - \cot\phi - \cot\theta}{\cot\alpha\cot\theta + \cot\alpha\cot\phi + \cot\phi\cot\theta - 1}$

Observaciones

Si: $\alpha + \phi + \theta = k\pi \Rightarrow \tan(\alpha + \phi + \theta) = 0$
y $\cot(\alpha + \phi + \theta) \nexists$ $(k \in \mathbb{Z})$

Si: $\alpha + \phi + \theta = (2k + 1)\pi/2 \Rightarrow \tan(\alpha + \phi + \theta) \nexists$
y $\cot(\alpha + \phi + \theta) = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$

Propiedades

I. $\alpha + \phi + \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\tan\alpha + \tan\phi + \tan\theta = \tan\alpha\tan\phi\tan\theta$
$\tan\alpha\tan\phi + \tan\alpha\tan\theta + \tan\phi\tan\theta = 1$

II. $\alpha + \beta + \theta = (2k + 1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot\alpha\cot\phi + \cot\alpha\cot\theta + \cot\phi\cot\theta = 1$
$\cot\alpha + \cot\phi + \cot\theta = \cot\alpha\cot\phi\cot\theta$

Nota

Recuerda que estas igualdades son válidas para valores permitidos de la variable, por ejemplo la propiedad 1 no es aplicable, si $\alpha = \pi/2$.

Aplicaciones:

1. $\tan\frac{\pi}{10} + \tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{7\pi}{10} = \tan\frac{\pi}{10}\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{7\pi}{10}$
2. $\tan80° + \tan25° + \tan75° = \tan25°\tan75°\tan80°$
3. $\tan40°\tan20° + \tan20°\tan30° + \tan30°\tan40° = 1$
4. Si: $A + B + C = \pi$ y $\dfrac{\tan A}{3} = \dfrac{\tan B}{4} = \dfrac{\tan C}{7}$
   calcular: $\tan A - \tan B + \tan C$.

   Resolución:

   $\dfrac{\tan A}{3} = \dfrac{\tan B}{4} = \dfrac{\tan C}{7} = m$

   $\Rightarrow \tan A = 3m;\ \tan B = 4m$ y $\tan C = 7m$

   Propiedad: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

   $\Rightarrow 14m = 84m^3 \Rightarrow m = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

   $\Rightarrow \tan A = \dfrac{3}{\sqrt{6}};\ \tan B = \dfrac{4}{\sqrt{6}}$ y $\tan C = \dfrac{7}{\sqrt{6}}$

   $\Rightarrow \tan A - \tan B + \tan C = \dfrac{3}{\sqrt{6}} - \dfrac{4}{\sqrt{6}} + \dfrac{7}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

5. En un triángulo ABC se cumple que:
   $\tan A + \tan B = 3\tan C$; calcular: $\tan A\tan B$

   Resolución:

   Como: $A + B + C = 180°$

   $\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

   $\Rightarrow 4\tan C = \tan A\tan B\tan C \quad \therefore \tan A\tan B = 4$

6. Si: A, B y C son los ángulos de un triángulo, hallar el mínimo valor de:

$$F = \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}$$

Resolución:

Como: $A + B + C = 180° \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$$

Multiplicar F por 2:

$$2F = 2\tan^2\frac{A}{2} + 2\tan^2\frac{B}{2} + 2\tan^2\frac{C}{2}$$

Restar 2 a toda la expresión:

$$2F - 2 = 2\tan^2\frac{A}{2} + 2\tan^2\frac{B}{2} + 2\tan^2\frac{C}{2} - 2$$

Esto es lo mismo que escribir:

$$2F - 2 = 2\tan^2\frac{A}{2} + 2\tan^2\frac{B}{2} + 2\tan^2\frac{C}{2} - 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)$$

Ordenando:

$$2F - 2 = \tan^2\frac{A}{2} - 2\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{A}{2} - 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + \tan^2\frac{B}{2} - 2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan^2\frac{C}{2}$$

$$2F - 2 = \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2}\right)^2$$

Esta expresión es positiva, o igual cero.

$\Rightarrow 2F - 2 \geq 0 \Rightarrow 2F \geq 2 \Rightarrow F \geq 1$

Por lo tanto, el mínimo valor de:

$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}$ es 1

Nota

El mínimo valor de esta expresión se obtiene para $A = B = C = 60°$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor de la expresión:

$$T = \frac{1}{\cot x + \cot y} - \frac{1}{\tan x \tan y}, \text{ si } x + y = 225°$$

Resolución:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} - \frac{1}{\tan x + \tan y}$$

$$T = \frac{\tan x \tan y}{\tan y + \tan x} - \frac{1}{\tan x + \tan y}$$

$$T = \frac{\tan x \tan y - 1}{\tan x + \tan y} \Rightarrow T = \left(\frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y}\right)$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{\tan 225°} \quad \therefore \quad T = -1$$

2. Simplificar: $S = \tan x + \tan 2x + \tan 3x \tan x \tan 2x$

Resolución:

De la identidad auxiliar:

$\tan(\alpha + \theta) = \tan x + \tan\theta + \tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha + \theta)$

$S = \tan x + \tan 2x + (\tan x)(\tan 2x)[\tan(x + 2x)]$

$S = \tan(x + 2x) = \tan 3x$

3. Simplificar:

$$V = \left[\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2(x + y) - \cos^2 y}{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2(x + y) - \text{sen}^2 y}\right]\frac{\tan x}{\tan y}$$

Resolución:

Nota

$\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\theta = \text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}(\alpha - \theta)$

$\cos^2\alpha - \text{sen}^2\theta = \cos(\alpha + \theta)\cos(\alpha - \theta)$

$$V = \left[\frac{(1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen}^2(x + y) - (1 - \text{sen}^2 y)}{\text{sen}^2(x + y) + \text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y)}\right]\frac{\tan x}{\tan y}$$

$$V = \left[\frac{\text{sen}^2(x + y) - (\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y)}{\text{sen}^2(x + y) + \text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y)}\right]\frac{\tan x}{\tan y}$$

$$V = \left\{\frac{\text{sen}^2(x + y) - \text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y)}{\text{sen}(x + y)[\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)]}\right\}\frac{\tan x}{\tan y}$$

$$V = \left[\frac{\overbrace{\text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y)}^{2\text{sen}y\cos x}}{2\text{sen}x\cos y}\right]\frac{\tan x}{\tan y}$$

$$V = -\left(\frac{\text{sen}y\cos x}{\cos y\text{sen}x}\right)\frac{\tan x}{\tan y} = \left(\frac{\tan y}{\tan x}\right)\frac{\tan x}{\tan y} \quad \therefore \quad V = 1$$

4. Simplificar: $T = \dfrac{\text{sen}\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{\sec\theta + \tan\theta(\cos\theta - 1) - 1}; \theta \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Resolución:

$$T = \frac{\text{sen}\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}(1 - \cos\theta) - 1}$$

$$T = \frac{\text{sen}\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{\frac{1 - \cos\theta - \text{sen}\theta(1 - \cos\theta)}{\cos\theta}}$$

$$T = \frac{\cos\theta\text{sen}\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{(1 - \cos\theta)(1 - \text{sen}\theta)}$$

$$T = \frac{2(\cos\theta)(\text{sen}\theta)(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{2(1 - \text{sen}\theta)(1 - \cos\theta)}$$

Recordemos que:

$$2(1 - \text{sen}\theta)(1 - \cos\theta) = (1 - \text{sen}\theta - \cos\theta)^2 = (\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)^2$$

$$T = \frac{2\cos\theta\text{sen}\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)^2}$$

$$T = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{\text{sen}\theta + \cos\theta - 1}$$

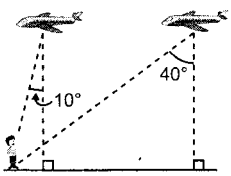
$$T = \left[\frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{(\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}\right]\left(\frac{\text{sen}\theta + \cos\theta + 1}{\text{sen}\theta + \cos\theta + 1}\right)$$

$$T = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta + 1)}{(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 1^2}$$

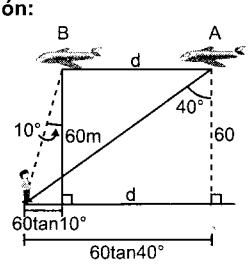
$$T = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta(\text{sen}\theta + \cos\theta + 1)}{1 + 2\text{sen}\theta\cos\theta - 1}$$

$\therefore T = \text{sen}\theta + \cos\theta + 1$

5. Desde un planeador que vuela a 60 metros del suelo, se toman dos observaciones de un objeto fijo en tierra que se encuentra directamente frente a él; las observaciones se toman con una diferencia de un minuto (véase la figura) ¿cuál es la rapidez del planeador en m/s?



Resolución:



Siendo t = 1 min = 60 s, el tiempo utilizado por el planeador en el tramo $\overline{AB}$, su velocidad es:

$$V = \frac{d}{t} = \frac{60\tan40° - 60\tan10°}{60} = \tan40° - \tan10°$$

Se sabe que: $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$\Rightarrow V = \frac{\text{sen}(40° - 10°)}{\cos40°\cos10°} = \frac{\text{sen}30°}{\cos40°\cos10°}$$

$$\therefore V = \frac{1}{2}\sec40°\sec10°$$

6. Se sabe que: $x + y + z = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\cot x}{3} = \frac{\cot y}{2} = \frac{\cot z}{5}$

calcular: A = (tanx)(tany)(tanz)

Resolución:

Siendo: $\frac{\cot x}{3} = \frac{\cot y}{2} = \frac{\cot z}{5} = k$

$\Rightarrow$ cotx = 3k; coty = 2k; cotz = 5k

Como $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, se cumple:

cotx + coty + cotz = cotxcotycotz

$\Rightarrow 3k + 2k + 5k = (3k)(2k)(5k)$

$10k = 3k^2(10k) \Rightarrow 1 = 3k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Luego, en A:

$$A = (\tan x)(\tan y)(\tan z) = \left(\frac{1}{\cot x}\right)\left(\frac{1}{\cot y}\right)\left(\frac{1}{\cot z}\right)$$

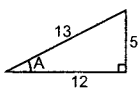
$$A = \frac{1}{(3k)(2k)(5k)} = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{k^3}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{30}\sqrt{3}^3$$

$$\therefore A = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

7. Si A y B son ángulos agudos y se cumple que senA = 5/13 y cosB = 4/5, calcular el valor de: M = 130cos(A + B)

Resolución:

Si: senA = 5/13 $\Rightarrow$



Si: cosB = 4/5 $\Rightarrow$ senB = 3/5

Nos piden: M = 130cos(A + B)

M = 130(cosAcosB − senAsenB)

$$M = 130\left[\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\right]$$

$\therefore M = 66$

8. Si: $\tan(B - C) = \dfrac{2\text{sen}2C}{7 - 2\cos2C}$; calcular:

M = tanBcotC

Resolución:

$$\tan(B - C) = \frac{2\text{sen}2C}{7 - 2\cos2C} \Rightarrow \frac{\text{sen}(B - C)}{\cos(B - C)} = \frac{2\text{sen}2C}{7 - 2\cos2C}$$

7sen(B − C) − 2sen(B − C)cos2C = 2cos(B − C)sen2C

7sen(B − C) = 2[sen(B − C)cos2C + cos(B − C)sen2C]

7sen(B − C) = 2sen[(B − C) + 2C]

7sen(B − C) = 2sen(B + C)

7(senBcosC − cosBsenC) = 2(senBcosC + cosBsenC)

5senBcosC = 9cosBsenC

$\therefore M = 1{,}8$

9. Si: $\tan(\alpha + \beta) = 1/3$ y $\tan(\beta + \theta) = 1/4$; hallar $\tan(\alpha - \theta)$

Resolución:

Datos: $\tan(\alpha + \beta) = 1/3 \Rightarrow \tan x = 1/3$

$\tan(\beta + \theta) = 1/4 \Rightarrow \tan y = 1/4$

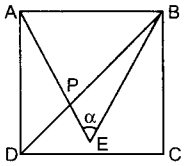
Notemos que: $\alpha - \theta = \underbrace{(\alpha + \beta)}_{x} - \underbrace{(\beta + \theta)}_{y}$

$\Rightarrow \tan(\alpha - \theta) = \tan(x - y)$

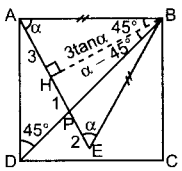
$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$\therefore \tan(\alpha - \theta) = 1/13$

10. En la figura, ABCD es un cuadrado, AB = BE y AP = 2(PE); hallar: $3\tan\alpha$.



Resolución:



Siendo AP = 2(PE) ⇒ PE = 2; AP = 4
Como el △ABE es isósceles: AH = HE = 3
En el ◺BHP:

$$\tan(\alpha - 45°) = \frac{1}{3\tan\alpha} \Rightarrow \frac{\tan\alpha - \tan 45°}{1 + \tan\alpha\tan 45°} = \frac{1}{3\tan\alpha}$$

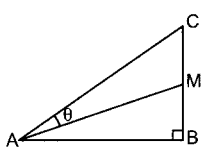
$$3\tan\alpha(\tan\alpha - 1) = 1 + \tan\alpha \Rightarrow 3\tan^2\alpha - 4\tan\alpha - 1 = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-1)}}{6} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

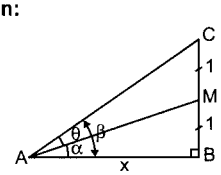
$$\tan\alpha = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \vee \tan\alpha = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore\ 3\tan\alpha = 2 + \sqrt{7}$$

11. En la figura mostrada; BM = MC, hallar el máximo valor que puede tomar tanθ.



Resolución:



Observemos que:

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) \Rightarrow \tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x^2 + 2}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{x + \frac{2}{x}} \qquad ...(1)$$

Aplicando la propiedad: $Ax + \frac{B}{x} \geq 2\sqrt{AB}$; $x > 0$

Tenemos: $\underbrace{x + \frac{2}{x}}_{\min} \geq 2\sqrt{2}$

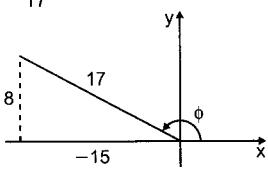
$$\min = 2\sqrt{2} \qquad ...(2)$$

Reemplazar (2) en (1): $(\tan\theta)_{máx} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

12. Sabiendo que $\phi \in$ IIC y $\theta \in$ IC; además: $\operatorname{sen}\phi = \frac{8}{17}$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$; calcular $A = \frac{\operatorname{sen}(\phi - \theta)}{\operatorname{sen}(\phi + \theta)}$

Resolución:

Si: $\operatorname{sen}\phi = \frac{8}{17}$; $\phi \in$ IIC; entonces:



Además, si $\cos\theta = 3/5$, $\theta \in$ IC
⇒ $\operatorname{sen}\theta = 4/5$

Luego: $A = \frac{\operatorname{sen}(\phi - \theta)}{\cos(\phi + \theta)} = \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\theta - \cos\phi\operatorname{sen}\theta}{\cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta}$

$$A = \frac{\left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$A = \frac{24 + 60}{-45 - 32} \quad \therefore\ A = -\frac{84}{77}$$

13. Si: $\tan(\alpha - \beta) = \tan^3\beta$, calcular:

$$E = \frac{\tan\alpha\cos 2\beta}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}$$

Resolución:

Dato: $\tan(\alpha - \beta) = \tan^3\beta$

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \tan^3\beta$$

$\tan\alpha - \tan\beta = \tan^3\beta + \tan\alpha\tan^4\beta$

$\tan\alpha - \tan\alpha\tan^4\beta = \tan\beta + \tan^3\beta$

$\tan\alpha(1 - \tan^4\beta) = \tan\beta(1 + \tan^2\beta)$

$\tan\alpha(1 + \tan^2\beta)(1 - \tan^2\beta) = \tan\beta(1 + \tan^2\beta)$

$$\tan\alpha = \frac{\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} \Rightarrow 2\tan\alpha = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \tan 2\beta$$

$$\frac{2\tan\alpha\cos 2\beta}{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta} = 1 \quad \therefore\ E = 1$$

14. Hallar: $(f_{máx} + f_{mín})$, si f es una función definida por: $f(x) = 3\operatorname{sen}^2x + 4(\operatorname{sen}x)(\cos x) + 5\cos^2x$

Resolución:

Multipliquemos por 2:

$2f(x) = 3(2\operatorname{sen}^2x) + 4(2\operatorname{sen}x\cos x) + 5(2\cos^2x)$

$2f(x) = 3(1 - \cos 2x) + 4\operatorname{sen}2x + 5(1 + \cos 2x)$

$2f(x) = 8 + 4\operatorname{sen}2x + 2\cos 2x$

$f(x) = 4 + 2\operatorname{sen}2x + \cos 2x$

Se sabe: $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

$-\sqrt{5} \leq 2\operatorname{sen}2x + \cos 2x \leq \sqrt{5}$

$$\underbrace{4 - \sqrt{5}}_{f_{min}} \leq \underbrace{4 + 2\operatorname{sen}2x + \cos 2x}_{f(x)} \leq \underbrace{4 + \sqrt{5}}_{f_{máx}}$$

$\therefore\ f_{máx} + f_{min} = 8$

15. Evaluar: $T = \dfrac{\tan 50° - \tan 10° - \tan 40°}{\cot 260°}$

Resolución:

Como:

$\tan(\alpha + \beta) = \tan\alpha + \tan\beta + \tan(\alpha + \beta)\tan\alpha\tan\beta$

Obtenemos: $\tan 50° = \tan(10° + 40°)$

$\tan 50° = \tan 10° + \tan 40° + \tan 50°\tan 10°\tan 40°$

Reemplazando T queda:

$T = \dfrac{\tan 50°\tan 10°\tan 40°}{\cot(270° - 10°)} \Rightarrow T = \tan 50°\tan 40°$

$T = \tan 50°\cot 50° \quad \therefore T = 1$

16. Evaluar: $S = \tan 22° + \tan 23° + \tan 22°\tan 23°$

Resolución:

Vamos a aplicar:

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan(\alpha + \beta)\tan\alpha\tan\beta = \tan(\alpha + \beta)$

$S = \tan 22° + \tan 23° + \tan 22°\tan 23°$

$S = \tan 22° + \tan 23° + 1\tan 22°\tan 23°$

$\Rightarrow S = \tan(22° + 23°) = 1 \quad \therefore S = 1$

17. Si se cumple que: $a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$, hallar $\tan x$.

Resolución:

Dato: $a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dado que: $a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^{\,2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \wedge \cos x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\therefore \tan x = \dfrac{a}{b}$

18. Si se cumple: $\dfrac{\sec x + a\tan x}{\sec x + a} = \dfrac{\operatorname{sen}x - a\tan x}{\operatorname{sen}x - a}$

calcule: $\sec^2 x + \csc^2 x$

Resolución:

Por proporciones:

$\dfrac{(\sec x + a\tan x) + (\operatorname{sen}x - a\tan x)}{(\sec x + a)(\operatorname{sen}x - a)} = 1$

$\dfrac{\sec x + \operatorname{sen}x}{\sec x + \operatorname{sen}x} = \dfrac{\sec x + a\tan x}{\sec x + a}$

$1 = \dfrac{\sec x + a\tan x}{\sec x + a} \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = 45°$

Luego:

$\therefore \sec^2 x + \csc^2 x = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4$

19. Dado "x" un ángulo agudo que cumple:

$\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x}$, calcular: $\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}x\cos x}$

Resolución:

Le damos forma:

$\dfrac{\tan 45° + \tan x}{1 - \tan 45°\tan x} = \dfrac{\tan 60° - \tan x}{1 + (\tan 60°)(\tan x)}$

$\Rightarrow \tan(45° + x) = \tan(60° - x)$

Luego: $2x = 15°$

Se pide: $M = \sqrt{1 - 2\operatorname{sen}x\cos x}$

$\Rightarrow M = \sqrt{1 - \operatorname{sen}2x} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}15°}$

$M = \sqrt{1 - \cos 75°} = \sqrt{2\operatorname{sen}^2\dfrac{75°}{2}}$

$\therefore M = \sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{75°}{2} \vee M = \sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{24}$

20. Si $\cot x = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{2/3}$, hallar el valor de la siguiente expresión:

$M = \dfrac{a}{b\operatorname{sen}x} + \dfrac{b}{a\cos x}$; siendo "x" un arco de primer cuadrante.

Resolución:

Dato: $\cot x = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cot^{3/2}x = \left(\dfrac{b}{a}\right) \wedge \tan^{3/2}x = \dfrac{a}{b}$

Luego: $M = \dfrac{\tan^{3/2}x}{\operatorname{sen}x} + \dfrac{\cot^{3/2}x}{\cos x}$

$M = \dfrac{\operatorname{sen}^{3/2}x}{\cos^{3/2}x\operatorname{sen}x} + \dfrac{\cos^{3/2}x}{\operatorname{sen}^{3/2}x\cos x}$

$M = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}^{1}}{(\operatorname{sen}x\cos x)^{3/2}} = (\sec x\csc x)^{3/2}$

$M = (\tan x + \cot x)^{3/2} \quad \therefore M = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$

21. Determinar el tipo de triángulo ABC en el cual se cumple: $-\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos C} = \operatorname{sen}A + \cos A\cot B$

Resolución:

$\triangle ABC$: $-\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos C} = \operatorname{sen}A + \cos A\cot B$

$-\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos C} = \operatorname{sen}A + \cos A\left(\dfrac{\cos B}{\operatorname{sen}B}\right)$

$-\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos C} = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B + \cos A\cos B}}{\operatorname{sen}B}$

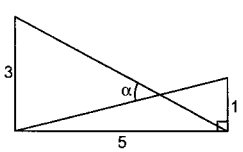
$-\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos C} = \dfrac{\cos(A - B)}{\operatorname{sen}B}$

$-\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos C} = \dfrac{-\cos C}{\operatorname{sen}B} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 B = \cos^2 C$

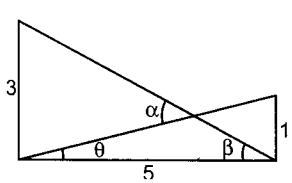
$\Rightarrow |\operatorname{sen}B| = |\cos C| \Rightarrow B + C = 90°$

$\therefore \triangle ABC$ es rectángulo.

22. Del gráfico, hallar $\tan\alpha$.



Resolución:



De la figura: $\alpha = \theta + \beta$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan(\theta + \beta)$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan\theta + \tan\beta}{1 - \tan\theta\tan\beta}$$

Donde: $\tan\theta = \frac{1}{5} \wedge \tan\beta = \frac{3}{5}$

Reemplazamos:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{25}} = \frac{\frac{20}{25}}{\frac{22}{25}} \quad \therefore \tan\alpha = \frac{10}{11}$$

23. Si: $S = \tan38° + \tan7° + \tan7°\tan38°$

$T = \tan65° - \tan5° - \sqrt{3}\tan65°\tan5°$

Hallar: $\frac{T}{S}$

Resolución:

- $S = \tan38° + \tan7° + (\tan45°)\tan38°\tan7°$

  $S = \tan45° = 1$
- $T = \tan65° - \tan5°(\tan60°)\tan5°\tan65°$

  $T = \tan(65° - 5°) = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{T}{S} = \sqrt{3}$

24. Si: $\tan(7x) = \sqrt{2}\cot(3x)$, hallar: $\frac{\sec(4x)}{\sec(10x)}$

Resolución:

Del dato: $\tan7x = \sqrt{2}\cot3x$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}7x}{\cos7x} = \sqrt{2}\frac{\cos3x}{\text{sen}3x} \Rightarrow \frac{\text{sen}7x\text{sen}3x}{\cos7x\cos3x} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

Por proporciones:

$$\frac{\cos7x\cos3x - \text{sen}7x\text{sen}3x}{\cos7x\cos3x + \text{sen}7x\text{sen}3x} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{\cos(7x + 3x)}{\cos(7x - 3x)} = (1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{\cos10x}{\cos4x} = 2\sqrt{2} - 3 \quad \therefore \frac{\sec4x}{\sec10x} = 2\sqrt{2} - 3$$

25. Eliminar "x" e "y" de las tres ecuaciones:

$\text{sen}x + \text{sen}y = a$ ...(1)

$\cos x + \cos y = b$ ...(2)

$\cos x\cos y + \text{sen}x\text{sen}y = c$ ...(3)

Resolución:

$(1)^2$: $\text{sen}^2x + 2\text{sen}x\text{sen}y + \text{sen}^2y = a^2$

$(2)^2$: $\cos^2x + 2\cos x\cos y + \cos^2y = b^2$

Sumamos: $(1)^2 + (2)^2$

$2 + 2(\cos x\cos y + \text{sen}x\text{sen}y) = a^2 + b^2$

Reemplazando (3): $2 + 2c = a^2 + b^2$

26. Si: $\tan(A - B) = \frac{1}{3}$ y $\cot A = \frac{4}{3}$,

simplificar: $S = 6\tan B + \sqrt{10}\cos B$

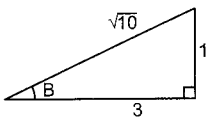
Resolución:

Condición: $\tan(A - B) = \frac{1}{3} \Rightarrow A - B = \frac{37°}{2}$

$\tan A = \frac{3}{4} \Rightarrow A = 37° \wedge B = \frac{37°}{2}$

$\therefore B = \frac{37°}{2}$

Luego:



$\Rightarrow S = 6\tan B + \sqrt{10}\cos B$

$S = 6 \times \frac{1}{3} + \sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \therefore S = 5$

27. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, calcular:

$$K = \left[1 + \tan\left(\frac{A}{2}\right)\right]\left[1 + \tan\left(\frac{B}{2}\right)\right]\left[1 + \tan\left(\frac{C}{2}\right)\right]$$

Resolución:

Condición: $A + B = 90° \wedge C = 90°$

Como:

$C = 90° \Rightarrow \left(1 + \tan\frac{C}{2}\right) = 2$ ...(1)

También: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 45° \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = 1$

$$\frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = 1$$

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1 = 2$$

$\left(1 + \tan\frac{A}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{B}{2}\right) = 2$ ...(2)

De (1) × (2):

$\left(1 + \tan\frac{A}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{B}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{C}{2}\right) = 4 \quad \therefore K = 4$

28. Si:

$$\frac{\text{sen}(\theta + \alpha)}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

determinar: $V = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Resolución:

Por proporciones:

$$\frac{\overbrace{\text{sen}(\theta + \alpha)}^{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)} + \cos(\theta - \alpha)}{\underbrace{\cos(\theta - \alpha)}_{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)} - \text{sen}(\theta + \alpha)} = \frac{2}{2m}$$

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}_{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}} = \frac{1}{m}$$

$$\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\right]\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\right]=m$$

$$\therefore\ V=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=m$$

29. Si: $\tan(2\alpha+\beta)=4$; $\tan(\alpha+2\beta)=3$
hallar: $\tan(3\alpha)/\tan(3\beta)$

Resolución:

Tenemos que: $(2\alpha+\beta)-(\alpha+2\beta)=\alpha-\beta$

$\Rightarrow \tan[(2\alpha+\beta)-(\alpha+2\beta)]=\tan(\alpha-\beta)$

$$\frac{\tan(2\alpha+\beta)-\tan(\alpha+2\beta)}{1+\tan(2\alpha+\beta)\tan(\alpha+2\beta)}=\tan(\alpha-\beta)$$

Reemplazamos:

$$\frac{4-3}{1+4\times 3}=\tan(\alpha-\beta)\quad\Rightarrow\quad\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{13}$$

También: $3\alpha=(2\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \tan3\alpha=\tan[(2\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$

$$\tan3\alpha=\frac{\tan(2\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(2\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\tan3\alpha=\frac{4+\frac{1}{13}}{1-\frac{4}{13}}=\frac{53}{9}$$

Además: $3\beta=(\alpha+2\beta)-(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \tan3\beta=\tan[(\alpha+2\beta)-(\alpha-\beta)]$

$$\tan3\beta=\frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\tan3\beta=\frac{3-\frac{1}{13}}{1+\frac{3}{13}}=\frac{19}{8}$$

Finalmente: $\dfrac{\tan3\alpha}{\tan3\beta}=\dfrac{53/9}{19/8}=\dfrac{424}{171}$

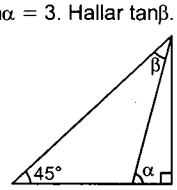
30. Hallar: $M=\left(\dfrac{\text{sen}6^\circ}{\cos6^\circ}-\dfrac{\text{sen}4^\circ}{\cos4^\circ}\right)\cos6^\circ\cos4^\circ$

Resolución:

$$M=\left(\frac{\text{sen}6^\circ\cos4^\circ-\cos6^\circ\text{sen}4^\circ}{\cos4^\circ\cos6^\circ}\right)\cos6^\circ\cos4^\circ$$

$M=\text{sen}(6^\circ-4^\circ)=\text{sen}2^\circ$

31. En la figura, $\tan\alpha=3$. Hallar $\tan\beta$.



Resolución:

$\alpha=45^\circ+\beta$; entonces $\beta=\alpha-45^\circ$.
Luego: $\tan\beta=\tan(\alpha-45^\circ)$

$$\Rightarrow\ \frac{\tan\alpha-\tan45^\circ}{1+\tan45^\circ\tan\alpha}=\frac{3-1}{1+(1)(3)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

32. Si $\tan(\alpha+\beta)=3$ y $\tan(\alpha-\beta)=2$; hallar $\tan2\alpha$.

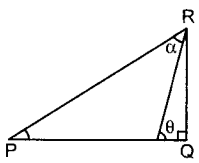
Resolución:

Observar que: $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$, entonces

$$\tan2\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

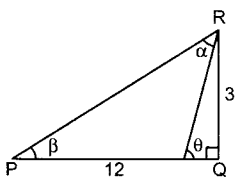
$$\tan2\alpha=\frac{3+2}{1-(3)(2)}=\frac{5}{-5}=-1$$

33. En la figura, PQR es un triángulo rectángulo, PQ = 12 cm, QR = 3 cm y $\tan\alpha=2$. Hallar $\tan\theta$.



Resolución:

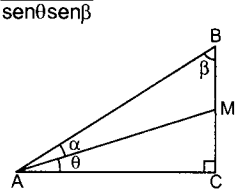
Sea: $\beta=\angle QPR$,
entonces: $\theta=\alpha+\beta$
Luego: $\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)$



$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan\theta=\frac{2+\frac{1}{4}}{1-2\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{9}{2}$$

34. En la figura, BM = MC. Hallar el valor de la expresión: $T=\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta\,\text{sen}\beta}$

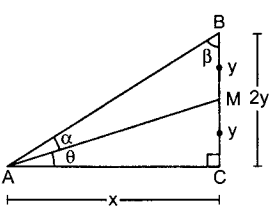


Resolución:

Del gráfico:

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$ ...(1)

$\cot\beta=\dfrac{2y}{x}$ ...(2)



También:
$\alpha+\theta+\beta=90^\circ$
$\Rightarrow 90^\circ-\alpha=\theta+\beta$
Tomando coseno: $\cos(90-\alpha)=\cos(\theta+\beta)$
$\Rightarrow \text{sen}\alpha=\cos\theta\cos\beta-\text{sen}\theta\,\text{sen}\beta$
Dividiendo entre $\text{sen}\theta\,\text{sen}\beta$:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta\,\text{sen}\beta}=\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta}\right)-\frac{\text{sen}\theta\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\theta\,\text{sen}\beta}$$

$T=(\cot\theta)(\cot\beta)-1$

De (1): $T=\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{2y}{x}\right)-1=2-1=1$

35. Sean: $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10} \wedge \cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hallar $\cos\alpha\cos\beta$

Resolución:

Puesto que: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Sumando: $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow 2\cos\alpha\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{10}$

De donde: $\cos\alpha\cos\beta = \sqrt{2}/5$

36. Si: $x + y = \pi/4$ calcular el mínimo del valor de "m", tal que se cumpla: $\frac{1-\tan x}{1+\tan y} \le m$

Resolución:

Del dato: $y = \frac{\pi}{4} - x$

En la desigualdad: $\frac{1-\tan x}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \le m$

Desarrollando:

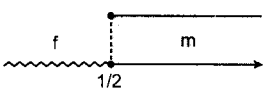
$$\frac{1-\tan x}{1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}} \le m \Rightarrow \frac{1-\tan x}{\frac{2}{1+\tan x}} \le m$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1-\tan^2 x}{2}}_{f} \le m$$

Hallando los valores de "f":

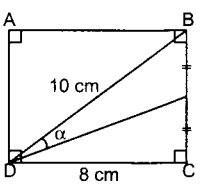
Se sabe que: $\tan^2 x \ge 0 \Rightarrow -\tan^2 x \le 0$

Entonces: $f \le 1/2$; analizando en la recta numérica



$\therefore m_{mínimo} = 1/2$

37. En la figura, ABCD es un rectángulo, hallar el valor de $41\tan\alpha$



Resolución:

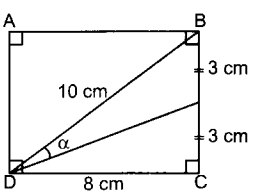
Observar que: $(BC)^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, entonces $BC = 6$

Luego, de la figura se obtiene: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{6}{8}$

o sea:

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\tan\alpha + \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}\tan\alpha} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{8\tan\alpha + 3}{8 - 3\tan\alpha} = \frac{3}{4}$$

$32\tan\alpha + 12 = 24 - 9\tan\alpha$

De donde: $41\tan\alpha = 12$

38. El valor de $T = 2\operatorname{sen}15°\cos75° - 2\cos15°\operatorname{sen}75°$ es:

Resolución:

$T = 2(\operatorname{sen}15°\cos75° - \cos15°\operatorname{sen}75°)$

$T = 2\operatorname{sen}(15° - 75°) = 2\operatorname{sen}(-60°)$

$T = -2\operatorname{sen}60° = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

39. Si $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = -2\alpha$, hallar el valor de la expresión: $E = \cos(\alpha + 30°) + \operatorname{sen}(\alpha - 30°)$

Resolución:

Observar que:

$\cos(\alpha + 30°) = \cos\alpha\cos30° - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}30°$

$\cos(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha - 30°) = \operatorname{sen}\alpha\cos30° - \cos\alpha\operatorname{sen}30°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha$

Entonces, sumando tenemos:

$E = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha$

$E = \frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$

$E = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)(-2a)$

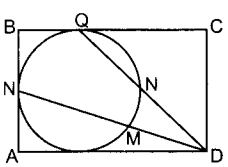
$\therefore E = (1 - \sqrt{3})a$

40. En el siguiente rectángulo:

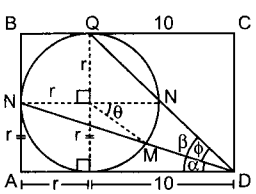
$\widehat{PQ} = 2\pi$ cm; $CQ = 10$ cm;

$\widehat{MN} = a$ cm

Calcular: $\tan\left(\frac{a}{8}\text{rad}\right)$



Resolución:



Como: $\widehat{PQ} = 2\pi \Rightarrow \widehat{PQ} = \left(\frac{\pi}{2}\right)r$

Luego: $2\pi = \left(\frac{\pi}{2}\right)r \Rightarrow r = 4$

Además: $\widehat{MN} = (\theta)(r) \Rightarrow a = (\theta)(4)$

$\Rightarrow \theta = \frac{a}{4}$

$\phi = \dfrac{\widehat{PQ} - \widehat{MN}}{2}$ (geométricamente)

es decir: $\phi = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{a}{4}}{2} \Rightarrow \phi = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{8}$

de donde se obtiene que:

$\dfrac{a}{8} = \dfrac{\pi}{4} - \phi \Rightarrow \tan\left(\dfrac{a}{8}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \phi\right)$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{a}{8}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\phi}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\phi} \qquad \ldots(1)$$

De la figura:

$\phi = \beta - \alpha \Rightarrow \tan\phi = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$

Pero: $\tan\beta = \dfrac{2r}{10} = \dfrac{r}{5} = \dfrac{4}{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{r}{r + 10} = \dfrac{4}{4 + 10} = \dfrac{2}{7}$

Luego: $\tan\phi = \dfrac{\frac{4}{5} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{4}{5} \times \frac{2}{7}} = \dfrac{18}{43}$

En (1): $\tan\left(\dfrac{a}{8}\right) = \dfrac{1 - \frac{18}{43}}{1 + 1 \times \frac{18}{43}} \qquad \therefore \tan\left(\dfrac{a}{8}\right) = \dfrac{25}{61}$

41. Si: $\tan x + \cot y = a \wedge \tan(x - y) = b$
Hallar: $\tan y + \cot x$

Resolución:

Primer dato: $\tan x + \dfrac{1}{\tan y} = a$

$\Rightarrow \dfrac{\tan x \tan y + 1}{\tan y} = a$

$\Rightarrow \dfrac{\tan y}{1 + \tan x \tan y} = \dfrac{1}{a} \qquad \ldots(1)$

Dato: $\dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = b$

$\Rightarrow \dfrac{\tan x}{1 + \tan x \tan y} - \dfrac{\tan y}{1 + \tan x \tan y} = b$

Reemplazando (1): $\dfrac{\tan x}{1 + \tan x \tan y} - \dfrac{1}{a} = b$

$\Rightarrow \dfrac{\tan x}{1 + \tan x \tan y} = \dfrac{1 + ab}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{1 + \tan x \tan y}{\tan x} = \dfrac{1}{\tan x} + \tan y = \dfrac{a}{1 + ab}$

$\therefore \cot x + \tan y = \dfrac{a}{1 + ab}$

42. Hallar: A + (B)(C), si:

$A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x + \tan 5x$

$B = (\tan x)(\tan 2x)(\tan 3x)(\tan 4x)(\tan 5x)$

$C = (\cot x)(\cot 4x) + (\cot 2x)(\cot 3x)$

Resolución:

$C = \left(\dfrac{1}{\tan x}\right)\left(\dfrac{1}{\tan 4x}\right) + \left(\dfrac{1}{\tan 2x}\right)\left(\dfrac{1}{\tan 3x}\right)$

$C = \dfrac{(\tan 2x)(\tan 3x) + (\tan x)(\tan 4x)}{(\tan x)(\tan 2x)(\tan 3x)(\tan 4x)}$

Multiplicando B y C, y simplificando:

$(B)(C) = \tan 5x(\tan 2x)(\tan 3x) + (\tan x)(\tan 4x)$

Sumando la expresión A:

$A + (B)(C) = \tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x + \tan 5x + \tan 2x\tan 3x\tan 5x + \tan x\tan 4x\tan 5x$

Ordenando:

$A + (B)(C) = (\tan x + \tan 4x + \tan x + \tan 4x\tan 5x) + (\tan 2x + \tan 3x + \tan 2x\tan 3x\tan 5x) + \tan 5x$

Usando la fórmula especial de tangentes, dos veces, se tiene:

$A + (B)(C) = (\tan 5x) + (\tan 5x) + \tan 5x$

$\therefore A + (B)(C) = 3\tan 5x$

43. Calcular: $\tan(2x + 3y)$
Si: $\tan 2(x + 9°) = 5 \wedge \tan 3(y + 9°) = 2$

Resolución:

Notar que:

$2(x + 9°) + 3(y + 9°) = (2x + 3y) + 45°$

$\Rightarrow \tan[2(x + 9°) + 3(y + 9°)] - \tan[(2x + 3y) + 45°]$

Efectuando:

$$\frac{\tan 2x(x + 9°) + \tan 3(y + 9°)}{1 - \tan 2(x + 9°)\tan 3(y + 9°)} = \frac{\tan(2x + 3y) + 1}{1 - 1[\tan(2x + 3y)]}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{5 + 2}{1 - 5 \times 2} = \frac{\tan(2x + 3y) + 1}{1 - \tan(2x + 3y)}$$

De donde: $\tan(2x + 3y) = -8$

44. En un $\triangle ABC$, si $\tan(A + B) = 4$ y $\tan(A - B) = 2$, calcule $\tan 2C$.

Resolución:

I. Dato: $A + B + C = 180°$
$A + B = 180° - C$

II. $\tan(A + B) = 4$
$\tan(180° - C) = 4 \Rightarrow \tan C = -4$

III. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \Rightarrow \tan 2C = \dfrac{2\tan C}{1 - \tan^2 C}$

Reemplazando: $\tan C = -4$

$\tan 2C = \dfrac{2(-4)}{1 - (-4)^2} = \dfrac{8}{15}$

45. Si se cumple que: $\dfrac{(\sec^2\alpha)(\tan^2\alpha)}{\sec^4\alpha + \tan^4\alpha} = \dfrac{(A)(B)}{2A + C^2}$

$\alpha \neq (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, calcule: $A + B + C$

Resolución:

$\sec^4 x + \tan^4 x = 1 + 2\tan^2 x\sec^2 x$

En la igualdad:

$$\frac{\sec^2\alpha\tan^2\alpha}{1 + 2\sec^2\alpha\tan^2\alpha} = \frac{AB}{2A + C^2}$$

$$\frac{\dfrac{\sec^2\alpha\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha\tan^2\alpha}}{\dfrac{1+2\sec^2\alpha\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha\tan^2\alpha}} = \frac{AB}{2A+C^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha\cot^2\alpha+2} = \frac{AB}{2A+C^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha(1)}{2\operatorname{sen}^2\alpha+(\cos^2\alpha)^2} = \frac{AB}{2A+C^2}$$

$\Rightarrow A = \operatorname{sen}^2\alpha;\quad B = 1;\quad C = \cos^2\alpha$

$\therefore A + B + C = 2$

46. Si $2\operatorname{sen}^6\beta - 3\operatorname{sen}^4\beta + 4\operatorname{sen}^2\beta = M$;
halle: $H = 4\cos^2\beta + 2\cos^6\beta - 3\cos^4\beta$

Resolución:

$\operatorname{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\operatorname{sen}^2x\cos^2x$
$\operatorname{sen}^6x + \cos^6x = 1 - 3\operatorname{sen}^2x\cos^2x$

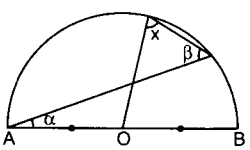
$M = 2\operatorname{sen}^6\beta - 3\operatorname{sen}^4\beta + 4\operatorname{sen}^2\beta \quad ...(1)$
$H = 2\cos^6\beta - 3\cos^4\beta + 4\cos^2\beta \quad ...(2)$

(1) + (2)

$H + M = 2(\operatorname{sen}^6\beta + \cos^6\beta) - 3(\operatorname{sen}^4\beta + \cos^4\beta) + 4(\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta)$

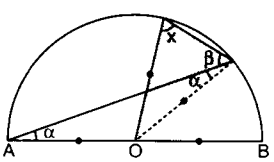
$H + M = 2(1 - 3\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta) - 3(1 - 2\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta) + 4(1)$
$H + M = 3 \Rightarrow H = 3 - M$

47. Del gráfico, calcular tanx, si $\tan\alpha = 2/3$ y $\tan\beta = 3/5$.
$\overline{AB}$: diámetro.



Resolución:

Dato: $\tan\alpha = \dfrac{2}{3} \wedge \tan\beta = \dfrac{3}{5}$



Del gráfico: $x = \alpha + \beta$

$$\tan x = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\therefore \tan x = \frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}} = \frac{19}{9}$$

48. Reducir:

$$T = \frac{\tan x + \tan 2x + 2(\tan x)(\tan 2x)(\tan 3x)}{\tan 3x - \tan 2x}$$

Resolución:

Se sabe:
$\tan a + \tan b + (\tan a)(\tan b)[\tan(a+b)] = \tan(a+b)$

Luego:

$$T = \frac{\tan x + \tan 2x + \tan x\tan 2x\tan 3x + \tan x\tan 2x\tan 3x}{\tan 3x - \tan 2x}$$

Y por la fórmula se tiene que:
$\tan x + \tan 2x + (\tan x)(\tan 2x)(\tan 3x) = \tan 3x$

Reemplazamos en P:

$$T = \frac{\tan 3x + \tan x\tan 2x\tan 3x}{\tan 3x - \tan 2x}$$

$$T = \frac{\tan 3x(1 + \tan x\tan 2x)}{\tan 3x - \tan 2x}$$

$$T = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x}{\cos x\cos 2x}\right)}{\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x} - \dfrac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}$$

$$T = \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}\right)\left[\dfrac{\cos(2x-x)}{\cos x\cos 2x}\right]}{\dfrac{\operatorname{sen}(3x-2x)}{\cos 3x\cos 2x}} = \frac{\operatorname{sen}3x\left(\dfrac{\cos x}{\cos x}\right)}{\operatorname{sen}x}$$

$$\therefore T = \frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}$$

49. Calcular: $T = \tan x\tan y\tan^2\theta$
Si: $\operatorname{sen}(x+y) = \csc\theta\cos x\cos y$
$\operatorname{sen}(x-y) = \cos x\cos y$

Resolución:

Dato: $\dfrac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y} = \csc\theta$

Separando en dos fracciones y reduciendo:
$\tan x + \tan y = \csc\theta \quad ...(1)$

Dato: $\dfrac{\operatorname{sen}x\cos y - \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y} - \dfrac{\operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y} = 1$

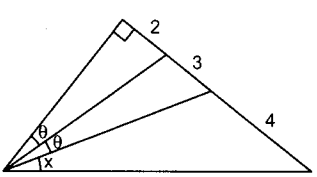
$\Rightarrow \tan x - \tan y = 1 \quad ...(2)$

$(1) + (2) \Rightarrow 2\tan x = \csc\theta + 1$
$(1) - (2) \Rightarrow 2\tan y = \csc\theta - 1$

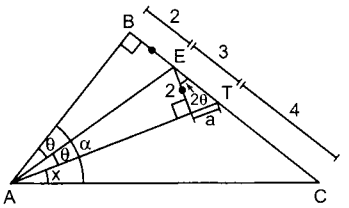
Multiplicando: $4\tan x\tan y = \csc^2\theta - 1$
$\Rightarrow T = 4\tan x\tan y = \cot^2\theta$

$\therefore T = \tan x\tan y\tan^2\theta = \dfrac{1}{4}$

50. Calcular: tanx



Resolución:



Por Pitágoras: $a = \sqrt{5}$
Luego: $\tan 2\theta = \sqrt{5}/2$

$\triangle ABT$: $AB = 5\cot 2\theta = 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{9}{2\sqrt{5}}$

$x = \theta - 2\alpha \Rightarrow \tan x = \tan(\alpha - 2\theta)$

$$\tan x = \frac{\tan\alpha - \tan 2\theta}{1 + \tan\alpha\tan 2\theta} = \frac{\frac{9}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 + \frac{9}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\tan x = \frac{8\sqrt{5}}{65}$$

51. Si: $\tan x + \tan y + \tan x\tan y = \tan 55°$

Reducir: $P = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \cos(x-y)}$

Resolución:

$$P = \frac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x - \cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x + \cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}$$

Dividiendo al numerador y denominador entre cosxcosy

$$P = \frac{\frac{\operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y} + \frac{\operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y} - \frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} + \frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}}{\frac{\operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y} + \frac{\operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y} + \frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} + \frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}}$$

$$P = \frac{\tan x + \tan y - 1 + \tan x\tan y}{\tan x + \tan y + 1 + \tan x\tan y}$$

Por dato: $\tan x + \tan y + \tan x\tan y = \tan 55°$

Luego: $P = \dfrac{\tan 55° - 1}{1 + \tan 55°} = \dfrac{\tan 55° - \tan 45°}{1 + \tan 55°\tan 45°}$

$P = \tan(55° - 45°) \quad \therefore P = \tan 10°$

52. Hallar una expresión equivalente de:

$N = \tan x + \tan y + \tan z - \tan x\tan y\tan z$

Sabiendo que: $\tan z = \cos x\cos y$

Resolución:

$$N = \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\right) + \tan z\left[1 - \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}y}{\cot y}\right)\right]$$

Efectuando dentro de los paréntesis:

$$N = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y} + \frac{\operatorname{sen}z}{\cos z}\left[\frac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y}\right]$$

$$N = \frac{\operatorname{sen}(x+y)\cos z + \operatorname{sen}z\cos(x+y)}{\cos x\cos y\cos z}$$

$$N = \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}$$

Pero por dato: $\cos x\cos y = \dfrac{\operatorname{sen}z}{\cos z}$

$\Rightarrow \cos x\cos y\cos z = \operatorname{sen}z$

$\Rightarrow N = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{\operatorname{sen}z}$

53. Calcular F(7), si: $F(x) = x\operatorname{sen}x° + \cos x°$

Resolución:

$F(7) = 7\operatorname{sen}7° + \cos 7°$, y por propiedad:

Nota

Expresiones de la forma: $a\operatorname{sen}\alpha \pm b\cos\alpha$
Se puede transformar en: $n\operatorname{sen}(\alpha \pm \theta)$
Donde: $n = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge \tan\theta = \frac{b}{a}$

Luego: $F(7) = n\operatorname{sen}(7° + \theta)$

$n = \sqrt{7^2 + 1} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \tan\theta = 1/7 \Rightarrow \theta = 8°$

$\Rightarrow F(7) = 5\sqrt{2}\operatorname{sen}(7° + 8°)$

$F(7) = 5\sqrt{2}\operatorname{sen}15° = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$

$F(7) = 2{,}5(\sqrt{3} - 1)$

54. Si: $(1 - \tan x\tan y) = 4\cos(x - y)$
$(1 + \tan x\tan y) = 9\cos(x + y)$

Hallar: $\cos(x - y)$; si: $x + y \wedge x - y$, son agudos:

Resolución:

a senos y cosenos, en los datos:

$1 - \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\right) = 4\cos(x - y)$

$1 + \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}\right) = 9\cos(x + y)$

Dando común denominador:

$\cos(x + y) = 4\cos x\cos y\cos(x - y)$ ...(1)

$\cos(x - y) = 9\cos x\cos y\cos(x + y)$ ...(2)

Multiplicando (1) y (2) y luego de simplificar se tiene:
$1 = 36\cos^2 x\cos^2 y \Rightarrow \cos x\cos y = 1/6$

Dividiendo (1) entre (2) y simplificando:

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{4\cot(x-y)}{9\cos(x+y)}$$

$$\frac{\cos^2(x+y)}{\cos^2(x-y)} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} + 1 = \frac{2}{3} + 1$$

$$\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{5}{3}$$

Reemplazando fórmulas en el numerador.

Simplificando: $2\cos x\cos y = \frac{5}{3}\cos(x - y)$

$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{3}\cos(x - y) \Rightarrow \cos(x - y) = 0{,}2$

55. Reducir: $P = \dfrac{\cos\left(x - y + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,\text{sen}\cos y}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}$

Resolución:

$$P = \frac{\cos\left[x + \left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right] + \sqrt{2}\,\text{sen}x\cos y}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}$$

$$P = \frac{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \text{sen}x\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) + \sqrt{2}\,\text{sen}x\cos y}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}$$

$$P = \frac{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)} + \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}x\cos y - \text{sen}x\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}$$

Como: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$

Luego:

$$P = \cos x + \frac{\frac{2}{2} \times \sqrt{2}\,\text{sen}x\cos y - \text{sen}x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}$$

$$P = \cos x + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}x(2\cos y - \cos y + \text{sen}y)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y}$$

$$\therefore\ P = \cos x + \frac{\text{sen}x(\cos y + \text{sen}y)}{\cos y + \text{sen}y} = \cos x + \text{sen}x$$

56. Sea $x + y = 90°$, calcular $P\cot(x - y)$
si: $P = \tan x - \tan y + \tan x\tan y\tan(x - y)$

Resolución:

$$P = \tan x - \tan y + \tan x\tan y\left(\frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}\right)$$

Factorizando: $\tan x - \tan y$

$$P = (\tan x - \tan y)\left(1 + \frac{\tan x\tan y}{1 + \tan x\tan y}\right)$$

Efectuando en el segundo paréntesis:

$$P = \left(\frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}\right)(1 + 2\tan x\tan y)$$

$P = [\tan(x - y)](1 + 2\tan x\tan y)$

Como: $x + y = 90° \Rightarrow \tan x = \cot y$

Donde: $\tan x\tan y = 1$

Luego: $P = [\tan(x - y)](1 + 2)$

$\Rightarrow P = 3\tan(x - y) \Rightarrow P\cot(x - y) = 3$

57. Siendo α y β ángulos positivos del IC, que cumplen:

$\tan\alpha = \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen}x}$; $\tan\beta = \dfrac{1 + \text{sen}x}{\cos x}$

Hallar: $\alpha + \beta$

Resolución:

Como: $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - (\tan\alpha)(\tan\beta)}$

$$= \frac{\frac{1 + \cos x}{\text{sen}x} + \frac{1 + \text{sen}x}{\cos x}}{1 - \left(\frac{1 + \cos x}{\text{sen}x}\right)\left(\frac{1 + \text{sen}x}{\cos x}\right)}$$

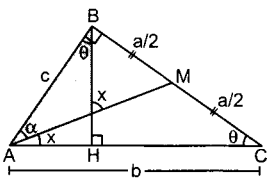
$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \text{sen}x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}x\cos x - 1 - \text{sen}x - \cos x - \text{sen}x\cos x}$$

$$= \frac{\text{sen}x + \cos x + 1}{-(\text{sen}x + \cos x + 1)}$$

$\tan(\alpha + \beta) = -1 \Rightarrow \alpha + \beta = 135°$

58. En un triángulo rectángulo ABC ($m\angle B = 90°$). Se traza la mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BH}$, formando el ángulo agudo "x". Hallar tanx en función de los lados del triángulo ABC.

Resolución:



$\triangle ABM$: $\tan\alpha = \dfrac{a}{2c}$

$\triangle ABC$: $\tan\theta = \dfrac{c}{a}$

Como: $x = \alpha + \theta$

$\tan x = \tan(\alpha + \theta)$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - (\tan\alpha)(\tan\theta)}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\frac{a}{2c} + \frac{c}{a}}{1 - \left(\frac{a}{2c}\right)\left(\frac{c}{a}\right)} \qquad \therefore\ \tan x = \frac{b^2 + c^2}{ac}$$

59. Sea: $\text{sen}(2a + b) + \cos(a + 2b) = k\cos(a + b)$

Calcular: $T = \dfrac{k - \text{sen}a - \cos b}{\cos a - \text{sen}b}$

Resolución:

Como:

$\text{sen}[(a + b) + a] + \cos[(a + b) + b] = k\cos(a + b)$

$\text{sen}(a+b)\cos a + \cos(a+b)\text{sen}a + \cos(a+b)\cos b - \text{sen}(a+b)\text{sen}b = k\cos(a+b)$

$\Rightarrow \text{sen}(a + b)(\cos a - \text{sen}b) = \cos(a + b)(k - \text{sen}a - \cos b)$

$$\therefore\ T = \frac{k - \text{sen}a - \cos b}{\cos a - \text{sen}b} = \tan(a + b)$$

60. Si: $\dfrac{\tan(\alpha + \beta) - 3}{1 + 3\tan(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan(\alpha - \beta) - 2}{1 + 2\tan(\alpha - \beta)}$

Calcular: $\tan 2\beta$

Resolución:

Hacemos: $\tan\alpha = 3$; $\tan y = 2$

Reemplazando:

$$\frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan x}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan x} = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan y}{1 + \tan(\alpha - \beta)\tan y}$$

$\tan[(\alpha + \beta) - x] = \tan[(\alpha - \beta) - y]$

$\alpha + \beta - x = \alpha - \beta - y$

$2\beta = x - y$

$$\tan 2\beta = \tan(x - y) \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

$\therefore\ \tan 2\beta = \dfrac{3-2}{1+3\times 2} = \dfrac{1}{7}$

61. Hallar: $P = \cot(\alpha+\beta)$, si: $\tan\alpha = \dfrac{7-\tan\beta}{1+7\tan\beta}$

Resolución:

De la condición: $\tan\alpha = \dfrac{7-\tan\beta}{1+7\tan\beta}$

$\Rightarrow\ \tan\alpha + 7\tan\alpha\tan\beta = 7 - \tan\beta$

$\Rightarrow\ \tan\alpha + \tan\beta = 7(1 - \tan\alpha\tan\beta)$

$\Rightarrow\ \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = 7 \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 7$

$\therefore\ \cot(\alpha+\beta) = 1/7$

62. Siendo: $3\text{sen}x\text{sen}\theta + 5\cos x\cos\theta = 0$

Encontrar el valor de la siguiente expresión:

$Q = \dfrac{\cos(x-\theta)}{\cos(x+\theta)}$

Resolución:

Condición: $3\text{sen}x\text{sen}\theta + 5\cos x\cos\theta = 0$

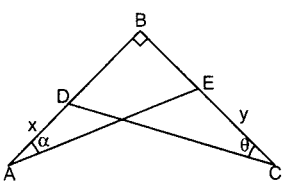
$\Rightarrow\ \dfrac{\cos x\cos\theta}{\text{sen}x\text{sen}\theta} = \dfrac{-3}{5}$

Aplicando proporciones:

$\Rightarrow\ \dfrac{\cos x\cos\theta + \text{sen}x\text{sen}\theta}{\cos x\cos\theta - \text{sen}x\text{sen}\theta} = \dfrac{-3+5}{-3-5}$

$\therefore\ Q = \dfrac{\cos(x-\theta)}{\cos(x+\theta)} = -\dfrac{1}{4}$

63. En la figura mostrada AD = x; EC= y; AB = BC



Determinar: $T = \dfrac{\text{sen}(\alpha-\theta)}{2\cos\alpha\cos\theta - \text{sen}(\alpha+\theta)}$

Resolución:

Desarrollando:

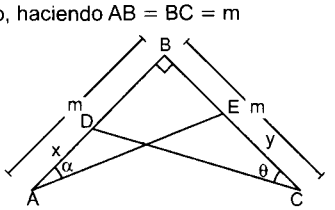
$T = \dfrac{\text{sen}\alpha\cos\theta - \cos\alpha\text{sen}\theta}{2\cos\alpha\cos\theta - (\text{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\text{sen}\theta)}$

Simplificando y dividiendo entre $\cos\alpha\cos\theta$

$T = \dfrac{\tan\alpha - \tan\theta}{2-(\tan\alpha+\tan\theta)}$ ...(1)

Hallando: $\tan\alpha \wedge \tan\theta$

Del dato, haciendo AB = BC = m



Del gráfico: $\tan\alpha = \dfrac{m-y}{m} \wedge \tan\theta = \dfrac{m-x}{m}$

Reemplazando en (1): $T = \dfrac{x-y}{x+y}$

64. En un triángulo ABC, calcular:

$T = \dfrac{\cos A}{\text{sen}B\text{sen}C} + \dfrac{\cos B}{\text{sen}A\text{sen}C} + \dfrac{\cos C}{\text{sen}A\text{sen}B}$

Resolución:

Como: $A + B + C = 180°$

$\cos A = -\cos(B+C)$

$\cos B = -\cos(A+C)$

$\cos C = -\cos(A+B)$

Luego:

$T = -\left[\dfrac{\cos(B+C)}{\text{sen}B\text{sen}C} + \dfrac{\cos(A+C)}{\text{sen}A\text{sen}C} + \dfrac{\cos(A+B)}{\text{sen}A\text{sen}B}\right]$

$\dfrac{\cos(B+C)}{\text{sen}B\text{sen}C} = \dfrac{\cos B\cos C}{\text{sen}B\text{sen}C} - \dfrac{\text{sen}B\text{sen}C}{\text{sen}B\text{sen}C}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\cos(B+C)}{\text{sen}B\text{sen}C} = \cot B\cot C - 1$

Por analogía: $\dfrac{\cos(A+C)}{\text{sen}A\text{sen}C} = \cot A\cot C - 1$

$\Rightarrow\ \dfrac{\cos(A+B)}{\text{sen}A\text{sen}B} = \cot A\cot B - 1$

$\Rightarrow\ T = -(\underbrace{\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot A\cot C}_{1} - 3)$

$\therefore\ T = 2$

65. Sabiendo que: $3\text{sen}\alpha = 2\text{sen}(\alpha+2\theta)$.

Hallar el valor de: $R = \dfrac{\tan(\alpha+\theta)}{\tan\theta}$

Resolución:

Haciendo: $3\text{sen}(\alpha+\theta-\theta) = 2\text{sen}(\alpha+\theta+\theta)$

Desarrollando por compuestos:

$3\text{sen}(\alpha+\theta)\cos\theta - 3\cos(\alpha+\theta)\text{sen}\theta =$
$2\text{sen}(\alpha+\theta)\cos\theta + 2\cos(\alpha+\theta)\text{sen}\theta$

$\Rightarrow\ \text{sen}(\alpha+\theta)\cos\theta = 5\cos(\alpha+\theta)\text{sen}\theta$

$\dfrac{\text{sen}(\alpha+\theta)\cos\theta}{\cos(\alpha+\theta)\text{sen}\theta} = 5$

$\Rightarrow\ \dfrac{\tan(\alpha+\theta)}{\tan\theta} = 5 \quad \therefore\ R = 5$

66. Reducir: $A = \dfrac{\text{vers}(\alpha-\theta) - \text{cov}(\alpha+\theta)}{\text{vers}(\alpha+\theta) - \text{cov}(\alpha-\theta)}$

Resolución:

$A = \dfrac{1-\cos(\alpha-\beta) - [1-\text{sen}(\alpha+\theta)]}{1-\cos(\alpha+\theta) - [1-\text{sen}(\alpha-\theta)]}$

$A = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\theta) - \cos(\alpha-\theta)}{\text{sen}(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)}$

Desarrollando y factorizando:

$A = \dfrac{(\cos\theta - \text{sen}\theta)(\text{sen}\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\theta + \text{sen}\theta)(\text{sen}\alpha - \cos\alpha)}$

$$A = \frac{\cos\theta - \text{sen}\theta}{\cos\theta + \text{sen}\theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\theta}$$

$$A = \frac{\text{sen}45°\cos\theta - \cos 45°\text{sen}\theta}{\cos 45°\cos\theta + \text{sen}45°\text{sen}\theta} = \frac{\text{sen}(45° - \theta)}{\cos(45° - \theta)}$$

$\therefore A = \tan(45° - \theta)$

67. En un triángulo ABC, reducir:
$T = (\cot A + \cot B)(\cot A + \cot C)(\cot B + \cot C)$
Si: $(\csc A)(\csc B)(\csc C) = m$

Resolución:

Como: $A + B + C = 180°$

$$\Rightarrow T = \left[\frac{\text{sen}(A+B)}{\text{sen}A\text{sen}B}\right]\left[\frac{\text{sen}(A+C)}{\text{sen}A\text{sen}C}\right]\left[\frac{\text{sen}(B+C)}{\text{sen}B\text{sen}C}\right]$$

Luego:

$$T = \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A\text{sen}B}\right)\left(\frac{\text{sen}B}{\text{sen}A\text{sen}C}\right)\left(\frac{\text{sen}A}{\text{sen}B\text{sen}C}\right)$$

$$T = \left(\frac{1}{\text{sen}A}\right)\left(\frac{1}{\text{sen}B}\right)\left(\frac{1}{\text{sen}C}\right)$$

$T = (\csc A)(\csc B)(\csc C) \quad \therefore T = m$

68. Si: $\cos(a - b) = \text{sen}(x + b)\text{sen}(x + a)$
Calcular: $E = \cos(x + a)\cos(x + b)$

Resolución:

Haciendo:

$$\cos[\overbrace{(x+a)-(x+b)}^{a-b}] = \text{sen}(x+b)\text{sen}(x+a)$$

Desarrollando:

$\Rightarrow \cos(x + a)\cos(x + b) + \text{sen}(x + a)\text{sen}(x + b) = \text{sen}(x + b)\text{sen}(x + a)$

$\Rightarrow \cos(x + a)\cos(x + b) = 0 \Rightarrow E = 0$

$\therefore E = 0$

69. Si: $\cos(\alpha - \beta)\cos\theta = \cos(\alpha + \beta - \theta)$

hallar: $M = \dfrac{\cot\theta - \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\alpha}$

Resolución:

$\cos(\alpha - \beta)\cos\theta = \cos[(\alpha + \beta) - \theta]$

$\cos(\alpha - \beta)\cos\theta = \cos(\alpha + \beta)\cos\theta + \text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}\theta$

$\cos\theta[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}\theta$

$(\cos\theta)(2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta) = \text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}\theta$

$$2\cot\theta = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha\text{sen}\beta} = \frac{\text{sen}\alpha\cos\beta}{\text{sen}\alpha\text{sen}\beta} + \frac{\cos\alpha\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha\text{sen}\beta}$$

$\cot\theta + \cot\theta = \cot\beta + \cot\alpha$

$\cot\theta - \cot\beta = \cot\alpha - \cot\theta$

$$\therefore \frac{\cot\theta - \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\theta} = 1$$

70. En un triángulo ABC, se cumple:
$\text{sen}A = n(\text{sen}B)(\text{sen}C) \quad ...(1)$
$\cos A = n(\cos B)(\cos C) \quad ...(2)$
Hallar: $P = \tan A + \tan B + \tan C$

Resolución:

Dividiendo (1) y (2): $\tan A = (\tan B)(\tan C)$

Pero: $P = (\tan A)(\tan B)(\tan C) \Rightarrow P = \tan^2 A$

(2) – (1):

$\cos A - \text{sen}A = n(\cos B\cos C - \text{sen}B\text{sen}C)$

$$\cos A - \text{sen}A = n\underbrace{\cos(B+C)}_{-\cos A}$$

$\cos A - \text{sen}A = -n\cos A \Rightarrow 1 - \tan A = -n$

$\tan A = n + 1 \Rightarrow \tan^2 A = (n + 1)^2 = P$

$\therefore P = (n + 1)^2$

71. Si: $\tan\alpha = \dfrac{8\text{sen}\beta + 7\text{sen}\theta}{7\cos\theta - 8\cos\beta}$

calcular: $P = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha-\theta)}$

Resolución:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{8\text{sen}\beta + 7\text{sen}\theta}{7\cos\theta - 8\cos\beta}$$

$\Rightarrow 7\text{sen}\alpha\cos\theta - 8\text{sen}\alpha\cos\beta = 8\text{sen}\beta\cos\alpha + 7\text{sen}\theta\cos\alpha$

$\Rightarrow 7(\text{sen}\alpha\cos\theta - \text{sen}\theta\cos\alpha) = 8(\text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha)$

$\Rightarrow 7\text{sen}(\alpha - \theta) = 8\text{sen}(\alpha + \beta)$

$$\therefore \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha-\theta)} = \frac{7}{8} \Rightarrow P = \frac{7}{8}$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

En un triángulo acutángulo ABC. Calcule el valor de:

$$E = \frac{\cos(A-B)}{\text{sen}A\text{sen}B} + \frac{\cos(B-C)}{\text{sen}B\text{sen}C} + \frac{\cos(A-C)}{\text{sen}A\text{sen}C}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Resolución:

Sabemos: $\dfrac{\cos(x-y)}{\text{sen}x\text{sen}y} = 1 + (\cot x)(\cot y) \quad ...(1)$

$$E = \frac{\cos(A-B)}{\text{sen}A\text{sen}B} + \frac{\cos(B-C)}{\text{sen}B\text{sen}C} + \frac{\cos(A-B)}{\text{sen}A\text{sen}C}$$

Usando (1)

$E = 1 + \cot A\cot B + 1 + \cot B\cot C + 1 + \cot A\cot C$

Como: $A + B + C = 180°$

$\Rightarrow \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot A\cot C = 1$

Reemplazando: $E = 4$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Si $\tan\left(\frac{4x}{7}\right) = a$ y $\tan\left(\frac{3x}{7}\right) = b$, entonces al simplificar:

$E = (1 - a^2b^2)\tan(x)\tan\left(\frac{x}{7}\right)$; se obtiene:

A) $a - b$ B) $a^2 - b^2$ C) $a + b$
D) ab E) a/b

Resolución:

Datos: $\tan\left(\frac{4x}{7}\right) = a \wedge \tan\left(\frac{3x}{7}\right) = b$

Piden: $E = (1 - a^2b^2)\tan(x)\tan\left(\frac{x}{7}\right)$

Desdoblando:

$$E = (1 - a^2b^2)\tan\left(\frac{4x}{7} + \frac{3x}{7}\right)\tan\left(\frac{4x}{7} - \frac{3x}{7}\right)$$

$$E = (1 - a^2b^2)\left[\frac{\tan^2\left(\frac{4x}{7}\right) - \tan^2\left(\frac{3x}{7}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{4x}{7}\right)\tan^2\left(\frac{3x}{7}\right)}\right]$$

$$E = (1 - a^2b^2)\left(\frac{a^2 - b^2}{1 - a^2b^2}\right) \quad \therefore E = a^2 - b^2$$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Si $\tan[x(k + y)] = a \wedge \tan[x(k - y)] = b$, entonces, $\tan(2kx) + \tan(2yx)$ es igual a:

A) $\frac{a^2 - b^2}{1 + a^2b^2}$ B) $\frac{a^2 - b^2}{1 - a^2b^2}$ C) $\frac{a^2 + b^2}{1 - a^2b^2}$

D) $\frac{2a(1 + b^2)}{1 + a^2b^2}$ E) $\frac{2a(1 + b^2)}{1 - a^2b^2}$

Resolución:

Dato: $\tan(\underbrace{xk + xy}_{\theta}) = a \Rightarrow \tan\theta = a$

$\tan(\underbrace{xk - xy}_{\theta}) = b \Rightarrow \tan\phi = b$

Notamos: $\theta + \phi = 2xk \wedge \theta - \phi = 2xy$

Piden: $\tan(2xk) + \tan(2xy)$

Reemplazando: $\tan(\theta + \phi) + \tan(\theta + \phi)$

Utilizando la identidad: $\frac{a + b}{1 - ab} + \frac{a - b}{1 + ab}$

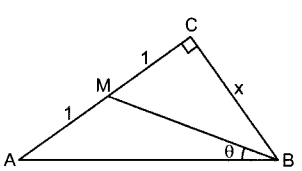
Operando: $\frac{2a + 2ab^2}{1 - a^2b^2}$

$\therefore \tan(2xk) + \tan(2xy) = \frac{2a(1 + b^2)}{1 - a^2b^2}$

Clave: E

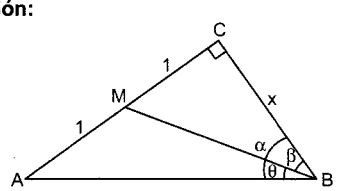
PROBLEMA 4 (UNI 2014 - II)

Calcule el valor de "x" para que el ángulo θ sea máximo.



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

Resolución:



θ es máximo $\Rightarrow \tan\theta$ es máximo

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + (\tan\alpha)(\tan\beta)}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{x + \frac{2}{x}}$$

$x + \frac{2}{x}$ debe ser mínimo

$(x)\left(\frac{2}{x}\right)$ es constante $\Rightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)$ es mínimo si:

$\Rightarrow x = \frac{2}{x} \quad \therefore x = \sqrt{2}$

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

Al simplificar la expresión:

$$k = \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right][1 - \text{sen}(2x)]$$

Se obtiene:

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(2x)$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}^2(2x)$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sec(2x)$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}\csc(x)$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

Recordemos:

$\text{sen}(A + B)\text{sen}(A - B) = \cos^2B - \cos^2A$

Aplicando:

$$K = \left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\text{sen}(-2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right](1 - \text{sen}2x)$$

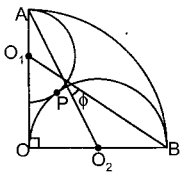
$$K = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right](1 - \text{sen}2x)$$

$$K = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \text{sen}2x)(1 - \text{sen}2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 2x$$

Clave: A

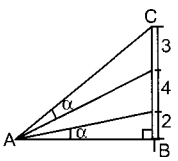
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si las semicircunferencias de centros O_1 y O_2 son tangentes en P, calcular: $\tan\phi$



A) 4/7
B) 6/17
C) 2/3
D) 1/3
E) 2

2. En la figura adjunta, hallar la longitud del segmento AB.

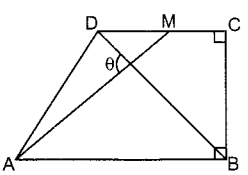


A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$
E) $6\sqrt{3}$

3. En la identidad trigonométrica:
$2\text{sen}x + 3\cos x = k\cos(x - \alpha)$. Determinar: $\tan\alpha$

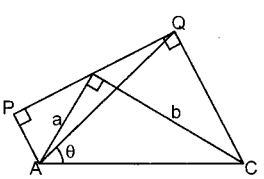
A) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{\sqrt{13}}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

4. En la siguiente figura: $\frac{MC}{3} = \frac{CB}{4} = \frac{AB}{8}$ y MC = MD calcular: $\tan\theta$



A) 21/4
B) 22/7
C) 8/3
D) 24/5
E) 17/9

5. Si en el gráfico PQ es máximo, hallar: $\tan\theta$



A) $\frac{ab}{a^2+b^2}$
B) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$
C) $\frac{a^2+b^2}{ab}$
D) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$
E) $\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}$

6. Si: $\tan(x + 3y) = 5$ y $\tan(2y + x) = 4$, hallar coty

A) 20 B) 21 C) 18
D) 14 E) 15

7. Si: $\tan(2a + b) = 8 \wedge \tan(a + 2b) = 2$, hallar: $\tan(a - b)$

A) 12/17 B) 4/17 C) 6
D) 6/17 E) 10

8. Reducir:
$T = (\text{sen}^2 20° - \text{sen}^2 10°)^2 - (\text{sen}^2 50° - \text{sen}^2 20°)^2$

A) $-\frac{1}{4}\text{sen}80°$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}\text{sen}80°$
C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10°$ D) $\frac{1}{4}\cos 10°$
E) $-\frac{\sqrt{3}}{8}\text{sen}100°$

9. Si: $\alpha + \beta + \theta + \phi = \pi$, calcular:

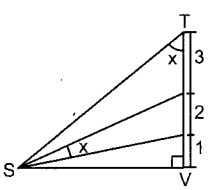
$$S = \frac{\text{sen}\alpha\text{sen}\beta + \text{sen}\theta\text{sen}\phi}{\cos\alpha\cos\beta + \cos\theta\cos\phi} + \frac{\text{sen}\beta\text{sen}\theta + \text{sen}\phi\text{sen}\alpha}{\cos\beta\cos\theta + \cos\phi\cos\alpha}$$

A) 1 B) 2 C) −1
D) −2 E) 0

10. Si: $\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\beta \wedge \cos\beta = 3\cos\alpha$.
hallar el valor de: $\cos(\alpha - \beta)$

A) $-\frac{5}{7}$ B) $-\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

11. En la figura mostrada, calcular: tanx



A) 1/2 B) 2 C) 3/2
D) 5/2 E) 1/6

12. Simplificar la siguiente expresión:

$$S = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{\pi}{12}}{\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}$$

A) $\text{sen}\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)$ B) $\cos(3x + \pi)$ C) $\cos\left(\frac{3x+\pi}{12}\right)$
D) $\cos\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)$ E) $\cos\left(\frac{6x+\pi}{18}\right)$

13. Si: $\beta - \alpha = 60°$, hallar el valor de la expresión:
$A = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha)^2$

A) 2 B) 3/4 C) 1 D) 0 E) 1/2

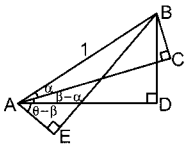
14. Si: $x + y + z = 90°$, además:
$\csc^2 x\csc^2 y\csc^2 z - \csc^2 x\csc^2 y - \csc^2 y\csc^2 z - \csc^2 z\csc^2 x = k\csc x\csc y\csc z$
Hallar el valor de "k".

A) 1 B) 2 C) −2 D) −1 E) 3

15. Si en el gráfico: $\alpha + \beta + \theta = \pi$

calcular: $S = (AC)^2 + (AD)^2 + (AE)^2 + 2(AC)(AD)(AE)$

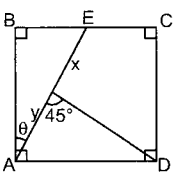
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



16. Si en el cuadrado ABCD, se verifica que:

$$\frac{x}{y} = \frac{n\sec 2\theta \sec(45° - \theta)}{\cos\theta} + m$$

calcular: $R = m^2 + n^2$



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

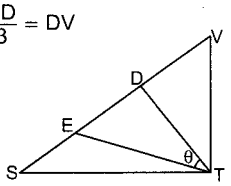
17. Señalar la extensión de:

$$V = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x^2+2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{x^2+2}\right) + 2\cos\left[\frac{\pi(x^2+5)}{3x^2+6}\right]$$

A) $[\sqrt{3} - 1; 2]$ B) $[1 - \sqrt{3}; 2\sqrt{2}]$
C) $[1 - \sqrt{3}; \sqrt{3} + 1\rangle$ D) $[\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1]$
E) $[1 - \sqrt{3}; 2\sqrt{2}]$

18. Del gráfico, calcular el valor mínimo de: $\cot\theta$

si: $\frac{SE}{2} = \frac{ED}{3} = DV$



A) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ B) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
D) $\frac{2\sqrt{10}}{9}$ E) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

19. Si: $\alpha + \beta + \theta = 90°$, además: ($\alpha$, β y θ son agudos)

$$R = \frac{\tan\alpha + 2\tan\beta + 3\tan\theta}{\cot\alpha} + \frac{\tan\beta + 2\tan\theta + 3\tan\alpha}{\cot\beta} + \frac{\tan\theta + 2\tan\alpha + 3\tan\beta}{\cot\theta}$$

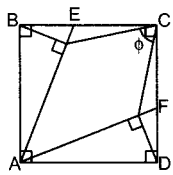
hallar el mínimo valor de R.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

20. En un cuadrilátero ABCD las diagonales se cortan perpendicularmente en P.
Si: PAB = α; PBC= β; PCD= θ y PDA = x
Cumpliéndose: $\alpha + \beta + \theta = 180°$, además:
$\cos(x + \alpha)\cos(x + \beta)\cos(x + \theta) = A\tan\alpha\tan\beta\tan\theta$
hallar: A

A) sen^3x B) $\cos^3x$ C) $-\text{sen}^3x$
D) $-\cos^3x$ E) -1

21. En el cuadrado ABCD, calcular: $\cot\phi$,
si: $EC = 5(BE) \wedge CF = 2(FD)$



A) 19/37 B) 19/121 C) 19/107
D) 17/108 E) 19/108

22. Siendo: $\alpha + \beta + \theta = \pi$, además:
$\tan\alpha + \tan\beta + 2\tan\theta = \sec^2x\tan\theta$
$\tan\beta + \tan\theta + 2\tan\alpha = \sec^2y\tan\alpha$
$\tan\theta + \tan\alpha + 2\tan\beta = \sec^2z\tan\beta$
calcular: $S = \cot^2x + \cot^2y + \cot^2z$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

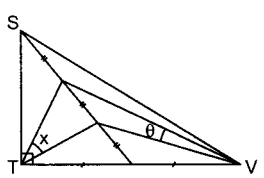
23. Siendo: $\text{sen}x = m\cos y$; $\cos x = n\text{sen}y$
señalar el equivalente de $\cos(x + y)$

A) $\frac{\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}}{n+m}$ B) $\frac{\sqrt{(1-m^2)(n^2-1)}}{n+m}$
C) $\frac{\sqrt{(1-m^2)(n^2-1)}}{n-m}$ D) $\frac{\sqrt{(1-m^2)(n^2-1)}}{n^2-m^2}$
E) $\frac{1+nm}{n+m}$

24. Del gráfico, calcular: $(x - \theta)$,

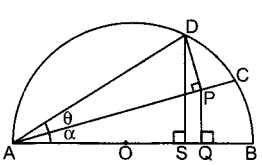
si: $R = \frac{\text{sen}(\theta - x)}{\text{sen}(\theta + x)} \wedge ST = TV$

A) 3/7
B) 5/7
C) 9/13
D) 7/17
E) 9/19



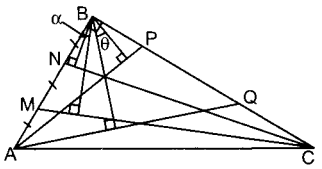
25. En la semicircunferencia mostrada, hallar:

$$S = \frac{AB(AQ + SQ)}{BC - DP} - 1$$



A) $\tan\alpha\tan\theta$ B) $\cot\alpha\cot\theta$ C) $\tan\alpha\cot\theta$
D) $\cot\alpha\tan\theta$ E) $\cot\alpha + \cot\theta$

26. Si en el gráfico, $\cot\alpha$ asume su mínimo valor, calcular: $\cot\theta$. (Dato: PQ = QC = 2BP)

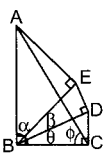


A) $\frac{11\sqrt{2}}{10}$ B) $\frac{27\sqrt{2}}{10}$ C) $\frac{77\sqrt{2}}{20}$
D) $\frac{77\sqrt{2}}{10}$ E) $\frac{11\sqrt{2}}{20}$

27. De acuerdo al gráfico, calcular:

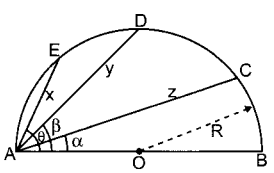
$$S = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta - \tan\phi}{\tan\alpha\tan\beta\tan\theta}$$

A) 1
B) 2
C) 1/2
D) $\tan\phi$
E) $\cot\phi$



28. Si en el gráfico mostrado: $\alpha + \beta + \theta = 180°$

calcular: $T = \frac{R(x^2 + y^2 + z^2) + xyz}{R^3}$



A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 16

29. Si: $1 - \tan x\tan y = 4\cos(x - y)$
$1 + \tan x\tan y = 9\cos(x + y)$;
$(x - y) \neq (2n + 1)\pi \quad n \in \mathbb{Z}$, hallar: $\cos(x - y)$

A) 1/5 B) 3/5 C) 1/3
D) 4/7 E) 5/13

30. Si: $\alpha + \beta + \theta = \pi$, además:
$\cos\alpha = \cos x\operatorname{sen} y$
$\cos\beta = \cos z\operatorname{sen} x$
$\cos\theta = \cos y\operatorname{sen} z$
calcular: $\tan x\tan y\tan z$

A) 1 B) −1 C) 2
D) 1/2 E) $\sqrt{2}$

31. Siendo los ángulos de un triángulo: α, θ y ϕ, para los cuales se cumple: $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \cos\phi$

hallar el valor de: $E = \frac{\tan^2\phi(\tan\theta - 1)}{2\tan\theta + \tan\phi}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32. ¿Cuál o cuáles de las proposiciones son falsas?

I. Si $\alpha > 0 \wedge b > 0 \wedge \alpha \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{b}{\operatorname{sen}^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab}$

II. $0 < \pi \Rightarrow \frac{\cot\theta}{4 - \cot\theta} > 2$

III. Si $A + B + C = \pi \Rightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1$

A) I B) II C) III
D) I y III E) I y II

33. Calcular el mayor valor de "k", tal que el valor máximo de F sea $3\sqrt{11}$

$F = \tan\left(\frac{\pi}{45}\right)\operatorname{sen} x - \sqrt{2}k\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

A) $5\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 7
D) −7 E) $4\sqrt{2}$

34. Si: $x + y + z = \pi$, además

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta + z)}{\sec(x + y)} + \frac{\operatorname{sen}(\theta - z)}{\sec(x - y)} = 0$$

determinar el valor de $\tan\theta$, tal que $\tan x$, $\tan y$, $\tan z$ son números en progresión aritmética de razón 1.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

35. En un triángulo ABC se cumple:

$\frac{1}{3}\tan A - \frac{1}{2}\tan B = \frac{1}{6}\tan\frac{\pi}{7}$ ...(I)

$\frac{1}{5}\tan B - \frac{1}{4}\tan C = \frac{1}{20}\tan\frac{2\pi}{7}$ ...(II)

$-\frac{1}{6}\tan A + \tan C = \frac{1}{6}\tan\frac{3\pi}{7}$ ...(III)

calcular: $\cot^2 A\cot^2 B\cot^2 C$

A) 1/7 B) 7 C) 49 D) 1/49 E) 14

36. Siendo A, B y C ángulos internos de un triángulo, calcular el valor de:

$$P = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 A & \cot A & 1 \\ \operatorname{sen}^2 B & \cot B & 1 \\ \operatorname{sen}^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 3

37. Siendo $x + y + z = \pi k$; (k es impar), además:
$(\cos x + \cos y\cos z)(\cos y + \cos x\cos z)(\cos z + \cos x\cos y) = \operatorname{sen}^n x\operatorname{sen}^m y\operatorname{sen}^p z$

calcular: $m + n + p$

A) 3/2 B) 3 C) 6
D) 9 E) 4

38. Calcular los valores de E, si:

$E = \sqrt{6}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

considerar: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

A) $\langle\sqrt{2}; \sqrt{6}\rangle$ B) $\langle -1; 1\rangle$
C) $\langle\sqrt{6}-\sqrt{2}; \sqrt{6}+\sqrt{2}\rangle$ D) $\langle\sqrt{6}+\sqrt{2}; 4]$
E) $\langle\sqrt{6}-\sqrt{2}; 4]$

39. Determinar el mayor valor de A y menor valor de B en la siguiente desigualdad:

$$A \leq \text{sen}(x+2) - \text{sen}x \leq B$$

A) −sen1 y sen1 B) −2sen1 y 2sen1
C) −cos1 y cos1 D) −2cos1 y 2cos1
E) sen1 y cos1

40. Hallar el equivalente de:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\tan^2 x - \tan^2 y}{1-\tan^2 x \tan^2 y}\right)\left(\frac{\tan(x-y)+\tan(x+y)}{ab(a+b)}\right)}$$

para que se cumpla: $\dfrac{\tan(x+y)}{b} = \dfrac{\tan(x-y)}{a} = c$

A) 0 B) c C) c^2
D) $c^{2/3}$ E) $c^{1/3}$

41. Dado: $\sec^2\phi - \dfrac{4-3\tan^2\theta}{4\tan^2\theta - 3} = 1$

reducir: $M = \dfrac{3+\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)}{3+\text{sen}^2\theta+\cos^2\phi}$

A) 5/6 B) 6/5 C) 4/3
D) 1/4 E) 3/4

42. Calcular el valor aproximado de:

$E = 2\tan 60° + (\sqrt{3}\tan 82° + 1)(\tan 56° - \tan 34°)$

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

43. Si: $\alpha+\beta+\theta = 0$, calcular:

$U = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\theta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta$

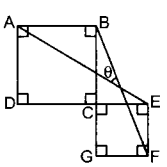
A) 0 B) 1 C) −1 D) 2 E) −2

44. Señalar la alternativa correcta, si: $x = \dfrac{\pi}{36}$,

$y = \tan(\tan x + \tan 2x + \sec 2x \tan 3x)$

A) $y > \sqrt{3}$ B) $y > 1$
C) $-\sqrt{3} < y < -1$ D) $y < -\sqrt{3}$
E) $0 < y < 1$

45. Si ABCD y CEFG son cuadrados, entonces verificar:



A) $30° < \theta < 37°$ B) $26°30' \leq \theta \leq 37°$
C) $\theta > 30°$ D) $37° \leq \theta < 45°$
E) $37° \leq \theta < 53°$

46. Sobre un pedestal de altura H, está colocada una estatua de altura "h". ¿A qué distancia del monumento se debe colocar un observador, para ver la estatura con ángulo máximo? (H > h)

A) $\sqrt{H(H-h)}$ B) $\sqrt{H(H+h)}$ C) $\sqrt{h(H+h)}$
D) $\sqrt{h(H-h)}$ E) $\sqrt{Hh}$

47. Si: $\cos^2 C\tan(A+B) = \text{sen}^2 C\cot(A-B)$; $B \in$ IIIC.

Calcule el valor de: $y = \sqrt{\tan(A+C)\tan(A-C)}$

A) cotB B) 2cotB C) 2tanB
D) tanB E) tan(B/2)

48. Sabiendo que: $\text{sen}(\alpha+\beta+\theta) = \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\,\text{sen}\theta$

hallar el valor de: $R = \cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\theta + \cot\beta\cot\theta$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

49. Dado $\alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right\rangle$, calcular los valores de $|A|$,

sabiendo que: $A = \dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{1-4\cos^2\alpha}$

A) $\left\langle\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$
D) $\left\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{1}{4}\right\rangle$

50. Señalar el valor de $\text{sen}(\alpha+\beta+\theta)$ para que se cumpla $\text{sen}(\alpha+\beta) = m\cos\theta$; $\cos(\alpha+\beta) = n\,\text{sen}\theta$

A) $\dfrac{1+mn}{m+n}$ B) $\dfrac{1-mn}{m-n}$ C) $\dfrac{1-mn}{m+n}$
D) $\dfrac{1+m+n}{mn}$ E) $\dfrac{1+mn}{mn-1}$

51. Calcule el valor de $\cos(x-y)$

sabiendo que: $\text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}z = 0$
$\cos x + \cos y + \cos z = 0$

A) 1 B) 1/2 C) 0 D) −1/2 E) 1

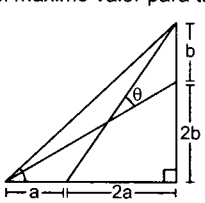
52. Si se cumple que:

$$\frac{\text{sen}(b+c)}{\text{sen}a} + \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}c} = \frac{2\text{sen}(a+c)}{\text{sen}b}$$

calcular: $K = \cot a + \cot c - 2\cot b$

A) 1 B) 2 C) −1 D) 0 E) 1/2

53. Determine el máximo valor para $\tan\theta$, en la figura:



A) 5/6 B) 5/13 C) 5/12
D) 5/7 E) 5/9

54. En un triángulo ABC: $\frac{\tan A}{2} = \frac{\tan B}{3} = \frac{\tan C}{4}$
hallar: $(\tan^2 A)(\tan B)(\tan C)$

A) 25/8 B) 13/4 C) 27/4 D) 14/4 E) 29/4

55. Dada la igualdad: $2\text{sen}(\alpha + \theta) = 3\text{sen}(\alpha - \theta)$
Calcule el valor de: $V = \cot\theta(2\tan\alpha + 3\tan\theta)$

A) 7 B) 9 C) 11
D) 13 E) 15

56. Calcule el valor de:
$T = 4\tan 40°(\tan 70° - \tan 50° - \tan 20°)$

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

57. Siendo A, B y C, los ángulos de un triángulo, en el cual se cumple que sus tangentes son tres números consecutivos y además $A > B > C$, calcular:

$$S = \frac{\tan A + \tan C}{\tan B + \tan C}$$

A) 1/3 B) 1/4 C) 3/4
D) 4/3 E) 2/5

58. Calcular:

$$T = \frac{\cos(A - B)}{\text{sen}A\text{sen}B} + \frac{\cos(B - C)}{\text{sen}B\text{sen}C} + \frac{\cos(C - A)}{\text{sen}C\text{sen}A}$$

Donde A, B y C son los ángulos internos de un triángulo ABC

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

59. Siendo $A + B + C = \pi$ y además:

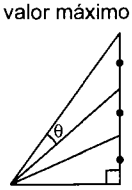
$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = 3\tan\left(\frac{B}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

Calcule el valor de: $S = 3\tan C + 4\tan B$

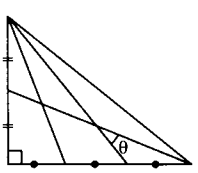
A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

60. De la figura, encontrar el valor máximo de $\tan\theta$.

A) $\sqrt{3}/3$
B) $\sqrt{3}/6$
C) $\sqrt{6}/6$
D) $\sqrt{6}/12$
E) 3/4



61. Hallar el máximo valor de $\tan\theta$.



A) 1/2 B) 3/4 C) 4/3
D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{3}/3$

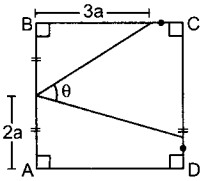
62. Simplificar:

$$R = \frac{\text{sen}80°}{\text{sen}^2 50° - \text{sen}^2 20°} - \frac{\text{sen}5°}{\text{sen}^2 72°30' - \text{sen}^2 2°30'}$$

A) $2 - 2\sqrt{3}$ B) $2 + 2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
D) 2 E) $2\sqrt{3}/3$

63. En la figura mostrada, calcule $\tan\theta$

A) 3/10
B) 5/11
C) 7/10
D) 9/7
E) 11/10



64. Determine la extensión de S + T, si se tiene que:

$$S = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\text{senx}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\text{seny}\right)$$

$$T = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\text{seny}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\text{senx}\right)$$

A) $[-1/2; 1/2]$ B) $[-1; 1]$
C) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ D) $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$
E) $[-2; 2]$

65. Simplificar la expresión:

$$S = \frac{\text{sen}5x}{\cos 3x \cos 2x} + \tan 5x \tan 3x \tan 2x$$

A) tan2x B) tan3x C) tan5x
D) tan7x E) tan8x

66. Calcule el valor de:

$S = 2\sec 20°(\sqrt{2}\cos 65° + \text{sen}20°)$

A) 1 B) 2 C) −1
D) −2 E) 1

67. Calcular:

$$\frac{\tan 50° - \tan 40°}{\tan 10°}$$

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 3/4
D) 2 E) $\sqrt{3}/3$

68. La expresión: $T = 2\text{sen}50° - \sqrt{3}\cos 70°$
equivale a:

A) sen20° B) cos20° C) tan20°
D) 2sen20° E) 2cos20°

69. Si: $\tan(a + b) = 1/2$; $\tan(c - b) = 1/3$
Calcular: $\tan(a + c)$

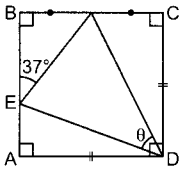
A) 1/4 B) 1/2 C) 1
D) 0 E) 1/3

70. Calcule $\tan(x - y)$, si se tiene que $\tan(x + y) = 2$; además se cumple:

$$\tan^2 x - \tan^2 y + 3\tan^2 x \tan^2 y = 3$$

A) 1 B) 2/3 C) 3/2
D) 5/3 E) 3/5

71. Del gráfico mostrado, calcule $\tan\theta$



A) 1
B) 2/3
C) 3/2
D) 3/4
E) 4/3

72. En un triángulo ABC, se tiene que:

$$2\text{sen}A = 3\text{sen}B\cos C$$

Calcule el valor de:
$S = (\tan B + \tan C)(2\cot B + \cot C)$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

73. Si se cumple que:
$\tan 3\alpha + \tan 3\beta + \tan 3\phi = \tan 3\alpha \tan 3\beta \tan 3\phi$
y $\alpha + \beta + \phi \in \langle \pi; 3\pi/2 \rangle$
calcular: $\tan(2\alpha + 2\beta + 2\phi)$

A) $-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{3}/3$ E) 0

74. Calcular el valor de $\tan 2\theta$, si:

$$\frac{\tan(x+\theta)-5}{1+5\tan(x+\theta)} = \frac{\tan(x-\theta)-3}{1+3\tan(x-\theta)}$$

A) 1/8 B) 1/4 C) 1/2
D) 1 E) −1/4

75. Hallar la suma de los "n" primeros términos de:
$\tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + \tan 3x \tan 4x + \ldots$

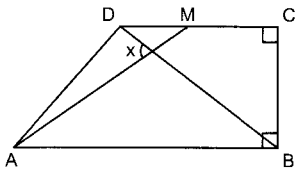
A) $\tan(n+1)x\tan x + 1 + n$
B) $\tan(n+1)x\cot x + 1 + n$
C) $\tan(n+1)x\tan x - 1 - n$
D) $\tan(n+1)x\cot x - 1 - n$
E) $\tan(n+1)x\cot x - 1 + n$

76. Si: $\text{sen}(\alpha+\beta) = m\cos\theta \wedge \cos(\alpha+\beta) = n\,\text{sen}\theta$
hallar: $\text{sen}(\alpha+\beta+\theta)$

A) $\frac{1+mn}{m+n}$ B) $\frac{1-mn}{m-n}$ C) $\frac{1+m+n}{mn}$
D) $\frac{1-mn}{m+n}$ E) $\frac{1+mn}{mn-1}$

77. En la siguiente figura, calcule $\tan x$, si:

$$\frac{MC}{3} = \frac{CB}{4} = \frac{AB}{8} \wedge MC = MD$$

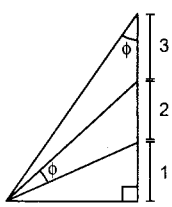


A) 13/4 B) 22/7 C) 8/3
D) 24/5 E) 17/9

78. Siendo: $\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\beta \wedge \cos\beta = 3\cos\alpha$,
Calcule el valor de $\cos(\alpha - \beta)$

A) −5/7 B) −3/7 C) 3/7
D) 5/7 E) 6/7

79. En el gráfico mostrado, calcule $\tan\phi$.



A) 1/2 B) 2 C) 3/2
D) 5/2 E) 1/6

80. Si $\tan\left(\frac{\pi}{14} - x\right) = \frac{1}{2}$, calcule $\cot\left(\frac{5\pi}{28} + x\right)$

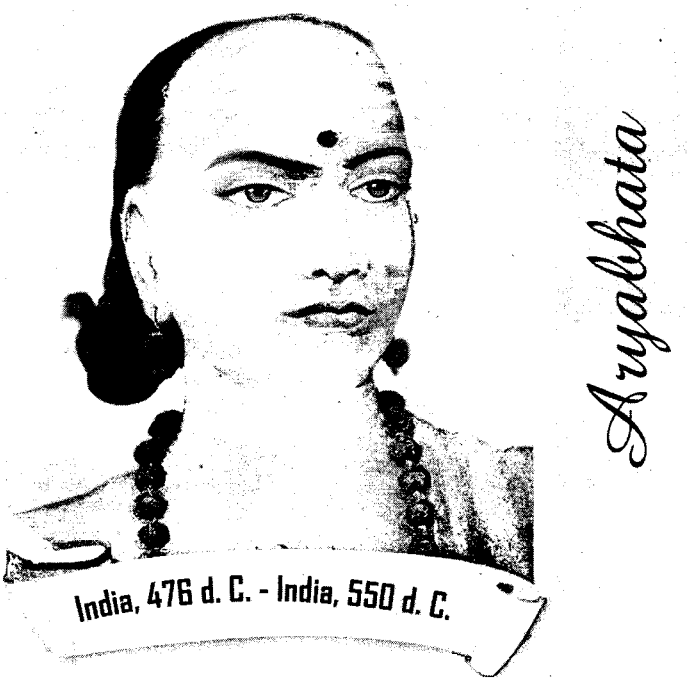
A) 3 B) 2 C) 1
D) 1/2 E) 1/3

CLAVES

1. A	11. A	21. E	31. B	41. E	51. D	61. E	71. A
2. E	12. D	22. A	32. B	42. B	52. D	62. D	72. E
3. B	13. C	23. B	33. C	43. A	53. C	63. E	73. A
4. B	14. B	24. E	34. D	44. E	54. C	64. B	74. A
5. A	15. A	25. B	35. A	45. D	55. D	65. C	75. D
6. B	16. C	26. C	36. A	46. B	56. B	66. B	76. A
7. D	17. C	27. A	37. C	47. D	57. D	67. D	77. B
8. E	18. D	28. B	38. E	48. E	58. E	68. B	78. D
9. B	19. D	29. A	39. B	49. C	59. D	69. C	79. A
10. D	20. A	30. A	40. B	50. A	60. D	70. C	80. A

Ángulos múltiples

capítulo 06



Aryabhata o Aryabhata I (476 d. C.-550 d. C.) fue el primer gran matemático y astrónomo de la era clásica de la matemática en la India y la astronomía india. También trabajó en la aproximación del número π. Aryabhata es el autor de varios tratados de Matemáticas y Astronomía, algunos de los cuales están perdidos. Su mayor trabajo, *Aryabhatiya*, un compendio de matemáticas y astronomía, fue referido de manera extensa en la literatura matemática de la India y ha sobrevivido a los tiempos modernos. La parte matemática del *Aryabhatiya* cubre aritmética, álgebra, trigonometría plana y trigonometría esférica. También contiene fracciones continuas, ecuaciones cuadráticas, sumas de series de potencias y una tabla de senos.

Su obra fue de gran influencia en la tradición astronómica de la India e influenció a varias culturas vecinas mediante traducciones. Algunos de sus resultados son citados por Al-Juarismi y en el siglo X Al-Biruni afirmó que los seguidores de Aryabhata creían que la Tierra rotaba sobre su propio eje. Sus definiciones de seno (*yia*), coseno (*koyia*), verseno (*utkrama-yia*) y seno inverso (*otkram-yia*) influyeron en el nacimiento de la trigonometría. También fue el primero en especificar tablas de seno y verseno (1 - cosx), en intervalos de 3,75° desde 0° a 90°, con una precisión de cuatro cifras decimales.

Fuente: Wikipedia

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Seno del ángulo doble

$$\boxed{\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha}$$

Demostración:

- Sabemos: $\text{sen}(\alpha + \theta) = \text{sen}\alpha\cos\theta + \text{sen}\theta\cos\alpha$
- Si en lugar de θ colocas α se obtiene:
  $\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha\cos\alpha$
  $\Rightarrow \text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$

Coseno del ángulo doble

(I) $\boxed{\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}$ (II) $\boxed{\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

(III) $\boxed{\cos2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha}$

Demostración (I):

Sabemos: $\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \text{sen}\alpha\text{sen}\theta$

Si en lugar de θ colocas α se obtiene:

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha\text{sen}\alpha$

$\therefore\ \cos2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

Demostración (II):

Sabemos: $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, reemplaza en la identidad anterior.

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$\therefore\ \cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Demostración (III):

Sabemos: $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$, reemplaza en la identidad (I)

$\cos2\alpha = (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha$

$\therefore\ \cos2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

Tangente del ángulo doble

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

$$\alpha \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4}\right\}, n \in \mathbb{Z} \ \wedge\ \alpha \neq \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}$$

Dividimos al numerador y denominador por: $\cos^2\alpha$

$$\therefore\ \tan 2\alpha = \frac{\dfrac{2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

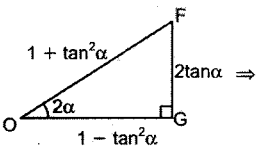
Observaciones

De las identidades básicas del coseno del ángulo doble se deducen las siguientes identidades:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

(Es muy frecuente llamar a estas identidades: identidades de degradación)

De la identidad de la tangente del ángulo doble se deducen:



$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}} \quad \boxed{\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}}$$

Aplicaciones:

1. Lo primero que se debe aprender es a usar las identidades del ángulo doble, es decir:
   - $\text{sen}4x = 2\text{sen}2x\cos2x$
     $\text{sen}80° = 2\text{sen}40°\cos40°$
     $\text{sen}6x = 2\text{sen}3x\cos3x$
     $\text{sen}36° = 2\text{sen}18°\cos18°$
     $\text{sen}3\alpha = 2\text{sen}\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$
     $\text{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right)\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$
     $\text{sen}10\phi = 2\text{sen}5\phi\cos5\phi$
     $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)$
     $\text{sen}7\theta = 2\text{sen}\frac{7\theta}{2}\cos\frac{7\theta}{2}$
     $\text{sen}15° = 2\text{sen}7°30'\cos7°30'$
   - $\cos6x = \cos^2 3x - \text{sen}^2 3x$
     $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 1$
     $\cos100° = 1 - 2\text{sen}^2 50°$
     $\cos5\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right)$
     $\cos50° = 2\cos^2 25° - 1$
     $\cos8\phi = 2\cos^2 4\phi - 1$
     $\cos\frac{\pi}{8} = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{16}\right)$
     $\cos7x = \cos^2\left(\frac{7x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{7x}{2}\right)$
     $\cos\frac{5\pi}{12} = 2\cos^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) - 1$
     $\cos\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
   - $\text{sen}^2 5x = \frac{1 - \cos 10x}{2}$

$$\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}$$

$$\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$$

$$\text{sen}^2 6° = \frac{1-\cos 12°}{2}$$

$$\text{sen}^2\frac{\pi}{9} = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{9}}{2}$$

$$\cos^2 5°20' = \frac{1+\cos 10°40'}{2}$$

Luego se debe aprender a identificar, es decir:

- $2\text{sen}6°\cos 6° = \text{sen}12°$
  $\text{sen}x\cos x = \frac{1}{2}\text{sen}2x$
  $2\text{sen}9x\cos 9x = \text{sen}18x$
  $\text{sen}8\theta\cos 8\theta = \frac{1}{2}\text{sen}16\theta$
  $2\text{sen}\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} = \text{sen}\frac{2x}{3}$
  $\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\text{sen}x$

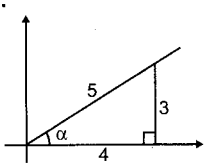
- $\cos^2 20° - \text{sen}^2 20° = \cos 40°$
  $\cos^2 3\theta - \text{sen}^2 3\theta = \cos 6\theta$
  $1 - 2\text{sen}^2 7° = \cos 14°$
  $1 - 2\cos^2 23° = -\cos 46°$
  $2\cos^2 22° - 1 = \cos 44°$
  $1 - 2\text{sen}^2\frac{\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}$
  $1 - 2\text{sen}^2 6\alpha = \cos 12\alpha$
  $2\cos^2\frac{\pi}{18} - 1 = \cos\frac{\pi}{9}$
  $2\cos^2 7\beta - 1 = \cos 14\beta$

- $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \text{sen}2x$
  $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$
  $\frac{2\tan 8x}{1+\tan^2 8x} = \text{sen}16x$
  $\frac{1-\tan^2 20°}{1+\tan^2 20°} = \cos 40°$
  $\frac{2\tan 6°}{1+\tan^2 6°} = \text{sen}12°$
  $\frac{1-\tan^2 8x}{1+\tan^2 8x} = \cos 16x$

- $1 - \cos 2x = 2\text{sen}^2 x$
  $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$
  $1 - \cos 10° = 2\text{sen}^2 5°$
  $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$
  $1 - \cos 5x = 2\text{sen}^2\left(\frac{5x}{2}\right)$
  $1 + \cos 62° = 2\cos^2 31°$
  $1 - \cos(a+b) = 2\text{sen}^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$
  $1 + \cos 21° = 2\cos^2\left(\frac{21°}{2}\right)$

3. Calcular: $\text{sen}2\alpha$ y $\cos 2\alpha$; si: $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in$ IC.

Resolución:

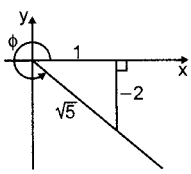


$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\therefore\ \cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

4. Calcular: $\tan 2\phi$; si: $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\phi \in$ IV C.

Resolución:



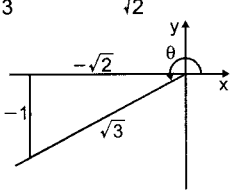
$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \phi \in \text{IVC} \Rightarrow \tan\phi = -2$$

$$\therefore\ \tan 2\phi = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} = \frac{2(-2)}{1-(-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

5. Calcular $\tan 4\theta$, si: $\text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\theta \in$ III C.

Resolución:

$$\text{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan 4\theta = \frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta} = \frac{2(2\sqrt{2})}{1-(2\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{1-8}$$

$$\therefore\ \tan 4\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

6. Si: $\tan\theta = \frac{1}{7}$ y $\tan\alpha = \frac{2}{11}$, calcular $\tan(2\theta + \alpha)$.

Resolución:

$$\tan 2\theta = \frac{2\left(\frac{1}{7}\right)}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\frac{2}{7}}{1-\left(\frac{1}{49}\right)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{48}{49}} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{7}{24}$$

$$\tan(2\theta+\alpha)=\frac{\tan 2\theta+\tan\alpha}{1-\tan 2\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{7}{24}+\frac{2}{11}}{1-\left(\frac{7}{24}\right)\left(\frac{2}{11}\right)}=\frac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}}$$

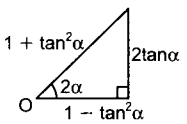
$$\therefore\ \tan(2\theta+\alpha)=\frac{1}{2}$$

7. Demostrar:

$$1+\sec 2\alpha=\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}\quad \text{y}\quad \text{exsec}2\alpha=\tan 2\alpha\tan\alpha$$

Demostración:

Utilizamos el triángulo del doble:



$$1+\sec 2\alpha=1+\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha+1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$1+\sec 2\alpha=\frac{2}{1-\tan^2\alpha}$$

Multiplicamos el numerador y denominador por: $\tan\alpha$:

$$1+\sec 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{(1-\tan^2\alpha)\tan\alpha}=\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\therefore\ 1+\sec 2\alpha=\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}$$

Para demostrar la segunda identidad el proceso es análogo:

$$\text{Exsec}2\alpha=\sec 2\alpha-1=\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}-1=\frac{2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\text{Exsec}2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\tan\alpha$$

$$\therefore\ \text{Exsec}2\alpha=\tan 2\alpha\tan\alpha$$

8. Demostrar:

$$\text{sen}^4\phi+\cos^4\phi=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\phi$$

$$\text{sen}^6\phi+\cos^6\phi=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\phi$$

Demostración:

$$\text{sen}^4\phi+\cos^4\phi=1-2\,\text{sen}^2\phi\cos^2\phi$$

$$\text{sen}^4\phi+\cos^4\phi=1-\frac{1}{2}(2\text{sen}\phi\cos\phi)^2=1-\frac{1}{2}\text{sen}^2 2\phi$$

pero: $\text{sen}^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\Rightarrow\ \text{sen}^4\phi+\cos^4\phi=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos 4\phi)$$

$$\Rightarrow\ 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\phi=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\phi$$

$$\therefore\ \text{sen}^4\phi+\cos^4\phi=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\phi$$

Análogamente:

$$\text{sen}^6\phi+\cos^6\phi=1-3\text{sen}^2\phi\cos^2\phi$$

$$\Rightarrow\ 1-\frac{3}{4}(2\text{sen}\phi\cos\phi)^2=1-\frac{3}{4}\text{sen}^2 2\phi$$

$$=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4\phi}{2}\right)=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\phi=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\phi$$

$$\therefore\ \text{sen}^6\phi+\cos^6\phi=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\phi$$

9. Demostrar:

$$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$$

$$\cot\alpha+\tan\alpha=2\csc 2\alpha\quad\Rightarrow\ \alpha\neq\left\{\frac{n\pi}{2}\right\},n\in\mathbb{Z}$$

Demostración:

$$\cot\alpha-\tan\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}-\tan\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$\cot\alpha-\tan\alpha=2\left(\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right)=2\cot 2\alpha$$

$$\therefore\ \cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$$

$$\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}+\tan\alpha=\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$\cot\alpha+\tan\alpha=2\left(\frac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right)$$

$$\therefore\ \cot\alpha+\tan\alpha=2\csc 2\alpha$$

10. Simplificar:

$$R=\tan\phi+\tan 2\phi+\cot\phi\tan 2\phi\tan 3\phi$$

Resolución:

Sabemos:

$$\tan(x+y)=\tan x+\tan y+\tan(x+y)\tan x\tan y$$

$$R=\underbrace{\tan\phi+\tan 2\phi+\tan\phi\tan 2\phi\tan 3\phi}_{\tan 3\phi}-$$

$$\tan\phi\tan 2\phi\tan 3\phi+\cot\phi\tan 2\phi\tan 3\phi$$

$$R=\tan 3\phi+\tan 2\phi\tan 3\phi\underbrace{(\cot\phi-\tan\phi)}_{2\cot 2\phi}$$

$$R=\tan 3\phi+\tan 2\phi\tan 3\phi(2\cot 2\phi)$$

$$R=\tan 3\phi+2\tan 3\phi\underbrace{\tan 2\phi\cot 2\phi}_{1}=\tan 3\phi+2\tan 3\phi$$

$$\therefore\ R=3\tan 3\phi$$

11. Simplificar:

$$A=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)(1+\sec 8\theta)(1+\sec 16\theta)$$

Resolución:

Sabemos que:

$$1+\sec 2\theta=\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta};\quad 1+\sec 4\theta=\frac{\tan 4\theta}{\tan 2\theta}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}\frac{\tan 4\theta}{\tan 2\theta}\frac{\tan 8\theta}{\tan 4\theta}\frac{\tan 16\theta}{\tan 8\theta}$$

$$\therefore\ A=\frac{\tan 16\theta}{\tan\theta}$$

12. Simplificar:

$$L=\tan\theta+2\tan 2\theta+4\tan 4\theta+8\cot 8\theta$$

Resolución:

Sabemos que:

$$2\cot 2x=\cot x-\tan x$$

$L = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 4(2\cot8\theta)$

$L = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 4(\cot4\theta - \tan4\theta)$

$L = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\cot4\theta$

$L = \tan\theta + 2\tan2\theta + 2(2\cot4\theta)$

$L = \tan\theta + 2\tan2\theta + 2(\cot2\theta - \tan2\theta)$

$L = \tan\theta + 2\cot2\theta = \tan\theta + \cot\theta - \tan\theta$

$\therefore\ L = \cot\theta$

13. Reducir:

$$H = \frac{1+\tan^2(45° + \alpha)}{1-\tan^2(45° + \alpha)} + \frac{1+\cot^2(\alpha)}{2\cot\alpha}$$

Resolución:

Sea: $x = 45° + \alpha$

$$\frac{1+\tan^2(45° + \alpha)}{1-\tan^2(45° + \alpha)} = \frac{1+\tan^2x}{1-\tan^2x} = \sec2x$$

$\sec2x = \sec2(45° + \alpha) = \sec(90° + 2\alpha) = -\csc2\alpha$

$$H = -\csc2\alpha + \frac{1+\cot^2\alpha}{2\cot\alpha} = -\csc2\alpha + \csc2\alpha$$

$\therefore\ H = 0$

14. Hallar al máximo y mínimo valor de:
$\cos^5\phi\,\text{sen}\phi - \text{sen}^5\phi\cos\phi$

Resolución:

$R = \cos^5\phi\,\text{sen}\phi - \text{sen}^5\phi\cos\phi$

$R = \text{sen}\phi\cos\phi(\cos^4\phi - \text{sen}^4\phi)$

$$R = \underbrace{\text{sen}\phi\cos\phi}_{\frac{1}{2}\text{sen}2\phi}\underbrace{(\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi)}_{\cos2\phi}\underbrace{(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi)}_{1}$$

$$R = \frac{1}{2}\text{sen}2\phi\cos2\phi = \frac{1}{4}\text{sen}4\phi$$

$$\therefore\ R_{máx} = \frac{1}{4}\ \wedge\ R_{min} = -\frac{1}{4}$$

15. Eliminar α y ϕ de:
$\text{sen}\alpha = x\text{sen}\phi$; $\cos\alpha = y\cos\phi$; $\alpha = 2\phi$

Resolución:

$\text{sen}\alpha = x\text{sen}\phi$, pero $\alpha = 2\phi$

$\text{sen}2\phi = x\text{sen}\phi \Rightarrow 2\text{sen}\phi\cos\phi = x\text{sen}\phi$

$\Rightarrow \cos\phi = \frac{x}{2}$ ... (I)

$\cos\alpha = y\cos\phi \Rightarrow \cos2\phi = y\cos\phi$

$2\cos^2\phi - 1 = y\cos\phi$

De (I): $2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = y\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{2} - 1 = \frac{xy}{2}$

$\therefore\ x^2 - 2 = xy$

16. Eliminar α:
$\text{sen}\alpha - \cos\alpha = m$; $\cos2\alpha = n$

Resolución:

$\text{sen}\alpha - \cos\alpha = m$

$\Rightarrow (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = m^2$

$1 - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = m^2 \Rightarrow 1 - \text{sen}2\alpha = m^2$

$\text{sen}2\alpha = 1 - m^2 \Rightarrow \text{sen}^2 2\alpha = (1 - m^2)^2$

$\cos2\alpha = n \Rightarrow \cos^2 2\alpha = n^2$

Sumando:

$\text{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = (1 - m^2)^2 + n^2$

$1 = 1 - 2m^2 + m^4 + n^2 \quad \therefore\ m^4 - 2m^2 + n^2 = 0$

17. Simplificar:

$R = \sqrt{1 + \text{sen}2x} + \sqrt{1 - \text{sen}2x}$, $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$

Resolución:

$R = \sqrt{1 + 2\text{sen}x\cos x} + \sqrt{1 - 2\text{sen}x\cos x}$

$R = \sqrt{\text{sen}^2x + 2\text{sen}x\cos x + \cos^2x} + \sqrt{\text{sen}^2x - 2\text{sen}x\cos x + \cos^2x}$

$R = \sqrt{(\text{sen}x + \cos x)^2} + \sqrt{(\text{sen}x - \cos x)^2}$

No olvidar que: $\sqrt{x^2} = |x|$

$R = |\text{sen}x + \cos x| + |\text{sen}x - \cos x|$

Como: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$\cos x > \text{sen}\,x$ $\begin{cases} |\text{sen}\,x + \cos x| = \text{sen}\,x + \cos x \\ |\text{sen}\,x - \cos x| = -(\text{sen}\,x - \cos x) \end{cases}$

$R = (\text{sen}x + \cos x) - (\text{sen}x - \cos x)$

$R = \text{sen}x + \cos x - \text{sen}\,x + \cos x \quad \therefore\ R = 2\cos x$

18. Simplificar:
$E = \cos x\cos2x\cos4x\cos8x$

Resolución:

Sabemos que: $2\text{sen}\alpha\cos\alpha = \text{sen}2\alpha$

entonces multiplicamos a E por: 2senx

$(2\text{sen}x)\,E = \underline{2\text{sen}x\cos x}\cos2x\cos4x\cos8x$

$(2\text{sen}x)\,E = \text{sen}2x\cos2x\cos4x\cos8x$

$\Rightarrow (4\text{sen}x)\,E = \underline{2\text{sen}2x\cos2x}\cos4x\cos8x$

$(4\text{sen}x)\,E = \text{sen}4x\cos4x\cos8x$

$\Rightarrow (8\,\text{sen}x)\,E = \underline{2\text{sen}4x\cos4x}\cos8x$

$(8\text{sen}x)\,E = \text{sen}8x\cos8x$

$\Rightarrow (16\text{sen}x)\,E = 2\text{sen}8x\cos8x$

$(16\text{sen}x)\,E = \text{sen}16x \quad \therefore\ E = \frac{\text{sen}16x}{16\text{sen}x}$

Nota: En forma general se demuestra que:

$$\boxed{\cos x\cos2x\cos4x \ldots \cos2^{n-1}x = \frac{\text{sen}2^n x}{2^n\text{sen}x}}$$

Observaciones

1. Sabemos que:

$\text{sen}2x = 2\text{sen}x\cos x$,

Además: $-1 \le \text{sen}2x \le 1$

Entonces: $-1 \le 2\,\text{sen}x\cos x \le 1$

$-\frac{1}{2} \le \text{sen}x\cos x \le \frac{1}{2}$

Por ejemplo: hallar el máximo valor de:

$M = \text{sen}x + \text{versx}\cos x + \cos x$

Resolución:

$M = \text{senx} + (1 - \cos x)(1 - \text{senx}) + \cos x$

$M = \text{senx} + 1 - \cos x - \text{senx} + \text{senx}\cos x + \cos x$

$M = 1 + \text{senx}\cos x \Rightarrow$ El máximo valor de M ocurre cuando (senxcosx) es máximo.

$\therefore M_{máx} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2. Usando las identidades se demuestra que:

$\frac{1}{2} \leq \text{sen}^4x + \cos^4x \leq 1$

$\frac{1}{2} \leq \text{sen}^6x + \cos^6x \leq 1$

En forma general se demuestra que si n es número entero positivo entonces:

$\frac{1}{2^{n-1}} \leq (\text{senx})^{2n} + (\cos x)^{2n} \leq 1$

Por ejemplo:

$\frac{1}{8} < \text{sen}^8x + \cos^8x \leq 1$

$\frac{1}{16} \leq \text{sen}^{10}x + \cos^{10}x \leq 1$

3. Sabemos que: $\frac{-1}{2} \leq \text{senxcosx} \leq \frac{1}{2}$

$0 \leq \text{sen}^2x\cos^2x \leq \frac{1}{4}$

En forma general se demuestra que si n y m son números enteros positivos tal que al menos uno de ellos es impar se cumple:

$$-\sqrt{\frac{n^n\ m^m}{(n+m)^{n+m}}} \leq (\text{senx})^n(\cos x)^m \leq \sqrt{\frac{n^n\ m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

Por ejemplo:

$\text{sen}^2x\cos^3x$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{2^2(3)^3}{(5)^5}} \leq \text{sen}^2x\cos^3x \leq \sqrt{\frac{2^2(3)^3}{(5)^5}}$$

Simplificando:

$$-\frac{6\sqrt{15}}{125} \leq \text{sen}^2x\cos^3x \leq \frac{6\sqrt{15}}{125}$$

Ejemplo:

Determinar el máximo valor de: $y = \text{sen}^2x\text{sen}2x$.

Resolución:

$y = \text{sen}^2x\text{sen}2x = \text{sen}^2x(2\text{senxcosx})$

$y = 2\text{sen}^3x\cos x \quad \ldots (1)$

El máximo valor de: $\text{sen}^3x\cos x$ es $\sqrt{\frac{3^3(1)^1}{(3+1)^4}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$

entonces reemplazamos en (1):

El máximo valor de y es:

$$y_{máx} = 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Nota

En el caso de que n y m sean números pares positivos se cumple que:

$$0 \leq (\text{senx})^n(\cos x)^m \leq \sqrt{\frac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

Ejemplo:

- $0 \leq \text{sen}^4x\cos^6x \leq \sqrt{\frac{4^4(6)^6}{(10)^{10}}}$

  $\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^4x\cos^6x \leq \frac{108}{3125}$

- $0 \leq \text{sen}^{12}x\cos^4x \leq \sqrt{\frac{12^{12}(4)^4}{(16)^{16}}}$

  $\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^{12}\cos^4x \leq \frac{729}{2^{16}}$

Ejemplo:

Hallar el máximo valor de:

$$y = (1 - \cos 2x)(1 - \cos 4x)$$

Resolución:

Simplificamos:

$$y = \underbrace{(1 - \cos 2x)}_{2\text{sen}^2x}\underbrace{(1 - \cos 4x)}_{2\text{sen}^2 2x} \Rightarrow y = 4\text{sen}^2x\text{sen}^2 2x$$

Sabemos que: $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow y = 4\text{sen}^2x(2\text{senxcosx})^2 \Rightarrow 16\ \text{sen}^4x\cos^2x$

$$\Rightarrow y_{máx} = 16\sqrt{\frac{4^4(2)^2}{(6)^6}} = \frac{64}{27}$$

IDENTIDADES AUXILIARES DEL ÁNGULO DOBLE

- $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$
- $\cot\theta + \tan\theta = 2\csc 2\theta$
- $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = \frac{3 + \cos 4\theta}{4}$
- $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = \frac{5 + 3\cos 4\theta}{8}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Seno y coseno del ángulo mitad

$$\boxed{\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}} \quad \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}}$$

El signo a colocar depende del cuadrante al que pertenece $\frac{\alpha}{2}$.

Demostración:

- Sabemos que:

  $2\text{sen}^2x = 1 - \cos 2x \quad \ldots(1)$

  Si elegimos:

  $x = \frac{\alpha}{2}$ y reemplazamos en (1) se obtiene:

$$2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

- Sabemos que: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

  Si elegimos:

  $x = \frac{\alpha}{2}$ y reemplazamos en (1) se obtiene:

  $$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Tangente del ángulo mitad

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

El signo a colocar depende del cuadrante al que pertenece $\frac{\alpha}{2}$.

Nota

Para el caso de la tangente del ángulo mitad es muy frecuente utilizar la siguiente identidad.

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha}$$

Demostración:

Del gráfico anterior se observa del ⊿AMP:

$\therefore\ \tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$

De igual modo se demuestra que:

$$\boxed{\cot\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha + \cot\alpha}$$

Ejemplo:

Calcular sen22°30', cos22°30', tan22°30' y cot22°30'

Resolución:

- $\text{sen}22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

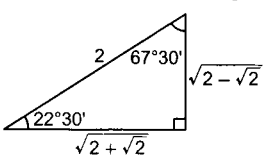
  $\text{sen } 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

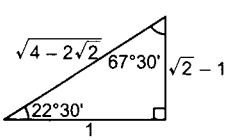
- $\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

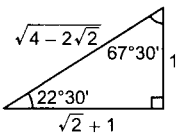
  $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

- $\tan 22°30' = \csc 45° - \cot 45° \Rightarrow \tan 22°30' = \sqrt{2} - 1$
- $\cot 22°30' = \csc 45° + \cot 45° \Rightarrow \cot 22°30' = \sqrt{2} + 1$

Por su frecuente aplicación a continuación se muestra un cuadro con las razones trigonométricas de 22°30' y 67°30'.







$RT\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$RT\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
$\text{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\text{sen}\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$	$\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$
$\cot\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$	$\cot\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$
$\sec\frac{\pi}{8} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$\sec\frac{3\pi}{8} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$
$\csc\frac{\pi}{8} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\csc\frac{3\pi}{8} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Aplicaciones:

1. Calcular: $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2}$ sabiendo que:

   $\cos\theta = \frac{1}{4}, \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

   Resolución:

   Como: $\theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

   $\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \text{IC}$

   $$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

   $$\Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

   $$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

   $$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

2. Calcular: $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $\cos\frac{\alpha}{2}$, sabiendo que:

   $\cos\alpha = \frac{1}{8}, \alpha \in \left\langle 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\rangle$

   Resolución:

   Como: $\alpha \in \left\langle 2\pi; \frac{5\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$

   $\Rightarrow \pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \text{IIIC}$

   $$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

   $$\Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$$

3. Calcular: $\sec\frac{\alpha}{2}$ y $\csc\frac{\alpha}{2}$ sabiendo que:

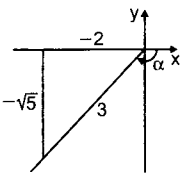
$$\text{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3};\ \alpha \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Resolución:

Como: $\alpha \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \alpha \in \text{IIIC} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{3}$

Además: $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < -\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \frac{\alpha}{2} \in \text{IVC}$



$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Luego: $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \Rightarrow \sec\frac{\alpha}{2} = \sqrt{6}$

$$\csc\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{5}{6}}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \csc\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{30}}{5}$$

4. Calcular: $\tan\frac{\theta}{2}$ sabiendo que: $\tan\theta = \frac{1}{3}$, $\theta \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

Resolución:

Como: $\tan\theta = \frac{1}{3}$ y $\theta \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

$\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta = (-\sqrt{10}) - (3)$

$\therefore\ \tan\frac{\theta}{2} = -(\sqrt{10}+3)$

5. Calcular el valor de: $\tan 7°30'$; $\cot 37°30' \wedge \cot 11°15'$

Resolución:

Sabemos que:

$\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$ y $\cot\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha + \cot\alpha$

$\tan 7°30' = \csc 15° - \cot 15° = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow \tan 7°30' = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$

$\cot 37°30' = \csc 75° + \cot 75° = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3})$

$\cot 37°30' = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\cot 11°15' = \csc 22°30' + \cot 22°30'$

$\cot 11°15' = \sqrt{4+2\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 1$

6. Si: $\cos x = \frac{\cos\alpha - m}{1 - m\cos\alpha}$, a qué es igual: $\tan\frac{x}{2}$

Resolución:

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\cos\alpha - m}{1-m\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha - m}{1-m\cos\alpha}}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\frac{1-m\cos\alpha-\cos\alpha+m}{1-m\cos\alpha}}{\frac{1-m\cos\alpha+\cos\alpha-m}{1-m\cos\alpha}}}$$

Simplificando:

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1+m)-(1+m)\cos\alpha}{(1-m)+(1-m)\cos\alpha}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1+m)(1-\cos\alpha)}{(1-m)(1+\cos\alpha)}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\underbrace{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}_{\tan\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$$

$$\therefore\ \tan\frac{x}{2} = \pm\tan\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$$

7. Sabiendo que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{b+c},\ \cos\beta = \frac{b}{a+c};\ \cos\phi = \frac{c}{a+b}$$

calcular: $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\phi}{2}$

Resolución:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \quad ...(1)$$

$$\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\frac{b}{a+c}}{1+\frac{b}{a+c}} = \frac{a+c-b}{a+c+b} \quad ...(2)$$

$$\tan^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi} = \frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}} = \frac{a+b-c}{a+b+c} \quad ...(3)$$

Sumando: (1) + (2) + (3):

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\phi}{2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} + \frac{a+c-b}{a+c+b} + \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\phi}{2} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Observaciones

Es muy importante expresar el $\text{sen}\frac{\alpha}{2} \vee \cos\frac{\alpha}{2}$ en términos del $\text{sen}\alpha$.

Para resolver este problema debemos saber lo siguiente:

1. $\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \text{sen}\alpha$

$$\Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\text{sen}\alpha} \quad ...(1)$$

$$\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \text{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 - \text{sen}\alpha} \quad ...(2)$$

2. El signo a colocar dependerá del signo de la suma $\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ para la primera expresión y de la diferencia $\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ para la segunda expresión.

3. Por último: Sumamos miembro a miembro si nos piden $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ y restamos miembro a miembro si nos piden $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Aplicaciones:

1. Expresar: sen80° en términos del sen160°

Resolución:

1. $\text{sen}80° + \cos80° = \sqrt{1 + \text{sen}160°}$

   $\text{sen}80° - \cos80° = \sqrt{1 - \text{sen}160°}$
2. Observar que las dos expresiones son positivas.
3. Como nos piden el sen 80°, entonces sumamos miembro a miembro.

   $2\text{sen}80° = \sqrt{1 + \text{sen}160°} + \sqrt{1 - \text{sen}160°}$

   $\text{sen}80° = \frac{1}{2}[\sqrt{1 + \text{sen}160°} + \sqrt{1 - \text{sen}160°}]$

2. Expresar: cos35° en términos del sen70°.

Resolución:

$\text{sen}35° + \cos35° = \sqrt{1 + \text{sen}70°}$

$\text{sen}35° - \cos35° = -\sqrt{1 - \text{sen}70°}$

Observar que una de las expresiones es negativa dado que: $\cos35° > \text{sen}35°$

Como nos piden cos35°, restamos:

$2\cos35° = \sqrt{1 + \text{sen}70°} - (-\sqrt{1 - \text{sen}70°})$

$\cos35° = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \text{sen}70°} + \sqrt{1 - \text{sen}70°})$

3. Expresar: cos160° en términos del sen320°

Resolución:

$\text{sen}160° + \cos160° = -\sqrt{1 + \text{sen}320°}$

$\text{sen}160° - \cos160° = \sqrt{1 - \text{sen}320°}$

Restamos:

$2\cos160° = -\sqrt{1 + \text{sen}320°} - \sqrt{1 - \text{sen}320°}$

$\therefore \cos160° = -\frac{1}{2}(\sqrt{1 + \text{sen}320°} + \sqrt{1 - \text{sen}320°})$

4. Expresar: $\text{sen}\frac{6\pi}{7}$ en términos del $\text{sen}\frac{12\pi}{7}$.

Resolución:

Observar que $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \frac{6\pi}{7} < \pi \Rightarrow \frac{6\pi}{7} \in \text{IIC}$

$$\text{sen}\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\sqrt{1 + \text{sen}\frac{12\pi}{7}}$$

$$\text{sen}\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7} = \sqrt{1 - \text{sen}\frac{12\pi}{7}}$$

Sumamos:

$$2\text{sen}\frac{6\pi}{7} = -\sqrt{1 + \text{sen}\frac{12\pi}{7}} + \sqrt{1 - \text{sen}\frac{12\pi}{7}}$$

$$\therefore \text{sen}\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - \text{sen}\frac{12\pi}{7}} - \sqrt{1 + \text{sen}\frac{12\pi}{7}}\right)$$

5. Expresar: $\cos\frac{3\pi}{11}$ en términos del $\text{sen}\frac{6\pi}{11}$.

Resolución:

Observar que $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} < \frac{\pi}{2}$

$$\text{sen}\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} = \sqrt{1 + \text{sen}\frac{6\pi}{11}}$$

$$\text{sen}\frac{3\pi}{11} - \cos\frac{3\pi}{11} = \sqrt{1 - \text{sen}\frac{6\pi}{11}}$$

Restamos:

$$2\cos\frac{3\pi}{11} = \sqrt{1 + \text{sen}\frac{6\pi}{11}} - \sqrt{1 - \text{sen}\frac{6\pi}{11}}$$

$$\cos\frac{3\pi}{11} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \text{sen}\frac{6\pi}{11}} - \sqrt{1 - \text{sen}\frac{6\pi}{11}}\right)$$

6. Expresar: sen35° en términos del cos20°.

Resolución:

Sabemos que: $\cos20° = \text{sen}70°$

$\text{sen}35° + \cos35° = \sqrt{1 + \text{sen}70°}$

$\text{sen}35° - \cos35° = -\sqrt{1 - \text{sen}70°}$

Sumamos:

$2\text{sen}35° = \sqrt{1 + \text{sen}70°} - \sqrt{1 - \text{sen}70°}$

$2\text{sen}35° = \sqrt{1 + \cos20°} - \sqrt{1 - \cos20°}$

$\therefore \text{sen}35° = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \cos20°} - \sqrt{1 - \cos20°})$

7. Expresar: $\cos\frac{\theta}{2}$ en términos del $\text{sen}\theta$, si $\frac{5\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{7\pi}{4}$

Resolución:

$$\frac{5\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left|\text{sen}\frac{\theta}{2}\right| > \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{1 + \text{sen}\theta}$$

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{1 - \text{sen}\theta}$$

$$2\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{1 + \text{sen}\theta} - (-\sqrt{1 - \text{sen}\theta})$$

$$\therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - \text{sen}\theta} - \sqrt{1 + \text{sen}\theta})$$

Observación

A partir de las identidades del ángulo mitad se deducen las siguientes identidades:

$$\boxed{2\text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}}$$

$$\boxed{2\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos x}}}}}$$

En ambos casos hay n radicales.

Observar que si: $x = \frac{\pi}{2} \to \frac{x}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

entonces:

$$2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

En ambos casos hay n radicales.

Ejemplos:

(Observar la relación del exponente y el número de radicales)

$$2\text{sen}\frac{\pi}{8} = 2\text{sen}\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$2\cos\frac{\pi}{32} = 2\cos\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$2\text{sen}\frac{\pi}{16} = 2\text{sen}\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE

Seno y coseno del ángulo triple

$$\boxed{\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha}$$

$$\boxed{\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

Demostración:

- Sabes:
  $\text{sen}3\alpha = \text{sen}(2\alpha+\alpha) = \text{sen}2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\,\text{sen}\alpha$
- Reemplaza las identidades del ángulos doble:
  $\text{sen}3\alpha = (2\text{sen}\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (1-2\text{sen}^2\alpha)\,\text{sen}\alpha$
  $\text{sen}3\alpha = 2\text{sen}\alpha\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\text{sen}^2\alpha} + (1-2\text{sen}^2\alpha)\text{sen}\alpha$
  $\text{sen}3\alpha = 2\text{sen}\alpha - 2\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\alpha - 2\text{sen}^3\alpha$
  $\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$
- Sabes:
  $\cos3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos2\alpha\cos\alpha - \text{sen}2\alpha\,\text{sen}\alpha$
- Reemplaza las identidades del ángulo doble:
  $\cos3\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\text{sen}\alpha\cos\alpha)\text{sen}\alpha$
  $= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\underbrace{\text{sen}^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha}\cos\alpha$
  $\cos3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$
  $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Tangente del ángulo triple

$$\boxed{\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}};\quad \alpha \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Demostración:

- Sabes: $\tan3\alpha = \dfrac{\text{sen}3\alpha}{\cos3\alpha} = \dfrac{3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$
- Divide al numerador y denominador por: $\cos^3\alpha$

$$\tan3\alpha = \frac{\dfrac{3\text{sen}\alpha}{\cos^3\alpha} - \dfrac{4\text{sen}^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{\dfrac{4\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} - \dfrac{3\cos\alpha}{\cos^3\alpha}} = \frac{3\tan\alpha\sec^2\alpha - 4\tan^3\alpha}{4-3\sec^2\alpha}$$

$$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha(1+\tan^2\alpha) - 4\tan^3\alpha}{4-3(1+\tan^2\alpha)}$$

$$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha + 3\tan^3\alpha - 4\tan^3\alpha}{4-3-3\tan^2\alpha}$$

$$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

Ejemplos:

1. Lo primero que se debe aprender es a usar las identidades del ángulo triple, es decir.
   - $\text{sen}6x = 3\text{sen}2x - 4\text{sen}^3 2x$
     $\text{sen}21° = 3\text{sen}7° - 4\text{sen}^3 7°$
     $\text{sen}x = 3\text{sen}\frac{x}{3} - 4\text{sen}^3\frac{x}{3}$
     $\text{sen}\frac{6\pi}{7} = 3\text{sen}\frac{2\pi}{7} - 4\text{sen}^3\frac{2\pi}{7}$
     $\text{sen}7° = 3\text{sen}\frac{7°}{3} - 4\text{sen}^3\frac{7°}{3}$
   - $\cos9x = 4\cos^3 3x - 3\cos3x$
     $\cos12° = 4\cos^3 4° - 3\cos4°$
     $\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$
     $\cos\frac{9\pi}{7} = 4\cos^3\frac{3\pi}{7} - 3\cos\frac{3\pi}{7}$
     $\cos8° = 4\cos^3\frac{8°}{3} - 3\cos\frac{8°}{3}$
   - $\tan39° = \dfrac{3\tan13° - \tan^3 13°}{1-3\tan^2 13°}$
     $\tan6x = \dfrac{3\tan2x - \tan^3 2x}{1-3\tan^2 2x}$
     $\tan\frac{\pi}{5} = \dfrac{3\tan\frac{\pi}{15} - \tan^3\frac{\pi}{15}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{15}}$
     $\tan11° = \dfrac{3\tan\frac{11°}{3} - \tan^3\frac{11°}{3}}{1-3\tan^2\frac{11°}{3}}$
2. Luego se debe aprender a identificar, es decir:
   - $3\text{sen}5° - 4\text{sen}^3 5° = \text{sen}15°$
     $3\text{sen}7x - 4\text{sen}^3 7x = \text{sen}21x$
     $3\text{sen}\frac{\pi}{12} - 4\text{sen}^3\frac{\pi}{12} = \text{sen}\frac{\pi}{4}$
     $3\text{sen}\frac{x}{4} - 4\text{sen}^3\frac{x}{4} = \text{sen}\frac{3x}{4}$
   - $4\cos^3 9° - 3\cos9° = \cos27°$
     $4\cos^3 8\theta - 3\cos8\theta = \cos24\theta$

$$4\cos^3\frac{\pi}{5} - 3\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{5}$$

$$4\cos^3\frac{2x}{3} - 3\cos\frac{2x}{3} = \cos 2x$$

IDENTIDADES AUXILIARES DEL ÀNGULO TRIPLE

$$\boxed{\text{sen}3\alpha = \text{sen}\alpha(2\cos 2\alpha + 1)}$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = \cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1)}$$

Demostración:

- Sabemos que: $\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$.
  También sabemos que: $2\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$
  entonces:
  $\Rightarrow \text{sen}3\alpha = \text{sen}\alpha(3 - 4\text{sen}^2\alpha)$
  $\text{sen}3\alpha = \text{sen}\alpha(3 - 2(1 - \cos 2\alpha))$
  $\therefore \text{sen}3\alpha = \text{sen}\alpha(2\cos 2\alpha + 1)$
- Sabemos que: $\cos 3\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$
  $\Rightarrow \cos 3\alpha = \cos\alpha[2(1 + \cos 2\alpha) - 3]$
  $\therefore \cos 3\alpha = \cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1)$

Ejemplos:

1. $\text{sen}6x = \text{sen}2x(2\cos 4x + 1)$
   $\cos 9x = \cos 3x(2\cos 6x - 1)$
   $\text{sen}27° = \text{sen}9°(2\cos 18° + 1)$
   $\cos 54° = \cos 18°(2\cos 36° - 1)$
   $\text{sen}2\phi = \text{sen}\frac{2\phi}{3}\left(2\cos\frac{4\phi}{3} + 1\right)$
   $\cos 21° = \cos 7°(2\cos 14° - 1)$
2. $\text{sen}3\theta(2\cos 6\theta + 1) = \text{sen}9\theta$
   $\cos 21°(2\cos 42° - 1) = \cos 63°$
   $\cos\frac{x}{2}(2\cos x - 1) = \cos\frac{3x}{2}$
   $\text{sen}6x(2\cos 12x + 1) = \text{sen}18x$
   $\text{sen}6°(2\cos 12° + 1) = \text{sen}18°$
   $\cos 2\theta(2\cos 4\theta - 1) = \cos 6\theta$

$$\boxed{4\text{sen}\alpha\,\text{sen}(60° - \alpha)\text{sen}(60° + \alpha) = \text{sen}3\alpha}$$

$$\boxed{4\cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha) = \cos 3\alpha}$$

$$\boxed{\tan\alpha\tan(60° - \alpha)\tan(60° + \alpha) = \tan 3\alpha}$$

Demostración:

- Sabemos que: $\text{sen}(a + b)\text{sen}(a - b) = \text{sen}^2a - \text{sen}^2b$
  $\Rightarrow 4\text{sen}\alpha\,\text{sen}(60° - \alpha)\,\text{sen}(60° + \alpha)$
  $= 4\text{sen}\alpha(\text{sen}^2 60° - \text{sen}^2\alpha)$
  $= 4\text{sen}\alpha\left(\frac{3}{4} - \text{sen}^2\alpha\right) = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha = \text{sen}3\alpha$
  $\therefore 4\text{sen}\alpha\,\text{sen}(60° - \alpha)\text{sen}(60° + \alpha) = \text{sen}3\alpha$
- Sabemos que:
  $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2a - \text{sen}^2b$
  $\Rightarrow 4\cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha)$
  $= 4\cos\alpha\{\cos^2 60° - \text{sen}^2\alpha\}$
  $= 4\cos\alpha\left[\frac{1}{4} - (1 - \cos^2\alpha)\right] = 4\cos\alpha\left(-\frac{3}{4} + \cos^2\alpha\right)$
  $= -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha$
  $\therefore 4\cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha) = \cos 3\alpha$
- Sabemos que:
  $\tan(a + b)\tan(a - b) = \frac{\tan^2a - \tan^2b}{1 - \tan^2a\tan^2b}$
  $\Rightarrow \tan\alpha\tan(60° - \alpha)\tan(60° + \alpha)$
  $= \tan\alpha\left(\frac{\tan^2 60° - \tan^2\alpha}{1 - \tan^2 60°\tan^2\alpha}\right)$
  $= \tan\alpha\left(\frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\right) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \tan 3\alpha$
  $\therefore \tan(\alpha)\tan(60° - \alpha)\tan(60° + \alpha) = \tan 3\alpha$

Ejemplos:

- $4\text{sen}5°\text{sen}55°\text{sen}65° = \text{sen}15°$
  $4\text{sen}2x\text{sen}(60° - 2x)\text{sen}(60° + 2x) = \text{sen}6x$
  $4\cos 7°\cos 53°\cos 67° = \cos 21°$
  $4\cos\frac{x}{3}\cos\left(60° - \frac{x}{3}\right)\cos\left(60° + \frac{x}{3}\right) = \cos x$
  $4\text{sen}\frac{\pi}{7}\text{sen}\frac{4\pi}{21}\text{sen}\frac{10\pi}{21} = \text{sen}\frac{3\pi}{7}$
  $4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} = \cos\frac{3\pi}{5}$
- $4\cos 20°\cos 40°\cos 80° = \cos 60° = 1/2$
  $4\text{sen}10°\text{sen}50°\text{sen}70° = \text{sen}30° = 1/2$
  $4\text{sen}20°\text{sen}40°\text{sen}80° = \text{sen}60° = \sqrt{3}/2$
  $\text{sen}9°\text{sen}51°\text{sen}69° = 1/4\text{sen}27°$
  $\cos 7x\cos(60° - 7x)\cos(60° + 7x) = \frac{1}{2}\cos 21x$
- $\tan 6°\tan 54°\tan 66° = \tan 18°$
  $\tan 4x\tan(60° - 4x)\tan(60° + 4x) = \tan 12x$
  $\tan 20°\tan 40°\tan 80° = \tan 60° = \sqrt{3}$
  $\tan 10°\tan 50°\tan 70° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Observación

Usando las identidades del ángulo triple se puede calcular el sen18° y sen54°, como vemos a continuación:

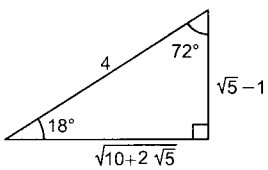
- Partimos de la ecuación: $\cos 3x = \text{sen}2x$ considerando que x es agudo se deduce que:
  $3x + 2x = 90° \Rightarrow 5x = 90° \Rightarrow x = 18°$
- Usando las identidades se deduce:
  $4\cos^3x - 3\cos x = 2\text{sen}x\cos x$
  $4\cos^2x - 3 = 2\text{sen}x \Rightarrow 4(1 - \text{sen}^2x) - 3 = 2\text{sen}x$
  $4 - 4\text{sen}^2x - 3 = 2\text{sen}x$
- Se forma la ecuación de segundo grado (en senx)
  $4\text{sen}^2x + 2\text{sen}x - 1 = 0$
  $\Rightarrow \text{sen}x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$
  $\text{sen}x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$, sabemos que: $x = 18°$
  $\therefore \text{sen}18° = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} \Rightarrow \text{sen}18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

- Es correcto afirmar que:
  $\cos 36° = 1 - 2\text{sen}^2 18°$

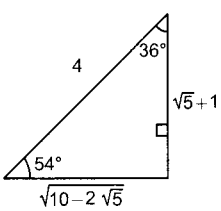
$$\cos 36° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$\cos 36° = 1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) \quad \therefore \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Con los valores hallados se construyen los triángulos correspondientes y elaboramos los siguientes cuadros:



$\text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\tan 18° = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\cot 18° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\sec 18° = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{2}$	$\csc 18° = \sqrt{5}+1$

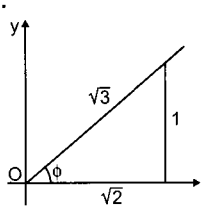


$\text{sen}54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\cos 54° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\tan 54° = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\cot 54° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\sec 54° = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}$	$\csc 54° = \sqrt{5}-1$

Aplicaciones:

1. Calcular: $\text{sen}3\phi$ y $\cos 3\phi$, si: $\text{sen}\,\phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\phi \in$ IC.

Resolución:



$$\text{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \phi \in \text{IC}\ \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sen}3\phi = 3\text{sen}\phi - 4\text{sen}^3\phi = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

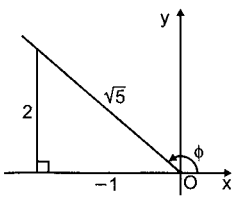
$$\text{sen}3\phi = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{Cos}3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 3\phi = -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

2. Calcular: $\tan 3\phi$, si: $\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\phi \in$ IIC.

Resolución:



$$\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \phi \in \text{IIC} \Rightarrow \tan\phi = -2$$

$$\tan 3\phi = \frac{3\tan\phi - \tan^3\phi}{1 - 3\tan^2\phi} = \frac{3(-2)-(-2)^3}{1-3(-2)^2}$$

$$= \frac{-6+8}{1-12} \quad \therefore \tan 3\phi = -\frac{2}{11}$$

3. Calcular:
   $\text{sen}6\phi$, si: $\text{sen}\phi + \cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Resolución:

$$\text{sen}\phi + \cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (\text{sen}\phi + \cos\phi)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\text{sen}^2\phi + 2\text{sen}\phi\cos\phi + \cos^2\phi = \frac{5}{4}$$

$$1 + \text{sen}2\phi = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{sen}2\phi = \frac{1}{4}$$

$$\text{sen}6\phi = 3\text{sen}2\phi - 4\text{sen}^3 2\phi$$

$$\text{sen}6\phi = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} \quad \therefore \text{sen}6\phi = \frac{11}{16}$$

4. Simplificar:

$$R = \frac{(2\cos 2\alpha + 1)(2\cos 6\alpha + 1)(2\cos 18\alpha + 1)}{(2\cos 2\alpha - 1)(2\cos 6\alpha - 1)(2\cos 18\alpha - 1)}$$

Resolución:

Sabemos que: $\frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha - 1} = \frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}$,

análogamente: $\frac{2\cos 6\alpha + 1}{2\cos 6\alpha - 1} = \frac{\tan 9\alpha}{\tan 3\alpha}$,

$$R = \frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}\left(\frac{\tan 9\alpha}{\tan 3\alpha}\right)\left(\frac{\tan 27\alpha}{\tan 9\alpha}\right) \quad \therefore R = \frac{\tan 27\alpha}{\tan\alpha}$$

5. Simplificar:
   $A = \cos^3\alpha\cos 3\alpha + \text{sen}^3\alpha\,\text{sen}3\alpha$.

Resolución:

Sabemos que:

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4};\ \text{sen}^3\alpha = \frac{3\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha}{4}$$

$$A = \left(\frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}\right)\cos 3\alpha + \left(\frac{3\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha}{4}\right)\text{sen}3\alpha$$

$$4A = \underbrace{3(\cos\alpha\cos 3\alpha + \text{sen}\alpha\text{sen}3\alpha)}_{\cos(3\alpha - \alpha)} + \underbrace{(\cos^2 3\alpha - \text{sen}^2 3\alpha)}_{\cos 6\alpha}$$

$4A = 3\cos 2\alpha + \cos 6\alpha = 3\cos 2\alpha + 4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha$

$4A = 4\cos^3 2\alpha \quad \therefore A = \cos^3 2\alpha$

6. Simplificar:
$B = 4\cos 3\phi\,\text{sen}^3\phi + 4\text{sen}3\phi\cos^3\phi$.

Resolución:

$$B = 4\cos 3\phi\left(\frac{3\text{sen}\phi - \text{sen}3\phi}{4}\right) + 4\text{sen}3\phi\left(\frac{3\cos\phi + \cos 3\phi}{4}\right)$$

$B = 3\cos 3\phi\,\text{sen}\phi - \text{sen}3\phi\cos 3\phi + 3\cos\phi\,\text{sen}3\phi + \cos 3\phi\,\text{sen}3\phi$

$$B = 3\underbrace{(\cos 3\phi\,\text{sen}\phi + \text{sen}3\phi\cos\phi)}_{\text{sen}(\phi + 3\phi)} \quad \therefore B = 3\text{sen}4\phi$$

7. Simplificar:

$$S = \frac{\cos^3\theta - \cos 3\theta}{\cos\theta} + \frac{\text{sen}^3\theta + \text{sen}3\theta}{\text{sen}\theta}$$

Resolución:

$$S = \frac{\cos^3\theta - (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)}{\cos\theta} + \frac{\text{sen}^3\theta + (3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta)}{\text{sen}\theta}$$

$$S = \frac{3\cos\theta - 3\cos^3\theta}{\cos\theta} + \frac{3\text{sen}\theta - 3\text{sen}^3\theta}{\text{sen}\theta}$$

$S = 3 - 3\cos^2\theta + 3 - 3\text{sen}^2\theta$

$$S = 6 - 3\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{1} \Rightarrow S = 6 - 3 \quad \therefore S = 3$$

8. Si:
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, hallar: $\text{sen}3\alpha$.

Resolución:

Sea: $\theta = \frac{\pi}{3} - \alpha \Rightarrow \text{sen}\theta = \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Además: $3\theta = \pi - 3\alpha$

$\Rightarrow \text{sen}3\theta = \text{sen}(\pi - 3\alpha) = \text{sen}3\alpha$

$\Rightarrow \text{sen}3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}3\phi = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$

$= \sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{27} \quad \therefore \text{sen}3\alpha = \text{sen}3\theta = \frac{19\sqrt{2}}{27}$

9. Calcular:
$\tan 6\theta$, si: $\cot^2\theta + \tan^2\theta = 27$, $\theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$

Resolución:

$\cot^2\theta + \tan^2\theta = 27$

$\cot^2\theta - 2\tan\theta\cot\theta + \tan^2\theta = 27 - 2$

$(\cot\theta - \tan\theta)^2 = 25$, como $\theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$

$\cot\theta > \tan\theta \Rightarrow \cot\theta - \tan\theta > 0$

$\sqrt{(\cot\theta - \tan\theta)^2} = \sqrt{25} \Rightarrow \cot\theta - \tan\theta = 5$

$2\cot 2\theta = 5 \Rightarrow \cot 2\theta = \frac{5}{2} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2}{5}$

$$\tan 6\theta = \frac{3\tan 2\theta - \tan^3 2\theta}{1 - 3\tan^2 2\theta} = \frac{3\left(\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$\tan 6\theta = \frac{\frac{6}{5} - \frac{8}{125}}{1 - \frac{12}{25}} = \frac{\frac{142}{125}}{\frac{13}{25}} \quad \therefore \tan 6\theta = \frac{142}{65}$$

10. Calcular:
$R = \tan 9° + \tan 27° + \tan 63° + \tan 81°$

Resolución:

$R = \tan 9° + \tan 27° + \tan 63° + \tan 81°$,

pero: $\tan 81° = \cot 9°$ y $\tan = 63° = \cot 27°$

$\Rightarrow R = \tan 9° + \tan 27° + \cot 27° + \cot 9°$

$R = (\tan 9° + \cot 9°) + (\tan 27° + \cot 27°)$

Sabemos: $\cot\theta + \tan\theta = 2\csc 2\theta$

$R = 2\csc 18° + 2\csc 54° = 2(\sqrt{5} + 1) + 2(\sqrt{5} - 1)$

$R = 4\sqrt{5}$

11. Hallar el valor de:

$$E = \frac{\cos 12°\cos 24°\cos 48°\cos 84°}{\cos 6°\cos 42°\cos 66°\cos 78°}$$

Resolución:

Sabemos que: $\cos 12° = \text{sen}78°$; $\cos 24° = \text{sen}66°$; $\cos 48° = \text{sen}42°$; $\cos 84° = \text{sen}6°$

Reemplazando:

$$E = \frac{\text{sen}78°\text{sen}66°\text{sen}42°\text{sen}6°}{\cos 78°\cos 66°\cos 42°\cos 6°}$$

$E = \tan 78°\tan 66°\tan 42°\tan 6°$

Propiedad:

$\tan\alpha\tan(60° - \alpha)\tan(60° + \alpha) = \tan 3\alpha$

$$E = \tan 6°\tan 66°\tan 42°\tan 78°\left(\frac{\tan 18°}{\tan 18°}\right)$$

$$E = \frac{\tan 6°\tan 66°\overbrace{\tan 78°\tan 42°\tan 18°}^{M}}{\tan 18°}$$

Observar que:

$M = \tan 18°\tan(60° - 18°)\tan(60° + 18°)$

$M = \tan 3(18°) = \tan 54°$

$$E = \frac{\tan 6°\tan 66°\tan 54°}{\tan 18°}$$

$$E = \frac{\tan 6°\tan(60° + 6°)\tan(60° - 6°)}{\tan 18°}$$

$$E = \frac{\tan 18°}{\tan 18°} \quad \therefore E = 1$$

12. Calcular:
$E = \cot 18°(4\cos 18° - 3\sec 18°)$

Resolución:

$$E = \frac{\cos 18°}{\text{sen}18°}\left(4\cos 18° - \frac{3}{\cos 18°}\right)$$

$$R = \frac{\cos 18°}{\text{sen}18°}\left(\frac{4\cos^2 18 - 3}{\cos 18°}\right)$$

$$E = \frac{4\cos^3 18° - 3\cos 18°}{\text{sen}18°\cos 18°} = \frac{\cos 54°}{\frac{\text{sen}36°}{2}}$$

$$E = \frac{2\cos 54°}{\text{sen}36°} \quad \therefore\ E = 2$$

13. Si: $\tan\theta = \sqrt{2}$, calcular $\tan 5\theta$.

Resolución:

Calculamos $\tan 2\theta$:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -2\sqrt{2}$$

Calculamos $\tan 3\theta$:

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} = \frac{3\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{1-3(\sqrt{2})^2}$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{1-6} \rightarrow \tan 3\theta = -\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Finalmente $\tan 5\theta = \tan(2\theta + 3\theta)$

$$\tan 5\theta = \frac{\tan 2\theta - \tan 3\theta}{1-\tan 2\theta\tan 3\theta} = \frac{(-2\sqrt{2})+\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)}{1-(-2\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)}$$

$$\tan 5\theta = \frac{\frac{-11\sqrt{2}}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{-11\sqrt{2}}{5}}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \tan 5\theta = -11\sqrt{2}$$

14. Eliminar θ en:

$\text{sen}3x + \text{sen}^3x = b$

$\cos 3x + \cos^3 x = a$

Resolución:

Dato:

$\text{sen}3x + \text{sen}^3x = b \Rightarrow 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x + \text{sen}^3x = b$

$3\text{sen}x - 3\text{sen}^3x = b \Rightarrow 3\text{sen}x(1 - \text{sen}^2x) = b$

$\Rightarrow 3\text{sen}x\cos^2x = b \quad \ldots (1)$

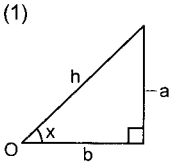
Dato:

$\cos 3x - \cos^3x = a \Rightarrow 4\cos^3x - 3\cos x - \cos^3x = a$

$3\cos^3x - 3\cos x = a \Rightarrow 3\cos x(\cos^2x - 1) = a$

$\Rightarrow -3\cos x\text{sen}^2x = a \quad \ldots (2)$

Dividimos (2) : (1)



$h^2 = a^2 + b^2$

$$\frac{-3\cos x\text{sen}^2x}{3\text{sen}x\cos^2x} = \frac{a}{b}$$

$\Rightarrow \tan x = -\frac{a}{b}$

Multiplicamos (1) × (2):

$(-3\cos x\text{sen}^2x)(3\text{sen}x\cos^2x) = ab$

$-9(\text{sen}x\cos x)^3 = ab \Rightarrow$ del triángulo: $\begin{cases} \text{sen}x = -\frac{a}{h} \\ \cos x = \frac{b}{h} \end{cases}$

$$-9\left(-\frac{a}{h}\frac{b}{h}\right)^3 = ab \Rightarrow \frac{9a^3b^3}{h^6} = ab \Rightarrow 9a^2b^2 = h^6$$

Como $h^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore\ 9a^2b^2 = (a^2 + b^2)^3$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Reducir: $S = \dfrac{\cos 3\alpha\,\text{sen}3\alpha}{4\cos^2 2\alpha - 1}$

Resolución:

$$S = \frac{\cos 3\alpha\,\text{sen}3\alpha}{2(2\cos^2 2\alpha) - 1} = \frac{\cos 3\alpha\,\text{sen}3\alpha}{2(1+\cos 4\alpha) - 1}$$

$$S = \frac{\text{sen}2\alpha\cos 3\alpha\,\text{en}3\alpha}{\text{sen}2\alpha\,(2\cos 4\alpha + 1)}$$

Como: $\text{sen}x(2\cos 2x + 1) = \text{sen}3x$

$$S = \frac{\text{sen}2\alpha\cos 3\alpha\,\text{sen}3\alpha}{\text{sen}3(2\alpha)}$$

$$S = \frac{\text{sen}2\alpha\cos 3\alpha\,\text{sen}3\alpha}{2\text{sen}3\alpha\cos 3\alpha} \quad \therefore\ S = \frac{1}{2}\text{sen}2\alpha$$

2. Si: $\cot(30° + x) = \frac{2}{5}$, hallar $\tan 3x$

Resolución:

De: $\cot(30° + x) = \frac{2}{5} \Rightarrow \tan(30° + x) = \frac{5}{2}$

Observemos que:

$3(30° + x) = 90° + 3x$

$\tan 3(30° + x) = \tan(90° + 3x)$

si: $(30° + x) = \theta \Rightarrow \tan 3\theta = -\cot 3x$

$$\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} = -\cot 3x$$

$$\frac{3\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^3}{1-3\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{65}{142} = -\cot 3x \quad \therefore\ \tan 3x = -\frac{142}{65}$$

3. Reducir: $M = \dfrac{\cos 80°\text{sen}70°}{\csc 50°}$

Resolución:

$$M = \frac{\cos 80°\text{sen}70°}{\csc 50°} = \frac{\text{sen}10°\text{sen}70°}{\frac{1}{\text{sen}50°}}$$

$M = \text{sen}10°\text{sen}50°\text{sen}70°$

$4M = 4\,\text{sen}10°\text{sen}(60° - 10°)\text{sen}(60° + 10°)$

Se sabe: $4\text{sen}x\text{sen}(60° - x)\text{sen}(60° + x) = \text{sen}3x$

$4M = \text{sen}3(10°) = \text{sen}30°$

$4M = \frac{1}{2} \quad \therefore M = \frac{1}{8}$

4. Simplificar: $E = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\pi$

Resolución:

$$E = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}\overbrace{\cos\pi}^{-1}$$

$$2E = 2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}$$

$$2E = \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}$$

Notemos que: $\frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7} = -\cos\frac{5\pi}{7}$

Reemplazando se obtiene:

$$2E = \underbrace{\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}}_{\text{propiedad conocida}}$$

$$2E = \frac{1}{2} \quad \therefore\ E = \frac{1}{4}$$

5. Si:
$N = \text{sen}7\alpha\csc\alpha$;
$I = \cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos6\alpha$, calcular:
$U = N - 2I$

Resolución:

$$U = \text{sen}7\alpha\csc\alpha - 2(\cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos6\alpha)$$

$$U = \frac{\text{sen}7\alpha}{\text{sen}\alpha} - 2\cos2\alpha - 2\cos4\alpha - 2\cos6\alpha$$

$$U = \frac{1}{\text{sen}\alpha}(\text{sen}7\alpha - 2\cos2\alpha\text{sen}\alpha - 2\cos4\alpha\text{sen}\alpha - 2\cos6\alpha\text{sen}\alpha)$$

$$U = \frac{1}{\text{sen}\alpha}[(\text{sen}7\alpha - (\text{sen}3\alpha - \text{sen}\alpha) - (\text{sen}5\alpha - \text{sen}3\alpha) - (\text{sen}7\alpha - \text{sen}5\alpha)]$$

$$U = \frac{1}{\text{sen}\alpha}(\text{sen}7\alpha - \text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha - \text{sen}5\alpha + \text{sen}3\alpha - \text{sen}7\alpha + \text{sen}5\alpha)$$

$$U = \frac{1}{\text{sen}\alpha}(\text{sen}\alpha) \Rightarrow U = 1$$

6. Simplificar: $N = \cos^4 80° + \cos^4 40° + \cos^4 20°$

Resolución:

Multipliquemos por 4:

$$4N = (2\cos^2 80°)^2 + (2\cos^2 40°)^2 + (2\cos^2 20°)^2$$

$$4N = (1 + \cos160°)^2 + (1 + \cos80°)^2 + (1 + \cos40°)^2$$

$$4N = 1 + 2\cos160° + \cos^2160° + 1 + 2\cos80° + \cos^2 80° + 1 + 2\cos40° + \cos^2 40°$$

$$4N = 3 + 2(\cos160° + \cos80° + \cos40°) + \cos^2160° + \cos^2 80° + \cos^2 40° \quad ...(I)$$

Sea: $A = \cos160° + \cos80° + \cos40'$

$\Rightarrow A = 2\text{oos}120°\cos40° + \cos40°$

$$A = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos40° + \cos40° \Rightarrow A = 0$$

Es decir:

$$A = \cos160° + \cos80° + \cos40° = 0 \quad ...(II)$$

Reemplacemos (II) en (I):

$$4N = 3 + 2(0) + \cos^2160° + \cos^2 80° + \cos^2 40°$$

Observemos que $\cos160° = -\cos20°$

Multiplicando por 2 resulta:

$$8N = 6 + 2\cos^2 20° + 2\cos^2 80° + 2\cos^2 40°$$

$$8N = 6 + 1 + \cos40° + 1 + \cos160° + 1 + \cos80°$$

$$8N = 9 + \underbrace{\cos160° + \cos80° + \cos40°}_{0}$$

$$8N = 9 \quad \therefore\ N = \frac{9}{8}$$

7. Simplificar y evaluar la expresión:

$$E = \frac{1 + \text{sen}64° + \cos64°}{1 + \text{sen}64° - \cos64°} + \csc32°$$

Resolución:

Cómo:

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2\text{sen}^2\frac{x}{2}$$

$$\text{sen}x = 2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Luego:

$$E = \frac{1 + \cos64° + \text{sen}64°}{1 - \cos64° + \text{sen}64°} + \csc32°$$

$$E = \frac{2\cos^2 32° + 2\text{sen}32°\cos32°}{2\text{sen}^2 32° + 2\text{sen}32°\cos32°} + \csc32°$$

$$E = \frac{2\cos32°(\cos32° + \text{sen}32°)}{2\text{sen}32°(\cos32° + \text{sen}32°)} + \frac{1}{\text{sen}32°}$$

$$E = \frac{1 + \cos32°}{\text{sen}32°} = \frac{2\cos^2 16°}{2\text{sen}16°\cos16°}$$

$$E = \frac{\cos16°}{\text{sen}16°} = \cot16° \quad \therefore E = \frac{24}{7}$$

8. Simplificar la expresión:

$$M = \frac{\tan x\left(\frac{3}{4} - \text{sen}^2x\right)\cot3x}{-\frac{3}{4} + \cos^2x}, \text{ si } x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

Resolución:

$$M = \frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x}\left(\frac{3}{4} - \text{sen}^2x\right)\cot3x}{\frac{-3 + 4\cos^2x}{4}}$$

$$M = \frac{\text{sen}x\left(\frac{3 - 4\text{sen}^2x}{4}\right)\cot3x}{\cos x\left(\frac{4\cos^2x - 3}{4}\right)}$$

$$M = \frac{(3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x)}{(4\cos^3x - 3\cos x)}\frac{\cos3x}{\text{sen}3x} \quad \therefore M = 1$$

9. Simplificar: $A = \dfrac{2\text{sen}2x - \text{sen}x}{\text{sen}3x + 4\text{sen}2x\text{sen}^2\frac{x}{2}}$

Resolución:

$$A = \frac{2\text{sen}2x - \text{sen}x}{\text{sen}3x + 2\text{sen}2x\underbrace{2\text{sen}^2\frac{x}{2}}_{1-\cos x}}$$

$$A = \frac{2\text{sen}2x - \text{sen}x}{\text{sen}3x + 2\text{sen}2x - \underbrace{2\text{sen}2x\cos x}_{\text{asuma}}}$$

$$A = \frac{2\text{sen}2x - \text{sen}x}{\text{sen}3x + 2\text{sen}2x - (\text{sen}3x + \text{sen}x)}$$

$$\therefore\ A = \frac{2\text{sen}2x - \text{sen}x}{2\text{sen}2x - \text{sen}x} = 1$$

10. Simplificar:

$$R = \frac{1 + \cos x + \cos(2x)}{\text{sen}x + \text{sen}(2x) + \text{sen}(3x)}$$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$$R = \frac{1 + \cos 2x + \cos x}{\underbrace{\text{sen}3x + \text{sen}x}_{\text{a producto}} + \text{sen}2x}$$

$$R = \frac{2\cos^2 x + \cos x}{2\text{sen}2x\cos x + \text{sen}2x}$$

$$R = \frac{\cos x(2\cos x + 1)}{\text{sen}2x(2\cos x + 1)}$$

$$R = \frac{\cos x}{2\text{sen}x\cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{sen}x}\right)$$

$$\therefore\ R = \frac{1}{2}\csc x$$

11. Calcular el máximo valor de:
$A = \cos(30° + x)\cos x$

Resolución:

Multipliquemos por 2 a A

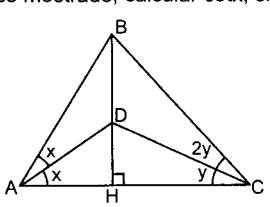
$$2A = \underbrace{2\cos(30° + x)\cos x}_{\text{a suma}}$$

$$2A = \cos(30° + 2x) + \cos 30°$$

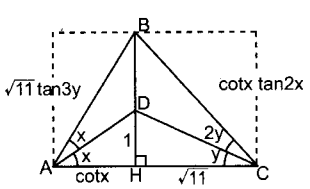
$$A_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\underbrace{\cos(30° + 2x)}_{\text{máx}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(1) + \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \therefore\ A_{\text{máx}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

12. Del gráfico mostrado, calcular cotx, si coty = $\sqrt{11}$



Resolución:



Se tiene que: $\sqrt{11}\tan 3y = \cot x \tan 2x$ ...(1)

Calculemos tan3y:

$$\tan 3y = \frac{3\tan y - \tan^3 y}{1 - 3\tan^2 y} = \frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

$$\tan 3y = \frac{4}{\sqrt{11}} \qquad ...(2)$$

(2) en (1):

$$4 = \cot x\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \Rightarrow 1 - \tan 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \cot x = \sqrt{2}$$

13. Reducir: $A = \sqrt{\frac{1 + \cos 20°}{2}} - \cos 10°$

Resolución:

Como: $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

$$A = \sqrt{\frac{2\cos^2 10°}{2}} - \cos 10°$$

$A = |\cos 10°| - \cos 10°$

$A = \cos 10° - \cos 10° \qquad \therefore\ A = 0$

14. Reducir:

$$S = \frac{\cos x}{\csc x - \tan\frac{x}{2}} - \frac{\cos x}{\csc x + \cot x}$$

Resolución:

Recordar que: $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$

$\cot\frac{x}{2} = \csc x + \cot x$

Reemplazando se tiene:

$$S = \frac{\cos x}{\csc x - (\csc x - \cot x)} - \frac{\cos x}{\cot\frac{x}{2}}$$

$$S = \cos x\left(\frac{1}{\cot x} - \frac{1}{\cot\frac{x}{2}}\right)$$

$$S = \cos x\left(\tan x - \tan\frac{x}{2}\right)$$

$S = \cos x[\tan x - (\csc x - \cot x)]$

$S = \cos x[\tan x + \cot x - \csc x]$

$$S = \cos x\left(\sec x\csc x - \frac{1}{\text{sen}x}\right)$$

$$S = \underbrace{\cos x\sec x}_{1}\csc x - \frac{\cos x}{\text{sen}x}$$

$$S = \csc x - \cot x \qquad \therefore\ S = \tan\frac{x}{2}$$

15. Simplificar:

$$S = \frac{\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}}{\tan x + \cot x}, \forall x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Resolución:

Sabemos que:

$\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos 2x + 1)$

$\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$

Reemplanzando en S:

$$S = \frac{2\cos 2x + 1 - (2\cos 2x - 1)}{\sec x \csc x}$$

$$S = \frac{2}{\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

$S = 2\operatorname{sen}x\cos x \quad \Rightarrow S = \operatorname{sen}2x$

16. Si $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$, hallar: $\cos 2x$

sabiendo que: $\frac{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} = \frac{2}{3}$

Resolución:

$$\frac{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1 - 3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \frac{2}{3}$$

$3 - 9\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = 2 - 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow (2\operatorname{sen}x\cos x)^2 = \frac{4}{5}$

$\operatorname{sen}^2 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 - \cos^2 2x = \frac{4}{5}$

$\cos 2x \Rightarrow \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad \cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Como $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle \Rightarrow 2x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow 2x \in \text{IIIC}$

Luego, sólo es posible: $\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

17. Reducir:

$$K = \tan\frac{x}{2} + 2\cot x$$

Resolución:

Por identidades:

$K = \csc x - \cot x + 2\cot x$

$K = \csc x + \cot x \quad \therefore K = \cot\frac{x}{2}$

18. Para la expresión trigonométrica:
$E(x) = (\operatorname{sen}x + \cos x)^4 + (\operatorname{sen}x - \cos x)^4$;
hallar el menor:
$T > 0$ tal que $E(x) = E(x + T), \forall x \in \mathbb{R}$

Resolución:

$E(x) = [(\operatorname{sen}x + \cos x)^2]^2 + [(\operatorname{sen}x - \cos x)^2]^2$

Aplicando la propiedad:

$(\operatorname{sen}x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \operatorname{sen}2x$

Tenemos:

$E(x) = (1 + \operatorname{sen}2x)^2 + (1 - \operatorname{sen}2x)^2$

$E(x) = 2(1 + \operatorname{sen}^2 2x)$

$E(x) = 2 + 1 - \cos 2(2x) = 2 + 1 - \cos 2(2x)$

$E(x) = 3 - \cos 4x$

Nos piden el menor $T > 0$, tal que:

$E(x) = E(x + T), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 3 - \cos 4x = 3 - \cos(4x + 4T)$

$\cos 4x = \cos(4x + 4T), \forall x \in \mathbb{R}$

$4T = 2\pi \quad \therefore T = \frac{\pi}{2}$

19. Calcular:
$A = (\cot 15° - 4)^2 + (\cot 67°30' + 1)^2$

Resolución:

Siendo: $\cot y = \csc 2y + \cot 2y$

Apliquemos:

$A = (\csc 30° + \cot 30° - 4)^2 + (\csc 135° + \cot 135° + 1)^2$

$A = (2 + \sqrt{3} - 4)^2 + (\sqrt{2} - 1 + 1)^2$

$A = (\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{2}^2 = 7 - 4\sqrt{3} + 2$

$\therefore A = 9 - 4\sqrt{3}$

20. Si: $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$, reducir:

$$M = \left| \frac{\operatorname{sen}x + \cos x + 1}{\operatorname{sen}x - \cos x + 1} \right|$$

Resolución:

Se sabe que:

$\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

$1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

$$M = \left| \frac{\operatorname{sen}x + 1 + \cos x}{\operatorname{sen}x + 1 - \cos x} \right|$$

$$M = \left| \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} \right|$$

$$M = \left| \frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)} \right| = \left|\cot\frac{x}{2}\right|$$

Como $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \in \text{IIC} \Rightarrow \cot\frac{x}{2} < 0 \quad \therefore M = -\cot\frac{x}{2}$

21. Simplificar: $Q = \csc x\sec 2x\operatorname{sen}4x$

Resolución:

Como: $Q = \csc x\sec 2x\operatorname{sen}4x$

Luego:

$Q = \csc x\underbrace{\sec 2x(2\operatorname{sen}2x\cos 2x)}_{1}$

$Q = \underbrace{2\csc x(2\operatorname{sen}x\cos x)}_{1}$

$\therefore Q = 4\cos x$

22. Si: $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$; reducir:

$$R = \sqrt{1 + \operatorname{sen}x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}x}$$

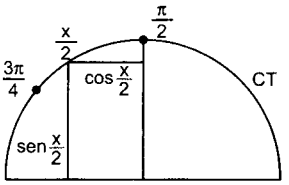
Resolución:

Se sabe que: $1 \pm \operatorname{sen}x = \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2}\right)^2$

$$R = \sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$R = \left|\text{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| - \left|\text{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right|$$

Como $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$



Como: $\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| > \left|\cos\frac{x}{2}\right|$

$$\text{sen}\frac{x}{2} > -\cos\frac{x}{2} \Rightarrow \text{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} > 0 \qquad ...(1)$$

Además:

$$\text{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \text{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} > 0 \qquad ...(2)$$

Teniendo en cuenta a (1) y (2) la expresión **R** equivale a:

$$R = \text{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - \left(\text{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore\ R = 2\cos\frac{x}{2}$$

23. Hallar el equivalente de:

$$M = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}}} + \sqrt{\frac{2}{1+\cos\frac{\theta}{2}}}$$

Si: $(8k+3)\pi < \theta < 4(2k+1)\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Resolución:

Como: $\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$$\left|\sec\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{2}{1+\cos x}}$$

$$M = \left|\tan\frac{\theta}{4}\right| + \left|\sec\frac{\theta}{4}\right| \qquad ...(1)$$

Dato:

$8k\pi + 3\pi < \theta < 8k\pi + 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{8k\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{4} < \frac{8k\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}$$

$$2k\pi + \frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{4} < 2k\pi + \pi$$

$$\frac{3\pi}{4} < \underbrace{\frac{\theta}{4} - 2k\pi}_{\in \text{IIC}} < \pi$$

Si: $\left(\frac{\theta}{4} - 2k\pi\right) \in \text{IIC} \Rightarrow \frac{\theta}{4} \in \text{IIC}$

En (1):

$$M = \underbrace{\left|\tan\frac{\theta}{4}\right|}_{(-)} + \underbrace{\left|\sec\frac{\theta}{4}\right|}_{(-)},\ \frac{\theta}{4} \in \text{IIC}$$

$$M = -\tan\frac{\theta}{4} + \left(-\sec\frac{\theta}{4}\right)$$

$$M = -\left[\sec\frac{\theta}{4} + \tan\frac{\theta}{4}\right]$$

$$M = \underbrace{\left[\csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{4}\right)\right]}$$

Aplicando: $\csc x + \cot x = \cot\frac{x}{2}$

$$M = -\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{8}\right) \qquad \therefore\ M = \cot\left(\frac{\theta}{8} - \frac{\pi}{4}\right)$$

24. Simplificar:

$$T = \frac{2\cos 2\alpha - 1}{\text{sen}4\alpha} + \frac{2\cos 4\alpha - 1}{\text{sen}8\alpha} + \frac{2\cos 8\alpha - 1}{\text{sen}16\alpha} \text{ ...n términos}$$

Resolución:

$$T = \frac{2\cos 2\alpha - 1}{\text{sen}4\alpha} + \frac{2\cos 4\alpha - 1}{\text{sen}8\alpha} + \frac{2\cos 8\alpha - 1}{\text{sen}16\alpha} + ... + \frac{2\cos 2^n\alpha - 1}{\text{sen}2^{n+1}\alpha}$$

Cada término tiene la forma:

$$\frac{2\cos x - 1}{\text{sen}2x} = \frac{2\cos x}{\text{sen}2x} - \frac{1}{\text{sen}2x}$$

$$= \frac{2\cos x}{2\text{sen}x\cos x} - \csc 2x$$

$$= \frac{1}{\text{sen}x} - \csc 2x$$

$$T = \csc 2\alpha - \csc 4\alpha + \csc 4\alpha - \csc 8\alpha + \csc 8\alpha - \csc 16\alpha + \csc 2^n\alpha - \csc 2^{n+1}\alpha$$

Reduciendo resulta: $T = \csc 2\alpha - \csc 2^{n+1}\alpha$

25. Si: $\text{sen}x = \frac{3}{4}$, $\quad \frac{x}{2} \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Hallar el valor de: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

Resolución:

Con lo que piden:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-[-\text{sen}x]}{1+[-\text{sen}x]}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{7} \qquad ...(1)$$

Dato: $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}}_{} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \in \text{IIC}$$

En (1): $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = -\sqrt{7}$

26. Si: $\tan\frac{5\pi}{24} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{5\pi}{12}}{2\left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)}}$

Hallar n.

Resolución:

Como: $\tan\frac{5\pi}{24} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{5\pi}{12}}{1+\cos\frac{5\pi}{12}}}$

Reemplazando en el dato:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{12}}{1+\cos\frac{5\pi}{12}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{12}}{2\left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)}}$$

$$\frac{1}{1+\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{2\left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)}$$

$$2\cos^2\frac{5\pi}{24} = 2\left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)$$

Como: $\cos\frac{5\pi}{24} = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{24}$; $\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}\right)$

$$\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{24} = \left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)$$

$$1-\cos^2\frac{7\pi}{24} = \left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)$$

$$\left(1+\cos\frac{7\pi}{24}\right)\left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right) = \left(1-\cos\frac{7\pi}{24}\right)(1-n)$$

$$1+\cos\frac{7\pi}{24} = 1-n$$

$$\cos\frac{7\pi}{24} = -\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{24}\right) = -\cos\frac{17\pi}{24}$$

$$\Rightarrow -\cos\frac{17\pi}{24} = -n \qquad \therefore\ n = \cos\frac{17\pi}{24}$$

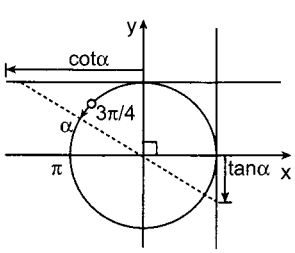
27. Si: $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = \frac{17}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, calcula: $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

Resolución:

Con el dato: $\underbrace{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha - 2}_{(\tan\alpha - \cot\alpha)^2 = \frac{9}{4}} = \frac{17}{4} - 2$

$|\tan\alpha - \cot\alpha| = \frac{3}{2}$ ...(1)

Pero: $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$



Se nota: $0 > \tan\alpha > \cot\alpha$

$\tan\alpha - \cot\alpha > 0$

$\underbrace{|\tan\alpha - \cot\alpha|}_{(+)} = \tan\alpha - \cot\alpha$

En (1): $\tan\alpha - \cot\alpha = \frac{3}{2}$

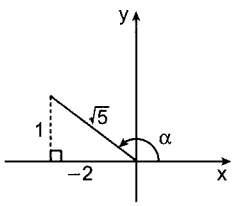
$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$2\tan^2\alpha\ 3\tan\alpha - 2 = 0$$

Al resolver: $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ (si) ($\alpha \in$ IIC)

$\tan\alpha = 2$ (no)

Luego: $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$



Nos piden: $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Si: $\left.\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{8} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\frac{\alpha}{2} \in$ IC

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}}$$

Reduciendo:

$$\therefore\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}$$

28. Si en un △ABC se cumple:

$\tan\frac{A}{4} + \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \csc(B+C)$

¿De qué tipo de triángulo se trata?

Resolución:

Como: $A + B + C = 180°$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$$

En lo que piden: $\tan\frac{A}{4} + \cot\frac{A}{2} = \csc(B+C)$

Como: $A + (B + C) = 180°$

$\Rightarrow \csc(B+C) = \csc A$

$\tan\frac{A}{4} + \cot\frac{A}{2} = \csc A$

Como: $\tan\theta = \csc 2\theta - \cot 2\theta$

$\csc\frac{A}{2} - \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{A}{2} = \csc A$

$\csc\frac{A}{2} = \csc A$

$\Rightarrow \frac{A}{2} + A = 180°$

$A = 120°$

Por lo tanto el △ABC es obtusángulo.

29. Calcular: $P = \dfrac{4\cos\frac{\pi}{10} - 3\sec\frac{\pi}{10}}{\tan\frac{\pi}{10}}$

Resolución:

$P = \dfrac{4\cos 18° - 3\sec 18°}{\tan 18°}$

A senos y cosenos

$P = \dfrac{4\cos^2 18° - 3}{\operatorname{sen} 18°}$

Multiplicando y dividiendo por cos18°

$P = \dfrac{4\cos^3 18° - 3\cos 18°}{\operatorname{sen}18°\cos 18°}$

$P = \dfrac{2}{2}\left(\dfrac{\cos 3(18°)}{\operatorname{sen}18°\cos 18°}\right) \Rightarrow P = \dfrac{2\cos 54°}{\operatorname{sen}36°}$

Como: sen36° = cos54° $\therefore$ P = 2

30. Si: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{6} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{3} - \dfrac{\cos 2x}{2}$

Calcular: $T = \dfrac{\sqrt[3]{\cos\theta}}{\sqrt{\cos 2x}}$

Resolución:

Del dato:

$\operatorname{sen}^2\theta = 2\operatorname{sen}^2 3x - 3\cos 2x$

$\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 6x) - 3\cos 2x$

$\cos 6x + 3\cos 2x = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$

$(4\cos^3 2x - 3\cos 2x) + 3\cos 2x = \cos^2\theta$

$4\cos^3 2x = \cos^2\theta$

Sacando raíz sexta: $\pm\sqrt[6]{4}\sqrt{\cos 2x} = \sqrt[3]{\cos\theta}$

Luego: $\dfrac{\sqrt[3]{\cos\theta}}{\sqrt{\cos 2x}} = \pm\sqrt[6]{4}$ $\therefore T = \pm\sqrt[3]{2}$

31. Simplificar:

R = cosxcos2xcos4x ...n términos

Resolución:

Como:

$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

En el problema:

$R = \dfrac{\operatorname{sen}2x}{2\operatorname{sen}x}\left(\dfrac{\operatorname{sen}4x}{2\operatorname{sen}2x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}8x}{2\operatorname{sen}4x}\right)\ldots$

$\ldots\dfrac{\operatorname{sen}2^{n-1}x}{2\operatorname{sen}^{n-2}x}\left(\dfrac{\operatorname{sen}2^n x}{2\operatorname{sen}2^{n-1}x}\right)$

$\therefore$ Reduciendo: $R = \dfrac{\operatorname{sen}2^n x}{2^n\operatorname{sen}x}$

32. Reducir en términos de x

$P = \dfrac{(\cos\theta + \operatorname{sen}\phi)(\cos\theta - \operatorname{sen}\phi)}{1 + \cot^2(\theta - \phi)}$

Si: $\cos\theta\cos\phi = \operatorname{sen}x$

$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \cos x$

Resolución:

$P = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\phi}{\csc^2(\theta - \phi)}$

Se sabe que:

$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\phi = \cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$

$\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\phi = \operatorname{sen}(\theta + \phi)\operatorname{sen}(\theta - \phi)$

Luego: $P = \dfrac{\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta - \phi)}}$

$P = \cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)\operatorname{sen}^2(\theta - \phi)$

De los datos:

Sumando: $\cos(\theta - \phi) = \operatorname{sen}x + \cos x$

Restando: $\cos(\theta + \phi) = \operatorname{sen}x - \cos x$

Elevando al cuadrado:

$\cos^2(\theta - \phi) = (\operatorname{sen}x + \cos x)^2$

$1 - \operatorname{sen}^2(\theta - \phi) = 1 + \operatorname{sen}2x$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2(\theta - \phi) = -\operatorname{sen}2x$

Reemplazando en P

$P = (\operatorname{sen}x - \cos x)(\operatorname{sen}x + \cos x)(-\operatorname{sen}2x)$

$P = (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(-\operatorname{sen}2x)$

$P = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}2x$

$P = \cos 2x\operatorname{sen}2x$

$P = \dfrac{1}{2}(2\operatorname{sen}2x\cos 2x)$ $\therefore P = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}4x$

33. Simplificar:

$E = (1 - \tan^2 x)(1 - \tan^2 2x)(1 - \tan^2 4x)$ ... 6 términos en total.

Resolución:

Se sabe que: $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Luego $1 - \tan^2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{\tan 2\theta}$

En el problema:

$E = \dfrac{2\tan x}{\tan 2x}\left(\dfrac{2\tan 2x}{\tan 4x}\right)\left(\dfrac{2\tan 4x}{\tan 8x}\right)\left(\dfrac{2\tan 8x}{\tan 16x}\right)\left(\dfrac{2\tan 16x}{\tan 32x}\right)\left(\dfrac{2\tan 32x}{\tan 64x}\right)$

$\therefore E = \dfrac{64\tan x}{\tan 64x}$

34. Simplificar: $T = \dfrac{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}{\sec^4 x}$

Resolución:

A senos y cosenos y efectuando:

$T = \dfrac{\dfrac{\cos^4 x - 6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}}{\dfrac{1}{\cos^4 x}}$

$T = (\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x) - 6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$T = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$T = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$T = 1 - 2(2\operatorname{sen}x\cos x)^2$

$T = 1 - 2(\operatorname{sen}2x)^2$ $\therefore T = \cos 4x$

35. Reducir: $S = (\sec x + \csc x)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Resolución:

$S = \left(\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\right)\left(\cos x\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen}x\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$S = \left(\dfrac{\operatorname{sen}x + \cos x}{\operatorname{sen}x\cos x}\right)(\cos x - \operatorname{sen}x)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \sqrt{2}\,\frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{2\text{sen}x\cos x} = \sqrt{2}\,\frac{\cos 2x}{\text{sen}2x}$$

$\therefore\ S = \sqrt{2}\cot 2x$

36. Dado la ecuación: $2x^3 - 3x^2 - 6x + 1 = 0$, una de sus raíces es $\tan\theta$.
Calcular $\tan 6\theta$

Resolución:

Si $\tan\theta$ es una raíz, debe de satisfacer a la ecuación, luego:

$2\tan^3\theta - 3\tan^2\theta - 6\tan\theta + 1 = 0$

$1 - 3\tan^2\theta = 2(3\tan\theta - \tan^3\theta)$

$$\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 3\theta = \frac{1}{2}$$

Se sabe que: $\tan 6\theta = \dfrac{2\tan 3\theta}{1 - \tan^2 3\theta}$

$$\tan 6\theta = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \qquad \therefore\ \tan 6\theta = \frac{4}{3}$$

37. Hallar $2\cos\theta$ si:
$\tan^2\theta + \tan^2 x + \tan^2 2x = \tan^2 x \tan^2 2x$

Resolución:

$\tan^2\theta = -\tan^2 x - \tan^2 2x + \tan^2 x\,\tan^2 2x$

sumando 1 y factorizando el segundo miembro:
$1 + \tan^2\theta = (1 - \tan^2 x)(1 - \tan^2 2x)$

$$\sec^2\theta = \left(\frac{2\tan x}{\tan 2x}\right)\left(\frac{2\tan 2x}{\tan 4x}\right)$$

$$\sec^2\theta = \frac{4\tan x}{\tan 4x} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{\tan 4x}{4\tan x}$$

$$\therefore\ 2\cos\theta = \sqrt{\frac{\tan 4x}{\tan x}}$$

38. Simplificar: $T = (\text{sen}3x + \text{sen}^3 x)\csc 2x$

Resolución:

$$T = \frac{(3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x + \text{sen}^3 x)}{\text{sen}2x}$$

Simplificando: $T = \dfrac{3\text{sen}x - 3\text{sen}^3 x}{2\text{sen}x\cos x}$

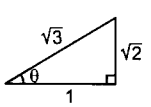
Simplificando: $T = \dfrac{3(1 - \text{sen}^2 x)}{2\cos x} = \dfrac{3\cos^2 x}{2\cos x}$

$\therefore\ T = 1{,}5\cos x$

39. Calcular: $P = (\text{sen}2\theta + \text{sen}4\theta)^{-1}$
Si: $\tan\theta = \sqrt{2} \wedge \theta \in \text{IIIC}$

Resolución:

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow$



Como: $\theta \in \text{IIIC}\ \begin{cases} \text{sen}\theta = -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \cos\theta = -1/\sqrt{3} \end{cases}$

Luego:

- $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cot\theta = 2\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Finalmente, usando $\text{sen}4\theta = 2\text{sen}2\theta\cos 2\theta$

$$P = \frac{1}{\text{sen}2\theta + \text{sen}4\theta} = \frac{1}{\text{sen}2\theta(1 + 2\cos 2\theta)}$$

$$P = \frac{1}{2\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)} \qquad \therefore\ P = \frac{9}{4}\sqrt{2}$$

40. Resolver el sistema y obtener y
$x\text{sen}\theta + y\text{sen}2\theta = \text{sen}3\theta$
$x\text{sen}\phi + y\text{sen}2\phi = \text{sen}3\phi$

Resolución:

De la primera ecuación:

$x\text{sen}\theta + y(2\text{sen}\theta\cos\theta) = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta$

$\Rightarrow x + 2y\cos\theta = 3 - 4\text{sen}^2\theta \qquad \ldots(1)$

Análogamente con la segunda ecuación:

$x + 2y\cos\phi = 3 - 4\text{sen}^2\phi \qquad \ldots(2)$

Restando (1) – (2):

$2y(\cos\theta - \cos\phi) = 4(\text{sen}^2\phi - \text{sen}^2\theta)$

$y(\cos\theta - \cos\phi) = 2(1 - \cos^2\phi - 1 + \cos^2\theta)$

$y(\cos\theta - \cos\phi) = 2(\cos^2\theta - \cos^2\phi)$

$$y = 2\frac{(\cos^2\theta - \cos^2\phi)}{\cos\theta - \cos\phi} \qquad \therefore\ y = 2(\cos\theta + \cos\phi)$$

41. Hallar n si: $\dfrac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \dfrac{1}{2}(\tan^n x + \cot^n x)$

Resolución:

$$\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{2\text{sen}^2 2x}$$

$$= \frac{2 + 2\cos^2 2x}{2\text{sen}^2 2x}$$

$$= \frac{1 + \cos^2 2x}{\text{sen}^2 2x}$$

$$= \csc^2 2x + \cot^2 2x$$

$$= \frac{1}{4}[(2\csc 2x)^2 + (2\cot 2x)^2] \qquad \ldots(I)$$

Por fórmulas especiales del doble:
$2\csc 2x = \cot x + \tan x$
$2\cot 2x = \cot x - \tan x$

Entonces en (I) se tiene:

$$\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \frac{1}{4}[\cot x + \tan x)^2 + (\cot x - \tan x)^2]$$

$$= \frac{1}{4}[2(\cot^2 x + \tan^2 x)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cot^2 x + \tan^2 x)$$

y comparando con el segundo miembro de la igualdad que se va a demostrar por lo tanto n = 2

42. Calcular:
$N = \tan 3° + \tan 6° + \sec 6° \tan 9° + 2\cot 18°$

Resolución:
Se sabe: $2\cot 2\theta = \cot\theta - \tan\theta$
Luego:
$N = \tan 3° + \tan 6° + \sec 6° \tan 9° + \cot 9° - \tan 9°$
$N = \cot 9° + \tan 3° + \tan 6° + (\sec 6° - 1)\tan 9°$
$N = \cot 9° + \underbrace{\tan 3° + \tan 6° + (\tan 6° \tan 3°)\tan 9°}_{\tan 9°}$
pues por propiedad de ángulos compuestos:
$\tan x + \tan y + \tan x \tan y \tan(x + y) = \tan(x + y)$
Luego se tiene:
$N = \cot 9° + \tan 9°$
$N = 2\csc 18° = 2\left(\frac{4}{\sqrt{5} - 1}\right)$
$\therefore\ N = 2(\sqrt{5} + 1)$

43. Simplificar: $T = \dfrac{4\tan x(1 - \tan^2 x)^2}{2\sec^4 x - \sec^6 x}$

Resolución:
A senos y cosenos y efectuando:

$$T = \frac{\dfrac{4\operatorname{sen}x}{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)^2}{\dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos^6 x}}$$

$$T = \frac{\dfrac{4\operatorname{sen}x(\cos 2x)^2}{\cos^5 x}}{\dfrac{\cos 2x}{\cos^6 x}}$$

Simplificando: $T = 4\operatorname{sen}x\cos x(\cos 2x)$
$T = 2\operatorname{sen}2x\cos 2x \quad \therefore\ T = \operatorname{sen}4x$

44. Hallar x si: $\dfrac{x + x^{-1}}{2} = \dfrac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$

Resolución:
Se sabe que: $\tan^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
Luego:

- $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}2\theta}{1 - \operatorname{sen}2\theta}$
- $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}2\theta}{1 + \operatorname{sen}2\theta}$

Reemplazando:

$$\frac{x + x^{-1}}{2} = \frac{\dfrac{1 + \operatorname{sen}2\theta}{1 - \operatorname{sen}2\theta} + \dfrac{1 - \operatorname{sen}2\theta}{1 + \operatorname{sen}2\theta}}{\dfrac{1 + \operatorname{sen}2\theta}{1 - \operatorname{sen}2\theta} - \dfrac{1 - \operatorname{sen}2\theta}{1 + \operatorname{sen}2\theta}}$$

$$\frac{x + x^{-1}}{2} = \frac{(1 + \operatorname{sen}2\theta)^2 + (1 - \operatorname{sen}2\theta)^2}{(1 + \operatorname{sen}2\theta)^2 - (1 - \operatorname{sen}2\theta)^2}$$

$$\frac{x + x^{-1}}{2} = \frac{2(1 + \operatorname{sen}^2 2\theta)}{4\operatorname{sen}2\theta}$$

$$x + x^{-1} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 2\theta}{\operatorname{sen}2\theta}$$

$x + x^{-1} = \csc 2\theta + \operatorname{sen}2\theta$
Comparando se tienen dos posibilidades:

- $x = \csc 2\theta$
- $x = \operatorname{sen}2\theta$

Luego, existen 2 respuestas para x
$\csc 2\theta \vee \operatorname{sen}2\theta$

45. Calcular: $T = 2\cos 2x + 3\cos 2y + 2\operatorname{sen}2x + 3\operatorname{sen}2y$
Si: $\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}\cos\left(y - \frac{\pi}{8}\right)$

Resolución:
El dato, se eleva al cuadrado:
$2\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 3\cos^2\left(y - \frac{\pi}{8}\right)$
Usando las fórmulas de degradación:
$\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right) = 3\left(\frac{1 + \cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)$$

$2 - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 3 + 3\cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right)$
$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
Efectuando los ángulos compuestos:
$2(\cos 2x + \operatorname{sen}2x)\frac{\sqrt{2}}{2} + 3(\cos 2y + \operatorname{sen}2y)\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$
$2(\cos 2x + \operatorname{sen}2x) + 3(\cos 2y + \operatorname{sen}2y) = -\sqrt{2}$
$\therefore\ T = -\sqrt{2}$

46. Dado la ecuación: $a\sec 2x + b\csc 2x = c$
Obtener: $R = \dfrac{(a + c)\tan x + (a - c)\cot x}{\tan^2 x - \cot^2 x}$

Resolución:
Se sabe: $\sec 2x = \dfrac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$

$\csc 2x = \dfrac{1 + \tan^2 x}{2\tan x}$

Reemplazando en la ecuación:
$a\left(\dfrac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}\right) + b\left(\dfrac{1 + \tan^2 x}{2\tan x}\right) = c$

Efectuando: $\dfrac{2a\tan x(1 + \tan^2 x) + b(1 - \tan^4 x)}{2\tan x - 2\tan^3 x} = c$

Realizando las operaciones necesarias:
$2\tan^3 x(a + c) + 2\tan x(a - c) = b(\tan^4 x - 1)$
Dividiendo entre $2\tan^2 x$

$(a + c)\tan x + \dfrac{(a - c)}{\tan x} = \dfrac{b(\tan^4 x - 1)}{2\tan^2 x}$

$(a + c)\tan x + (a - c)\cot x = \dfrac{b}{2}(\tan^2 x - \cot^2 x)$

Luego: $\dfrac{(a+c)\tan x+(a-c)\cot x}{\tan^2 x-\cot^2 x}=\dfrac{b}{2}$

$\therefore\ R=\dfrac{b}{2}$

47. Reducir: $T=\dfrac{(\tan 8x+\tan 2x)^2-(\tan 8x-\tan 2x)^2}{(\sec 4x-1)(\sec 8x+1)}$

Resolución:

Efectuando en el numerador:

$T=\dfrac{4\tan 8x\tan 2x}{(\sec 4x-1)(\sec 8x+1)}$

y por fórmulas del doble: $\sec 2\theta+1=\dfrac{\tan 2\theta}{\tan\theta}$

$\sec 2\theta-1=\tan 2\theta\tan\theta$

Se tiene: $T=\dfrac{4\tan 8x\tan 2x}{(\tan 4x\tan 2x)\left(\dfrac{\tan 8x}{\tan 4x}\right)}$

$\therefore\ T=4$

48. Si: $\csc 2x-\cot 2x=\sqrt{a}$, $x\in\langle\pi;\dfrac{3\pi}{2}\rangle$

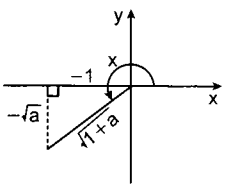
Calcular: $\tan\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)$

Resolución:

Como: $\tan\theta=\csc 2\theta-\cot 2\theta$

Dato: $\csc 2x-\cot 2x=\sqrt{a}$

$\Rightarrow\ \tan x=\sqrt{a}$, $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$



Piden: $\tan\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=\cot\dfrac{x}{2}$

Se sabe: $\cot\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Como: $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{3\pi}{4}\ \Rightarrow\ \dfrac{x}{2}\in$ IIC

$\cot\dfrac{x}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1+a}}\right)}{1-\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1+a}}\right)}}$

$\therefore\ \cot\dfrac{x}{2}=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+a}-1}{\sqrt{1+a}+1}}$

49. Si: $\text{sen}1^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{10+x}{20}}}{2}}}{2}}$

Hallar x

Resolución:

Como: $\text{sen}1^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2^\circ}{2}}$

En el dato: $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{10+x}{20}}}{2}}}{2}}$

$1-\cos 2^\circ=1-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{10+x}{20}}}{2}}$

$\sqrt{\dfrac{1+\cos 4^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{10+x}{20}}}{2}}$

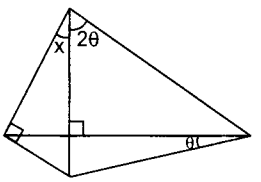
$1+\cos 4^\circ=1+\sqrt{\dfrac{10+x}{20}}$

$\sqrt{\dfrac{1+\cos 8^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{10+x}{20}}$

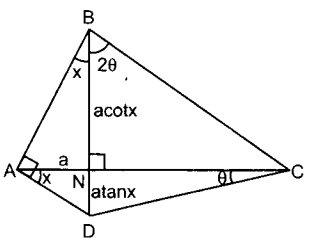
$\dfrac{1+\cos 8^\circ}{2}=\dfrac{10+x}{20}$

$1+\dfrac{7}{5\sqrt{2}}=\dfrac{10+x}{10}\qquad\therefore\ x=7\sqrt{2}$

50. Hallar el equivalente de cosx



Resolución:



- ◺BNC: $NC=a\cot x\tan 2\theta$
  ◺DNC: $NC=a\tan x\cot\theta$

$\Rightarrow\ a\cot x\tan 2\theta=a\tan x\cot\theta$

$\dfrac{1}{\tan x}\tan 2\theta=\tan x\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\tan 2\theta\tan\theta=\tan^2 x$

Se sabe que:

$\sec 2\theta-1=\tan 2\theta\tan\theta$

Luego: $\sec 2\theta-1=\tan^2 x$

$\sec 2\theta=1+\tan^2 x$

$\sec 2\theta=\sec^2 x\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\sec 2\theta}=\dfrac{1}{\sec^2 x}$

$\therefore\ \cos x=\sqrt{\cos 2\theta}$

51. Calcular: $T=\dfrac{1-\cot 68^\circ\cot 79^\circ+\sec 22^\circ}{2+\cot 68^\circ\cot 79^\circ-\sec 22^\circ}$

Resolución:

Como: $\cot 68^\circ=\tan 22^\circ\quad\cot 79^\circ=\tan 11^\circ$

$$T = \frac{1 - \tan 22°\tan 11° + \sec 22°}{2 + \tan 22°\tan 11° - \sec 22°}$$

Se sabe: $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$

$$T = \frac{1 - \tan 22°(\csc 22° - \cot 22°) + \sec 22°}{2 + \tan 22°(\csc 22° - \cot 22°) - \sec 22°}$$

$$T = \frac{1 - \tan 22°\csc 22° + \tan 22°\cot 22° + \sec 22°}{2 + \tan 22°\csc 22° - \tan 22°\cot 22° - \sec 22°}$$

$$T = \frac{1 - \frac{\text{sen}22°}{\cos 22°}\left(\frac{1}{\text{sen}22°}\right) + 1 + \sec 22°}{2 + \frac{\text{sen}22°}{\cos 22°}\left(\frac{1}{\text{sen}22°}\right) - 1 - \sec 22°}$$

$$T = \frac{1 - \frac{1}{\cos 22°} + 1 + \sec 22°}{2 + \frac{1}{\cos 22°} - 1 - \sec 22°}$$

$$T = \frac{2 - \sec 22° + \sec 22°}{1 + \sec 22° - \sec 22°} \Rightarrow T = \frac{2}{1} \quad \therefore T = 2$$

52. Reducir: $T = \text{sen}^3x\cos 3x + \cos^3x\,\text{sen}3x$

Resolución:

$T = \text{sen}^3x(4\cos^3x - 3\cos x) + \cos^3x(3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x)$

Efectuando y simplificando:

$T = 3\cos^3x\,\text{sen}x - 3\text{sen}^3x\cos x$

$T = 3\text{sen}x\cos x(\cos^2x - \text{sen}^2x)$

$2T = 3(2\text{sen}x\cos x)(\cos 2x)$

$2T = 3\text{sen}2x\cos 2x$

$4T = 3(2\text{sen}2x\cos 2x)$

$4T = 3\text{sen}4x \quad \therefore T = \frac{3}{4}\text{sen}4x$

53. Calcular: $M = \tan^2 2x - \tan 2x - 1$

Si $\tan^2x - \tan x - 1 = 0$

Resolución:

Del dato: $-\tan x = 1 - \tan^2x$

Se sabe: $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2x} = \frac{2\tan x}{-\tan x} = -2$

Luego: $M = (-2)^2 - (-2) - 1 \quad \therefore M = 5$

54. Reducir: $T = \frac{(1 + \cos 2x)(\csc 2x - \cot 2x)}{\text{sen}2x(1 + \cos x)(1 + \tan^2\frac{x}{2})}$

Resolución:

Se sabe: $1 + \cos\theta = 2\cos^2\theta/2$

$1 - \cos\theta = 2\text{sen}^2\theta/2$

$\csc\theta + \cot\theta = \cot\theta/2$

$\csc\theta - \cot\theta = \tan\theta/2$

Luego: $T = \frac{(2\cos^2x)(\tan x)}{(2\text{sen}x\cos x)\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(\sec^2\frac{x}{2}\right)}$

$$T = \frac{\cos x\tan x}{2\text{sen}x\underbrace{\cos^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}}_{1}}$$

$$T = \frac{\cot x\tan x}{2} \quad \therefore T = 1/2$$

55. Reducir:

$$S = \frac{(\text{sen}2x - \text{sen}x)(\text{sen}2x + \text{sen}x)}{(1 - \cos x + \cos 2x)(1 + \cos x + \cos 2x)}$$

Resolución:

$$S = \frac{(2\text{sen}x\cos x - \text{sen}x)(2\text{sen}x\cos x + \text{sen}x)}{(1 + \cos 2x - \cos x)(1 + \cos 2x + \cos x)}$$

$$S = \frac{\text{sen}^2x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)}{(2\cos^2x - \cos x)(2\cos^2x + \cos x)}$$

$$S = \frac{\text{sen}^2x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)}{\cos^2x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)}$$

$\therefore S = \tan^2x$

56. Evaluar: $S = \frac{\text{sen}^3 10° + \cos^3 20°}{\text{sen}10° + \cos 20°}$

Resolución:

Multiplicamos por 4, para degradar los cubos:

$$4S = \frac{4\text{sen}^3 10^8 + 4\cos^3 20°}{\text{sen}10° + \cos 20°}$$

Se sabe: $4\text{sen}^3\theta = 3\text{sen}\theta - \text{sen}3\theta$

$4\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta$

Luego:

$$4S = \frac{(3\text{sen}10° - \text{sen}30°) + (3\cos 20° + \cos 60°)}{\text{sen}10° + \cos 20°}$$

Simplificando: sen30° con cos60°

$$4S = \frac{3(\text{sen}10° + \cos 20°)}{\text{sen}10° + \cos 20°} \quad \therefore S = \frac{3}{4}$$

57. Reducir: $E = 3\cot x - \csc 2x - 5\cot 2x$

Resolución:

Multiplicando por 2

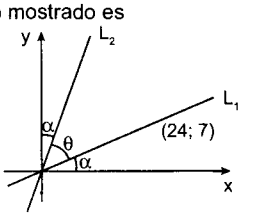
$2E = 6\cot x - 2\csc 2x - 5(2\cot 2x)$

y reemplazando fórmulas:

$2E = 6\cot x - (\cot x + \tan x) - 5(\cot x - \tan x)$

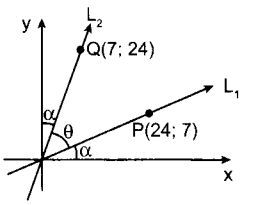
$2E = 4\tan x \quad \therefore E = 2\tan x$

58. El valor del ángulo θ que forman las rectas L_1 y L_2 del gráfico mostrado es



Resolución:

Del gráfico



Sea: OP = OQ $\Rightarrow$ Q(7; 24)

De la figura: $\theta + 2\alpha = 90°$

$\Rightarrow \cos\beta = \text{sen}2\alpha \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

Pero: $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$

Luego: $\cos\theta = \dfrac{336}{625} \quad \therefore\ \theta = \arccos\left(\dfrac{336}{625}\right)$

59. Si: $a\,\text{sen}\theta = \cos\phi + \cos2\phi$

$a\cos\theta = \text{sen}\phi + \text{sen}2\phi$

Hallar R en función de ϕ

$R = a^2\cos2\theta + \cos2\phi + \cos4\phi$

Resolución:

Elevando al cuadrado:

$a^2\text{sen}^2\theta = \cos^2\phi + \cos^2 2\phi + 2\cos\phi\cos2\phi$

$a^2\cos^2\theta = \text{sen}^2\phi + \text{sen}^2 2\phi + 2\text{sen}\phi\,\text{sen}2\phi$

Restando:

$a^2(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = \cos^2\phi - \text{sen}^2\phi +$

$+ \cos^2 2\phi - \text{sen}^2 2\phi + 2(\cos\phi\cos2\phi - \text{sen}\phi\,\text{sen}2\phi)$

Reemplazando fórmulas:

$a^2(-\cos2\theta) = \cos2\phi + \cos4\phi + 2\cos(2\phi + \phi)$

$0 = \underbrace{a^2\cos2\theta + \cos2\phi + \cos4\phi}_{R} + 2\cos3\phi$

$\therefore\ R = -2\cos3\phi$

60. Simplificar: $N = \dfrac{\cos^3 x}{\text{sen}x} - \dfrac{\text{sen}2x}{\cos2x} - \dfrac{\sec2x}{\csc2x} - \dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos x}$

Resolución:

Como: $\dfrac{\sec2x}{\csc2x} = \dfrac{\text{sen}2x}{\cos2x}$, entonces:

$N = \dfrac{\cos^3 x}{\text{sen}x} - \dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos x} - \dfrac{2\text{sen}2x}{\cos2x}$

$N = \dfrac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}{\text{sen}x\cos x} - 2\tan2x$

$N = \dfrac{2(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{2\text{sen}x\cos x}$

$N = \dfrac{2(1)\cos2x}{\text{sen}2x} - 2\tan2x$

$N = 2(\cot2x - \tan2x)$

Por fórmula especial del doble:

$\cot\theta - \tan\theta = 2\cot2\theta \quad \therefore\ N = 4\cot4x$

61. Eliminar x $\quad \cos(\theta - 3x) = m\cos^3 x$

$\text{sen}(\theta - 3x) = m\,\text{sen}^3 x$

Resolución:

Con los datos:

$4\cos(\theta - 3x) = m(4\cos^3 x)$

$4\text{sen}(\theta - 3x) = m(4\text{sen}^3 x)$

Degradando los cubos:

$4\cos(\theta - 3x) = m(3\cos x + \cos3x)$

$4\text{sen}(\theta - 3x) = m(3\text{sen}x - \text{sen}3x)$

$4\cos(\theta - 3x) - m\cos3x = 3m\cos x$

$4\text{sen}(\theta - 3x) + m\,\text{sen}3x = 3m\,\text{sen}3x$

Elevándolos al cuadrado y luego sumando miembro a miembro.

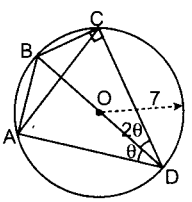
$16 + m^2 - 8m\cos[(\theta - 3x) + 3x] = 9m^2$

$16 - 8m\cos\theta = 8m^2$

De donde: $2 - m\cos\theta = m^2$

62. ABCD es un cuadrilátero inscriptible, en el cual $\overline{BD}$ es un diámetro de la circunferencia circunscrita. Si: AB = 3, CD = 7 y el ángulo BAC es el doble de ADB. Calcular el radio de esta circunferencia.

Resolución:



- $\triangle BAD$: $\text{sen}\theta = \dfrac{3}{2r}$
- $\triangle BCD$: $\cos\theta = \dfrac{7}{2r}$

$1 - 2\,\text{sen}2\theta = \dfrac{7}{2r}$

$1 - 2\left(\dfrac{9}{4r^2}\right) = \dfrac{7}{2r} \quad \therefore\ r = \dfrac{9}{2}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

En un triángulo ABC recto en A, el valor de la expresión:

$$E = \frac{(a-b)^2 + 4absen^2\left(\frac{C}{2}\right)}{(a+b)^2 - 2bccot\left(\frac{C}{2}\right)}$$ donde a, b y c son los lados del triángulo, es igual a:

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 4

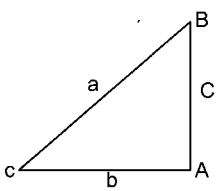
Resolución:

Observemos: $2sen^2x = 1 - cos2x$

$$cot\frac{x}{2} = cscx + cotx$$

Piden: $E = \dfrac{(a-b)^2 + 2ab\left(2sen^2\frac{c}{2}\right)}{(a+b)^2 - 2bccot\frac{c}{2}}$

De la observación: $E = \dfrac{(a-b)^2 + 2ab(1-cosC)}{(a+b)^2 - 2bc(cscC + cotC)}$



Reemplazar: $E = \dfrac{(a-b)^2 + 2ab\left(1-\frac{b}{a}\right)}{(a+b)^2 - 2bc\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)}$

$$E = \frac{a^2+b^2-2ab+2ab-2b^2}{a^2+b^2+2ab-2ab-2b^2}$$

$\therefore E = 1$

Clave: C

PROBLEMA 2(UNI 2012 - I)

Si "2a" es el lado de un polígono regular de "n" lados, R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente. Determine R + r.

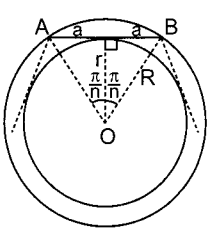
A) $2acos\frac{\pi}{2n}$ B) $2acot\frac{\pi}{2n}$ C) $2atan\frac{\pi}{2n}$

D) $acot\frac{\pi}{2n}$ E) $acsc\frac{\pi}{2n}$

Resolución:

Por cálculo de lados

$R = acsc\left(\frac{\pi}{n}\right)$; $r = acot\left(\frac{\pi}{n}\right)$



Piden:

$R + r = a\left[csc\left(\frac{\pi}{n}\right) + cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$

$\therefore R + r = acot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

Si: $secx = csc2\theta - cot2\theta$, determine:

$$E = \frac{sec^2\theta - tan^2x}{2 - cot\theta + cosx}$$

A) −1 B) 0 C) 1/2

D) 1 E) 3/2

Resolución:

$$secx = csc2\theta - cot2\theta$$

Por ángulo mitad: $secx = tan\theta$; también: $cosx = cot\theta$

Trabajando en E:

$E = \dfrac{sec^2\theta - tan^2x}{2 - cot\theta + cosx} \Rightarrow E = \dfrac{1 + tan^2\theta - (sec^2x - 1)}{2 - cot\theta + cosx}$

$E = \dfrac{tan^2\theta - sec^2x + 2}{2 - cot\theta + cosx}$

Usando ambas condiciones obtenidas:

$E = \dfrac{sec^2x - sec^2x + 2}{2 - cosx + cosx}$ $\therefore E = 1$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - IV)

Calcule el resultado, simplificado, de la siguiente expresión.

$E = 2^5sen5°sen10°sen50°sen70°sen85°sen110°sen130°$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1

D) 2 E) 4

Resolución:

Del dato:

$E = 2^5sen5°sen10°sen50°sen70°\underbrace{sen85°}_{cos5°}sen110°sen130°$

Ordenando:

$E = 4sen10°sen50°sen70°4(\underbrace{2sen5°cos5°}_{sen10°})\underbrace{sen110°}_{sen70°}\underbrace{sen130°}_{sen50°}$

$E = (4sen10°sen50°sen70°)^2$

$\therefore E = sen^2 30° = 1/4$

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Calcule el valor aproximado de: $E = cot(4°) - 7$

A) 7,07 B) 8,07 C) 9,07

D) 10,1 E) 11,2

Resolución:

Del dato: $E = cot4° - 7$ Como: $cot\frac{\alpha}{2} = csc\alpha + cot\alpha$

$E = csc8° + cot8° - 7 \Rightarrow E = 5\sqrt{2} + 7 - 7$

$\therefore E = 7,07$

Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar los valores de K en la igualdad:
senx(senx + 2cosx) + cosx(senx + 2cosx) − K = 0

A) $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ B) $\left(\frac{3-\sqrt{10}}{2};\frac{3+\sqrt{10}}{2}\right)$
C) $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$ D) $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{4};\frac{2+\sqrt{10}}{4}\right)$
E) $\left(\frac{3-\sqrt{10}}{4};\frac{3+\sqrt{10}}{4}\right)$

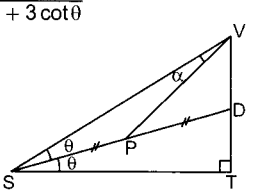
2. Dada la expresión: $S = \frac{7\operatorname{sen}x\cos x}{1+24\cos^2 x}$
hallar los valores que este adopta.

A) $\left(-\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$ B) $\left(-\frac{7}{10};\frac{7}{10}\right)$ C) $\left(-\frac{5}{12};\frac{5}{12}\right)$
D) $\left(-\frac{7}{26};\frac{7}{26}\right)$ E) $\left(-\frac{7}{9};\frac{7}{9}\right)$

3. Calcular la suma de los términos de:
$T = 2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{4} + 8\operatorname{sen}\frac{x}{4}\operatorname{sen}^2\frac{x}{8} + \ldots$

A) x − tanx B) x − senx
C) $x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$ D) xsenx
E) $\operatorname{sen}x - \frac{x}{2}$

4. A partir del gráfico, señalar el equivalente de:
$M = \frac{\cot\alpha - \cot\theta}{\cot\alpha + 3\cot\theta}$



A) $\operatorname{sen}^2\theta$ B) $\cos^2\theta$ C) $\tan^2\theta$
D) $\cot^2\theta$ E) $\sec^2\theta$

5. Simplificar: $S = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 4\alpha}$; $\alpha \neq \frac{K\pi}{2}$; $K \in \mathbb{Z}$

A) $4\cos^2\alpha$ B) $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$ C) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha$
D) $\frac{1}{4}\csc^2\alpha$ E) $4\operatorname{sen}^2\alpha$

6. Descomponer en radicales simples:
$T = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$

A) $\sqrt{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

B) $\sqrt{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

C) $\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}}}$

D) $\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}}}$

E) $\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{2}} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}{2}}$

7. Siendo:

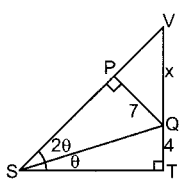
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = n\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

Hallar: $\left(\frac{m+p}{n}\right)$; $m \wedge p \in \mathbb{Z}^+$

A) 24 B) 16 C) 32
D) 48 E) 96

8. Calcular x



A) 132
B) 128
C) 76
D) 102
E) 68

9. Sabiendo que:
$\operatorname{sen}^6x + \operatorname{sen}^6y + \operatorname{sen}^6z = \cos^6x + \cos^6y + \cos^6z$
Calcular:

$$V = \frac{\cos 2x\cos 4x + \cos 2y\cos 4y + \cos 2z\cos 4z}{\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z}$$

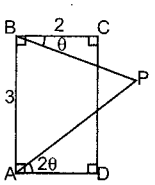
A) 5 B) −5 C) 7
D) −7 E) $-\frac{1}{5}$

10. Si: secx + secy + secz = tanx + tany + tanz, calcular:

$$S = \left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^{-1} + \left(1+\tan\frac{y}{2}\right)^{-1} + \left(1+\tan\frac{z}{2}\right)^{-1}$$

A) 3 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) −3

11. Si en el gráfico, P equidista de BC y CD; calcular: S = 3cotθ − 2sec2θ



A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) 7

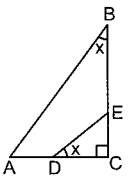
12. Hallar los valores de R, si: $R = \cos 2x + 2\operatorname{sen}x$

A) $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ B) $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$ C) $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$

D) $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ E) $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$

13. Del gráfico, hallar AB si: $AD = 2 \wedge DC = 3$
además: $BE = 6\csc 2x$

A) 8
B) $6\sqrt{2}$
C) 7
D) 12
E) 10



14. Si:
$$f(x) = \cos^4\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$$
hallar: $f_{máx}(x) + f_{mín}(x)$

A) 2,25 B) 1,25 C) 2,75
D) 1,75 E) 3,25

15. Si: $\alpha + \beta + \theta = 90°$
siendo: α, β y θ ángulos agudos, tales que:
$\tan\alpha\cot 2\alpha + \tan\beta\cot 2\beta + \tan\theta\cot 2\theta = n$
Hallar: $P = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta$

A) $\sqrt{4-n}$ B) $\sqrt{5-n}$ C) $\sqrt{3-2n}$
D) $\sqrt{5-2n}$ E) $\sqrt{3-n}$

16. Si $\operatorname{sen}2x = \frac{3}{5}; x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$, calcular: $\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$

D) 1 E) $\frac{3}{5}$

17. Si la expresión:
$$S = \cos x\operatorname{sen}^3 x + \frac{\cos 2x\operatorname{sen}^3 2x}{2} + \frac{\cos 4x\operatorname{sen}^3 4x}{4} + \frac{\cos 8x\operatorname{sen}^3 8x}{8}$$
se reduce a otra de la forma:
$\frac{\operatorname{sen}2x}{m} - \frac{\operatorname{sen}32x}{n}$; hallar: $n - m$

A) 16 B) 34 C) 30
D) 60 E) 68

18. Si: $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4};\pi\right\rangle$, reducir:
$$T = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}2x}}{3} - \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}2x}}{5}$$

A) $-\frac{7}{15}\operatorname{sen}x - \frac{2}{15}\cos x$ B) $\frac{8}{15}\operatorname{sen}x - \frac{2}{15}\cos x$

C) $-\frac{8}{15}\operatorname{sen}x - \frac{2}{15}\cos x$ D) $\frac{7}{15}\operatorname{sen}x - \frac{2}{15}\cos x$

E) $-\frac{8}{15}\operatorname{sen}x + 2\cos x$

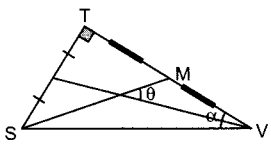
19. Si se verifica la igualdad:
$$\frac{\operatorname{sen}^5 x - \cos^5 x}{\operatorname{sen}x - \cos x} = a + b\operatorname{sen}2x + c\cos 4x$$
calcular: $V = \frac{a+b}{c}$

A) 3 B) $\frac{1}{2}$ C) 11

D) 2 E) $\frac{1}{4}$

20. Si en el gráfico: $\tan\theta = A\operatorname{sen}2\alpha$, calcular: A

A) $\frac{3}{2}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$
E) $-\frac{4}{3}$



21. Si la ecuación: $a\operatorname{sen}2\theta + b\operatorname{sen}\theta + c = 0$
tiene como raíces: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

calcular: $\cot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)$

A) 1 B) $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ C) $\frac{ab+c^2}{a^2-b^2}$

D) 0 E) $\frac{2abc}{a^2+b^2-c^2}$

22. Hallar el valor de la expresión:
$$S = \frac{\operatorname{sen}20° + \sqrt{3}\cos 20°}{\operatorname{sen}40°\cos 40°}$$

A) 2 B) 4 C) 1

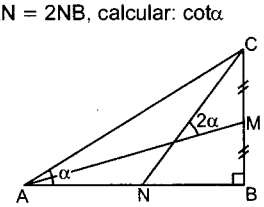
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

23. Hallar m en la identidad:
$$\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 6 E) 3

24. Si en el gráfico: AN = 2NB, calcular: $\cot\alpha$

A) $\sqrt{7}$
B) $\sqrt{5}$
C) $2\sqrt{5}$
D) $\sqrt{11}$
E) $2\sqrt{7}$



25. Siendo:
$$\frac{2\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos\beta} = 3 + \cos 2\beta$$
$$\frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = 1 + \cos 2\beta$$
Hallar el valor de: $T = \frac{\operatorname{sen}(\beta+\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$

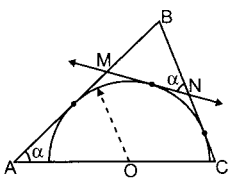
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

26. Reducir la expresión:

$$S = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

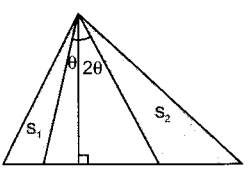
A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

27. Del gráfico, calcular AC, si: AM = a ∧ NC = b



A) $2\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $2\sqrt{ab}$
D) a + b E) $\frac{2ab}{a+b}$

28. A partir del gráfico, hallar: $\left(\frac{S_1 - S_2}{S_2}\right)$ en términos de θ.



A) senθ B) cos4θ C) tanθ
D) sec4θ E) sec2θ

29. Si se verifica que:
tanx + tan2x + 2tan8x − 4tan16x =
acsc2x + bcsc8x + ccsc32x
calcular: $W = \frac{b+c}{a}$

A) 10 B) 6 C) 8
D) −10 E) −8

30. Si se verifica que: $\frac{\text{sen}^7 x}{\sec x} + \frac{\cos^7 x}{\csc x} = m\text{sen}2x + n\text{sen}^3 2x$
Calcular: 5m − 12n

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

31. Hallar la suma de los valores máximos y mínimos de la siguiente expresión:
$S = A\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + B\cos x$.
A, B son constantes reales:

A) B B) A C) $\frac{B}{2}$
D) $\frac{A}{2}$ E) 0

32. Si: $\frac{\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta - 1}{\sec^2\theta + \csc^2\theta} = -\frac{3}{16}$; hallar el valor de sen2θ.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) −1
D) 1 E) ±1

33. Si: $\tan\frac{x}{2} = n$, donde $x \neq \pm\pi$, entonces cuál de las siguientes alternativas es la correcta

A) $\text{sen}x = \frac{1-n^2}{1+n^2}$; $\cos x = \frac{2n}{1+n^2}$

B) $\text{sen}x = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $\cos x = \frac{2x}{1+x^2}$

C) $\text{sen}x = \frac{2n}{1+n^2}$; $\cos x = \frac{1-n^2}{1+n^2}$

D) $\text{sen}x = \frac{2x}{1+x^2}$; $\cos x = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

E) $\text{sen}x = \frac{1+n^2}{1-n^2}$; $\cos x = \frac{2n}{1+n^2}$

34. Si: $\tan\left(\phi + \frac{\pi}{9}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{9}}{\tan\frac{\pi}{18}}\tan\phi$; ϕ: agudo,
calcular el valor de: $S = \text{sen}\frac{3\phi}{4} + \cos 3\phi$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

35. Si: $\frac{\text{sen}x\cos^7 x - \text{sen}^7 x\cos x}{\text{sen}4x} = a + b\cos 4x$
Calcular: 3a + 7b

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 2 E) $\frac{2}{3}$

36. Si al reducir:

$$T = \frac{1}{1+\sqrt{2}\,\text{sen}x} - \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}x} - \frac{1}{1-\sqrt{2}\,\text{sen}x}$$

se obtiene: $\frac{a\cos bx}{\text{sen}cx}$; calcular: $a^2 + b^2 + c^2$

A) 37 B) 47 C) 49
D) 46 E) 36

37. Calcular el valor de:

$$S = \frac{\text{sen}3\theta\cos^2\theta\text{sen}\theta - \cos 3\theta\text{sen}^2\theta\cos\theta}{(\text{sen}\theta\cos\theta)^2}$$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) $\frac{1}{2}$

38. Si: $\text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, hallar el valor de M
Msec15°sec9° = sen15°sen9°

A) $\frac{1}{8\sqrt{5}+8}$ B) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$ C) $\frac{1}{4\sqrt{5}+4}$

D) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ E) $4(\sqrt{5}-1)$

39. Hallar el valor de:

$T = 2\sec^2 10°\sec^2 50°\sec^2 70°$

A) $\frac{128}{3}$ B) $\frac{9}{64}$ C) $\frac{1}{64}$

D) 192 E) $\frac{64}{9}$

40. Simplificar: $S = \text{sen}6°\text{sen}54°\text{sen}66°$

A) sen12° B) 2sen6° C) sen18°

D) 2sen12° E) $\frac{\text{sen}18°}{4}$

41. Si: $f(x) = \frac{1}{4} - \cos^2 x$

Calcular: $P = f(x)f(3x)f(9x) \ldots f(3nx)$

A) $\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}\frac{\text{sen}3^{n+1}x}{\text{sen}x}$ D) $\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}\frac{\cos 3^{n+1}x}{\cos x}$

B) $\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{\text{sen}3^n x}{\text{sen}x}$ E) $\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{\text{sen}3^n x}{\cos x}$

C) $\frac{(-1)^n}{4^n}\frac{\text{sen}3^n x}{\text{sen}x}$

42. Al resolver: $\frac{\sqrt{3}+x}{4\sqrt{3}} = \frac{1-x^2}{3-x^2}$, señalar un valor de x.

A) tan40° B) tan80° C) tan120°

D) tan30° E) tan160°

43. De la identidad:

$$\text{sen}^3 x + \frac{1}{3}\text{sen}^3 3x + \frac{1}{9}\text{sen}^3 9x = \frac{n\,\text{sen}x - \text{sen}(nx)}{m}$$

Señalar el valor de: m + n

A) 36 B) 56 C) 45

D) 63 E) 54

44. Calcular el valor de:

$$V = \left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(1 + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right)\left(1 + 2\cos\frac{6\pi}{5}\right)\left(1 + 2\cos\frac{8\pi}{5}\right)$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

D) 1 E) $\frac{1}{5}$

45. Hallar la sumatoria de los n términos

$$T = \frac{2\cos 2\theta - 1}{\text{sen}2^2\theta} + \frac{2\cos 2^2\theta - 1}{\text{sen}2^3\theta} + \frac{2\cos 2^3\theta - 1}{\text{sen}2^4\theta} + \ldots$$

A) $\csc 2\theta - \csc 2n\theta$

B) $\csc 2\theta - \csc 2^n\theta$

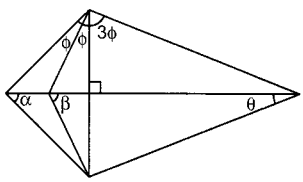
C) $\csc 2\theta - \csc 2^{n+1}\theta$

D) $\csc\theta + \csc 2n\theta$

E) $\csc 2\theta + \csc 2^n\theta$

46. Del gráfico, calcular el valor de:

$$S = \frac{\tan\theta}{\tan\beta} + \frac{\tan\theta}{\tan\alpha} + \frac{\tan\phi}{\cot 2\phi}$$



A) 1 B) 3 C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$ E) 2

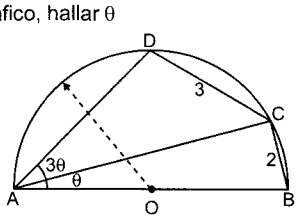
47. Calcular:

$T = \tan 130°\tan 10° + \tan 70°\tan 130°\tan 10°\tan 70°$

A) 3 B) −3 C) 2

D) −2 E) 6

48. Del gráfico, hallar θ



A) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ D) $\text{arcsen}\sqrt{\frac{6}{6}}$

B) $\arccos\sqrt{\frac{10}{6}}$ E) $\arccos\sqrt{\frac{10}{4}}$

C) $\text{arcsen}\sqrt{\frac{6}{3}}$

49. Si: $\alpha, \beta, \phi \wedge \psi$, verifican la ecuación:

$\tan 3x = 2\cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

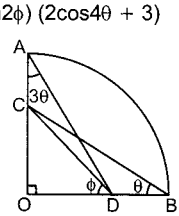
calcular: $V = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\phi + \tan\psi}{\tan\alpha\tan\beta\tan\phi\tan\psi}$

A) 3,5 B) 1,5 C) −3,5

D) 2,5 E) −2,5

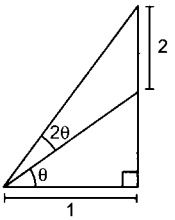
50. Del gráfico mostrado, calcular:

$S = (1 - \text{sen}2\phi)(2\cos 4\theta + 3)$



A) 1 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 2 E) 3

51. A partir del gráfico, calcule sen2θ



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

52. ¿Cuántos valores enteros admite la siguiente expresión?

$$\frac{\csc^2\theta - 2}{\csc^2\theta} - \frac{\sec^2\theta - 2}{\sec^2\theta}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

53. Si $\tan(45° - x) = \frac{2}{3}$, obtenga el valor de cos4x.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{29}{36}$ C) $\frac{19}{26}$
D) $\frac{119}{179}$ E) $\frac{119}{169}$

54. Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$T = \frac{\tan 50° - \tan 40° - 2\tan 80°}{\cot 20°}$$

A) −2 B) −4 C) 2
D) 4 E) 1/4

55. Obtenga el equivalente de la siguiente expresión

$$S = \frac{1 - \operatorname{sen}x}{\cos x} + \csc\left(45° + \frac{x}{2}\right)$$

A) $\tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{4}\right)$ B) $\cot\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{4}\right)$ C) $\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{4}\right)$
D) $\cot\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{4}\right)$ E) $\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$

56. Si se cumple que 5cosx + 3 = 0; x ∈ IIIC, calcule $\cot^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

A) 1/3 B) 1/9 C) −1/9
D) 1/49 E) 49

57. Calcule el mínimo valor de la siguiente expresión:

$$S = \operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

A) 3/4 B) 1/2 C) 3/8 D) 3/2 E) 1

58. Al efectuar: $T = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ se obtiene

A) tan2θ B) 2tanθ C) cot2θ
D) 2cot2θ E) tanθ

59. Al resolver la ecuación $\cot\frac{x}{2}4\tan\frac{x}{4} = 2\csc x$, determine el valor de $\cos\frac{x}{2}$.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/6
D) 1/4 E) 1/5

60. Obtenga el valor de la siguiente expresión

$$S = \frac{(\cot\theta + \tan\theta)(\cot 2\theta + \tan 2\theta)\operatorname{sen}^2 4\theta}{\cos 2\theta}$$

A) 2 B) 5 C) 6
D) 3 E) 8

61. Si α y β son dos valores distintos de x que satisfacen la ecuación acos + bsenx = c, calcule $\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{2a}{b}$ C) $\frac{b}{a}$
D) $\frac{2b}{a}$ E) $\frac{2}{2b}$

62. Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{1 + \cos\theta/2 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

A) $\tan\frac{\theta}{2}$ B) $\cot\frac{\theta}{2}$ C) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$
D) $\cos\frac{\theta}{2}$ E) $\sec\frac{\theta}{2}$

63. El valor de la expresión $S = \frac{1 + 3\cos^2 2\theta}{\cos^6\theta + \operatorname{sen}^6\theta}$ es igual a

A) 2 B) 1/4 C) 1/2
D) 4 E) 1

64. Reduzca la siguiente expresión
(tan2x + sec2x)(cosx − senx) − senx

A) cosx B) −cosx C) senx
D) −senx E) tanx

65. Simplifique $\left(\frac{1 - \operatorname{sen}2x}{\cos 2x}\right)(\cot x + 1)$

A) cotx − 1 B) cotx + 1 C) cotx
D) tanx E) tanx + 1

66. Si α es un ángulo agudo, halle el valor de

$$T = \frac{\cot\left(\frac{\alpha}{4}\right) - \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{\csc\alpha + \cot\alpha}$$

A) 1/2 B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) 2,5 E) 4

67. El valor de la expresión:
T = cot24°cot57° − cot24° cot33° es

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) -2
D) -1 E) 0

68. Si se cumple que $\dfrac{\cos^2\frac{3x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = A\cos^2\frac{x}{2} + B$ calcule AB.

A) 2 B) -2 C) 1
D) -1 E) 1/2

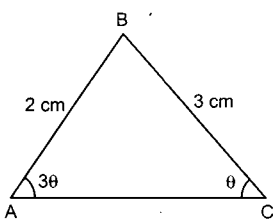
69. Calcule el valor de $S = \dfrac{1}{\text{sen}10°} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$

A) 2 B) 4 C) 1
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

70. Si m y M representan el mínimo y máximo valor de $F(x) = \text{sen}^6 x + \cos^6 x$. Calcule m + M.

A) 5/4 B) 3/4 C) 1/4
D) 1 E) 1/2

71. A partir del gráfico, determine el área de la región triangular ABC

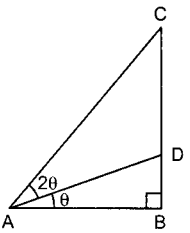


A) $\frac{3}{8}\sqrt{15}\,cm^2$ B) $\frac{\sqrt{15}}{8}\,cm^2$ C) $\frac{3}{8}\,cm^2$
D) $\frac{9}{8}\,cm^2$ E) $2\,cm^2$

72. Calcule el siguiente producto.
sen10°sen20°sen30° ...sen 80°

A) $\frac{\sqrt{3}}{64}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{128}$ C) $\frac{1}{64}$
D) $\frac{3}{256}$ E) $\frac{1}{32}$

73. A partir del gráfico



Calcule AD si CD = 4(BD) = 4.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 3
D) 4 E)2

74. Si la expresión $\text{sen}^3(60° + \theta) + \text{sen}^3(60° - \theta)$ es idéntica a $B\cos(A\theta)$ Calcule $A^2 + B^2$
Considere $A > 0$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 33/16 E) 43/16

75. La expresión $\text{sen}^2 3\theta - 2\cos^2 3\theta + 2\cos^3 6\theta$ es idéntica a $A - B\cos 18\theta$
¿Cuál es el valor de A + B

A) 1 B) 0 C) -1
D) 1/2 E) $-1/2$

76. Simplifique la expresión $\dfrac{2\text{sen}^3\theta + \text{sen}3\theta}{2 + \cos 2\theta}$

A) $\text{sen}\theta$ B) $\text{sen}2\theta$ C) $\cos\theta$
D) $\text{sen}3\theta$ E) $\cos 3\theta$

77. Si $\text{sen}\beta + \cos\beta = K$
Calcule el valor de $\cos 3\beta - \text{sen}3\beta$

A) $K^2 - 3k$ B) $2K^3 - 3k$ C) $3K - 2K^3$
D) $3K^3 - 2k$ E) 3k

78. Si se cumple que $\text{sen}x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces, el valor sen6x será igual a

A) 8/27 B) 13/27 C) 19/27
D) 22/27 E) 25/27

CLAVES

1. B	11. E	21. D	31. B	41. A	51. A	61. C	71. A
2. B	12. D	22. B	32. E	42. B	52. D	62. B	72. D
3. C	13. E	23. B	33. C	43. D	53. E	63. D	73. A
4. C	14. A	24. D	34. A	44. D	54. B	64. A	74. E
5. D	15. D	25. B	35. A	45. C	55. B	65. A	75. C
6. C	16. B	26. A	36. C	46. A	56. E	66. C	76. A
7. D	17. D	27. D	37. C	47. A	57. B	67. C	77. E
8. B	18. C	28. D	38. A	48. E	58. B	68. B	78. D
9. D	19. C	29. D	39. A	49. C	59. B	69. B	
10. C	20. C	30. D	40. E	50. D	60. E	70. A	

Identidades del producto, suma y diferencia de seno y coseno

capítulo 07

William Oughtred (5 de marzo de 1574 Eton, Buckinghamshire-30 de junio de 1660, Albury, Surrey) fue un ministro anglicano nacido en Inglaterra que se dedicó en vida a la Matemática, la Astronomía y la Gnomónica, y que es conocido por haber inventado la moderna regla de cálculo. Profesó como eclesiástico, siendo uno de los primeros ministros de la entonces todavía incipiente Iglesia Anglicana, pero la verdadera pasión de Oughtred fue la ciencia.

William Oughtred sobresalió en el campo de la matemática, disciplina que llegó a dominar hasta convertirse en uno de los matemáticos más importantes de su tiempo. Entre sus obras cabe destacar *Clavis Mathematicae* (1631), *Circles of Proportion and the Horizontal Instrument* (1632) y *Trigonometria with Canones Sinuum* (1657), publicada esta última poco antes de su muerte acaecida en 1660.

Fue el primero que empleó la letra griega π (pi) como símbolo matemático para expresar el cociente entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro; a pesar de que fuera el matemático suizo Leonhard Euler quien popularizó posteriormente su uso. También se le atribuye el uso del signo «x» para la multiplicación y las abreviaturas inglesas sin y cos para las funciones trigonométricas seno y coseno.

Fuente: Wikipedia

IDENTIDADES DE TRANSFORMACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE SENOS A PRODUCTO

$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{sen}A - \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

Demostración

Sabemos: $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$ ...(I)

Sabemos: $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha$ ...(II)

Sumando y restando las expresiones (I) y (II) se obtiene:

$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\alpha\cos\beta$

$\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\beta\cos\alpha$

Hacemos el siguiente cambio: $\alpha + \beta = A \wedge \alpha - \beta = B$, se deduce que: $\alpha = \frac{A+B}{2} \wedge \beta = \frac{A-B}{2}$

Finalmente:

$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{sen}A - \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

IDENTIDADES DE TRANSFORMACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE COSENOS A PRODUCTO

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\cos A - \cos B = -2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Demostración

Sabemos:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$ ...(I)

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$ ...(II)

Suma y resta las expresiones (I) y (II):

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta$

Cambio de variable: $\alpha + B = A \wedge \alpha - \beta = B$

se deduce que: $\alpha = \frac{A+B}{2} \wedge \beta = \frac{A-B}{2}$

Reemplazando se obtiene:

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\cos A - \cos B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Ejemplos:

Transformar a producto:

- $\text{sen}8x + \text{sen}6x = 2\text{sen}\left(\frac{8x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{8x-6x}{2}\right)$

  $\text{sen}8x + \text{sen}6x = 2\text{sen}7x\cos x$
- $\cos5\theta + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{5\theta+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{5\theta-\theta}{2}\right)$

  $\cos5\theta + \cos\theta = 2\cos3\theta\cos2\theta$
- $\text{sen}7\alpha - \text{sen}\alpha = 2\text{sen}\left(\frac{7\alpha-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{7\alpha+\alpha}{2}\right)$

  $\text{sen}7\alpha - \text{sen}\alpha = 2\text{sen}3\alpha\cos4\alpha$
- $\cos19\phi - \cos9\phi = -2\text{sen}\left(\frac{19\phi+9\phi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{19\phi-9\phi}{2}\right)$

  $\cos19\phi - \cos9\phi = -2\text{sen}14\phi\text{sen}5\phi$
- $\text{sen}5x + \text{sen}2x = 2\text{sen}\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}$
- $\cos9x + \cos8x = 2\cos\frac{17x}{2}\cos\frac{x}{2}$
- $\cos3\theta - \cos7\theta = -\text{sen}\left(\frac{3\theta+7\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\theta-7\theta}{2}\right)$

  $\cos3\theta - \cos7\theta = -2\text{sen}5\theta\text{sen}(-2\theta)$

  Pero: $\text{sen}(-2\theta) = -\text{sen}2\theta$

  Entonces $= 2\text{sen}5\theta\text{sen}2\theta$
- $\text{sen}80 + \text{sen}20° = 2\text{sen}\,50°\cos30°$
- $\cos95° - \cos15° = -2\text{sen}55°\text{sen}40°$
- $\cos50° + \cos18° = 2\cos34°\cos16°$
- $\cos40° + \cos80° = 2\cos60°\cos20°$
- $\text{sen}100° - \text{sen}50° = 2\text{sen}25°\cos75°$
- $\cos70° - \cos80° = 2\text{sen}75°\text{sen}5°$
- $\text{sen}\frac{\pi}{9} + \text{sen}\frac{\pi}{10} = 2\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{10}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{10}}{2}\right)$

  $\text{sen}\frac{\pi}{9} + \text{sen}\frac{\pi}{10} = 2\text{sen}\frac{19\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}$
- $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{11\pi}{48}\cos\frac{5\pi}{48}$
- $\text{sen}\frac{3\pi}{7} - \text{sen}\frac{\pi}{3} = 2\text{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

  $\text{sen}\frac{3\pi}{7} - \text{sen}\frac{\pi}{3} = 2\text{sen}\frac{\pi}{21}\cos\frac{8\pi}{21}$

Observaciones

Analizar detenidamente las identidades dadas y percatarse que solamente se aplican en caso de tener suma o diferencia de senos o de cosenos, no hay identidad especial en el caso de tener por ejemplo el seno de un ángulo más el coseno de otro, en estos casos aplicamos el teorema del Complemento (estudiado en el capítulo 2) como se indica en los siguientes ejemplos:

Transformar a producto.

- sen2x + cos4x... no hay una identidad especial de transformación pero sabemos que:
  sen2x = cos(90° − 2x)
  Entonces: sen2x + cos4x = cos (90° − 2x) + cos4x suma de cosenos
  Ahora si podemos aplicar la identidad correspondiente.
  cos(90° − 2x) + cos4x =
  $$2\cos\left(\frac{90° - 2x + 4x}{2}\right)\cos\left(\frac{90° - 2x - 4x}{2}\right)$$
  $$= 2\cos\left(\frac{90° + 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{90° - 6x}{2}\right)$$
  $$= 2\cos(45° + x)\cos(45° - 3x)$$
- cos5x − sen2x
  Sabemos que: cos5x = sen(90° − 5x); entonces:
  cos5x − sen2x = sen(90° −-5x) − sen2x =
  $$2\text{sen}\left(\frac{90° - 7x}{2}\right)\cos\left(\frac{90° - 3x}{2}\right)$$
- cos 50° + sen 38°
  Sabemos que: cos50° = sen40°; entonces:
  cos50° + sen 38° = sen40° + sen38° = 2sen39°cos 1°

Aplicaciones:

1. Calcular: R = cos20° + cos100° + cos140°

   Resolución:

   R = cos20° + cos100° + cos140°
   R = cos20° + 2cos120°cos20°
   Pero: cos120° = −cos60° = −1/2
   R = cos20° + 2(−1/2)cos20° = 0
   R = 0

2. Calcular el valor de K si:
   cos33° − sen87° = K(sen54° − sen30°)

   Resolución:

   cos33° − sen87° = K(sen54° − sen30°) ...(1)
   cos33° − cos3° = −2sen18°sen15° ...(2)
   (1) = (2) ⇒ −2sen18°sen15° = K(sen54° − sen30°)
   $$-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = K\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$
   $$K = \frac{-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} \Rightarrow K = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

3. Calcular el valor de m:
   $$\frac{\text{sen}(x+3y) + \text{sen}(3x+y)}{\text{sen}2x + \text{sen}2y} = m\cos(x+y)$$

   Resolución:

   sen(x + 3y) + sen (3x + y) = 2sen(2x + 2y)cos(y − x)
   sen2x + sen2y = 2sen(x + y)cos(x − y)
   $$\frac{2\text{sen}(2x+2y)\cos(y-x)}{2\text{sen}(x+y)\cos(x-y)} = m\cos(x+y)$$
   además: sen2(x + y) = 2sen(x + y)cos(x + y)
   $$m\cos(x+y) = \frac{2\text{sen}(x+y)\cos(x+y)}{\text{sen}(x+y)} = 2\cos(x+y)$$
   ⇒ m = 2

4. Simplificar:
   $$T = \frac{\text{sen}\theta + \text{sen}3\theta + \text{sen}5\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta}$$

   Resolución:

   $$T = \frac{\text{sen}3\theta + \text{sen}5\theta + \text{sen}\theta}{\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos\theta}$$
   $$T = \frac{\text{sen}3\theta + 2\text{sen}3\theta\cos 2\theta}{\cos 3\theta + 2\cos 3\theta\cos 2\theta}$$
   $$T = \frac{\text{sen}3\theta(1 + 2\cos 2\theta)}{\cos 3\theta(1 + 2\cos 2\theta)}$$
   T = tan3θ

5. Transformar a producto:
   Q = cosϕ + cos3ϕ + cos5ϕ + cos9ϕ

   Resolución:

   Q = cosϕ + cos3ϕ + cos5ϕ + cos9ϕ
   Q = 2cos2ϕcosϕ + 2cos7ϕcos2ϕ
   Q = 2cos2ϕ(cosϕ + cos7ϕ)
   Q = 2cos2ϕ(2cos4ϕcos3ϕ)
   Q = 4cos2ϕcos3ϕcos4ϕ

6. Calcular el valor de R si:
   $$\phi = \frac{\pi}{13};\ R = \frac{\cos\phi\cos 10\phi}{\cos 2\phi + \cos 4\phi}$$

   Resolución:

   $$R = \frac{\cos\phi\cos 10\phi}{2\cos 3\phi\cos\phi} = \frac{\cos 10\phi}{2\cos 3\phi}\ ;\ \phi = \frac{\pi}{13}$$
   $$R = \frac{\cos\frac{10\pi}{13}}{2\cos\frac{3\pi}{13}} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{13}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{13}}$$
   $$\therefore\ R = \frac{-\cos\frac{3\pi}{13}}{2\cos\frac{3\pi}{13}} = -\frac{1}{2}$$

7. Transformar a producto: P = 1 + cosα + senα

   Resolución:

   $$P = 1 + \cos\alpha + \text{sen}\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
   $$P = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$$
   $$P = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\text{sen}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \text{sen}\frac{\alpha}{2}\right]$$
   $$2\cos\frac{\alpha}{2}\left[2\text{sen}(45°)\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
   $$P = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
   $$P = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

8. Calcular el valor de:
   $$R = \frac{\text{sen}\phi + m\text{sen}3\phi + \text{sen}5\phi}{\text{sen}3\phi + m\text{sen}5\phi + \text{sen}7\phi},\ \text{para } \phi = \frac{3\pi}{10}$$

   Resolución:

   $$R = \frac{\text{sen}\phi + \text{sen}5\phi + m\text{sen}3\phi}{\text{sen}3\phi + \text{sen}7\phi + m\text{sen}5\phi}$$
   $$R = \frac{2\text{sen}3\phi\cos 2\phi + m\text{sen}3\phi}{2\text{sen}5\phi\cos 2\phi + m\text{sen}5\phi}$$
   $$R = \frac{\text{sen}3\phi(2\cos 2\phi + m)}{\text{sen}5\phi(2\cos 2\phi + m)}$$

$$R = \frac{\text{sen}3\phi}{\text{sen}5\phi}, \text{ dato: } \phi = \frac{3\pi}{10}$$

$$R = \frac{\text{sen}3\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{\text{sen}5\left(\frac{3\pi}{10}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)}{(-1)} = -\,\text{sen}\frac{\pi}{10}$$

$$\therefore\ R = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

9. Si A, B y C son los ángulos de un triángulo demostrar que:
$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Demostración:

$A + B + C = 180°$

$R = \text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C$

$$R = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \text{sen}C$$

Pero: $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$

$$\rightarrow\ \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{sen}\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2};$$

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{sen}\frac{C}{2}$$

$$R = 2\cos\frac{C}{2}\cos\left(A - \frac{B}{2}\right) + 2\text{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$R = 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \text{sen}\frac{C}{2}\right]$$

$$R = 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$R = 2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$R = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Observaciones

En forma análoga se demuestra que en todo triángulo ABC se verifican las siguientes igualdades:

$\text{sen}A + \text{sen}B - \text{sen}C = 4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
$\cos A + \cos B + \cos C = 4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 1$
$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2} - 1$

10. Si los ángulos de un triángulo ABC verifican la siguiente relación:
$\text{sen}3A + \text{sen}3B + \text{sen}3C = 0$
Demostrar que uno de los ángulos de dichos triángulos mide 60°.

Demostración:

$A + B + C = 180° \rightarrow 3A + 3B + 3C = 540°$

$\text{sen}3A + \text{sen}3B + \text{sen}3C = 0$

$$2\text{sen}\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right) + \text{sen}\,3C = 0, \text{ pero:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{3A+3B}{2} &= 270° - \frac{3C}{2} \\ \text{sen}\left(\frac{3A+3B}{2}\right) &= -\cos\frac{3C}{2} \\ \cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right) &= -\text{sen}\frac{3C}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$2\left(-\frac{\cos 3C}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right) + 2\text{sen}\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0$$

$$-2\cos\frac{3C}{2}\left[\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right) - \text{sen}\frac{3C}{2}\right] = 0$$

$$-2\cos\frac{3C}{2}\left[\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right) + \cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\right] = 0$$

$$-2\cos\frac{3C}{2}\left[2\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\right] = 0$$

$$\rightarrow\ 4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0$$

Cada factor se iguala a cero:

$\cos\frac{3A}{2} = 0;\quad \cos\frac{3B}{2} = 0;\quad \cos\frac{3C}{2} = 0$

si $\cos\frac{3A}{2} = 0$, entonces: $\frac{3A}{2} = 90° \rightarrow A = 60°$

si $\cos\frac{3B}{2} = 0$, entonces: $\frac{3B}{2} = 90° \rightarrow B = 60°$

si $\cos\frac{3C}{2} = 0$, entonces: $\frac{3C}{2} = 90° \rightarrow C = 60°$

Los valores hallados indican que al menos uno de los ángulos del triángulo ABC es igual a 60°.

Propiedades

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo se verifica que:

$\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C = 4\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C$
$\text{sen}2A + \text{sen}2B - \text{sen}2C = 4\cos A\cos B\text{sen}C$
$\cos 2A + \cos 2B + \cos 3C = -4\cos A\cos B\cos C - 1$
$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = -4\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C + 1$
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$
$\text{sen}^2\frac{A}{2} + \text{sen}^2\frac{B}{2} + \text{sen}^2\frac{C}{2} = 1 - 2\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

Ejemplos:

1. Simplificar: $E = \frac{(\cos 3x - \text{sen}4x)^2}{1 - \text{sen}7x}$

Resolución:

Analizamos primero el numerador:

$\cos 3x - \text{sen}4x = \text{sen}(90° - 3x) - \text{sen}4x$

$$= 2\text{sen}\left(\frac{90° - 3x - 4x}{2}\right)\cos\left(\frac{90° - 3x + 4x}{2}\right)$$

$$\cos 3x - \text{sen}\,4x = 2\text{sen}\left(\frac{90° - 7x}{2}\right)\cos\left(\frac{90° + x}{2}\right)$$

Reemplazando en E:

$$E = \frac{\left[2\text{sen}\left(\frac{90° - 7x}{2}\right)\cos\left(\frac{90° + x}{2}\right)\right]^2}{1 - \text{sen}7x}$$

$$E = \frac{4\text{sen}^2\left(\frac{90° - 7x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{90° + x}{2}\right)}{1 - \text{sen}7x}$$

Recordar: $\text{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ y $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$E = \frac{4\left(\dfrac{1-\cos(90°-7x)}{2}\right)\left(\dfrac{1+\cos(90°+x)}{2}\right)}{1-\text{sen}7x}$$

Pero: $\cos(90° - 7x) = \text{sen}7x$ y $\cos(90° + x) = -\text{sen}x$

$$E = \frac{(1-\text{sen}7x)(1-\text{sen}x)}{1-\text{sen}7x} \quad \rightarrow E = 1 - \text{sen}x$$

2. De que naturaleza es el triángulo ABC si se cumple:

$$\tan B = \frac{\cos(B-C)}{\text{sen}A + \text{sen}(C-B)}$$

Resolución:

En el denominador: sen A + sen(C − B).

Sabemos que:

$A = 180° - (C + B) \Rightarrow \text{sen}A = \text{sen}(C + B)$

Luego: $\text{sen}(C + B) + \text{sen}(C - B) = 2\text{sen}C\cos B$

$$\text{Tan}B = \frac{\cos(B-C)}{2\text{sen}C\cos B}$$

$$2\tan B = \frac{\cos B\cos C}{\text{sen}C\cos B} + \frac{\text{sen}B\text{sen}C}{\text{sen}C\cos B}$$

$2\tan B = \cot C + \tan B \rightarrow \tan B = \cot C \rightarrow B + C = 90°$

∴ El Δ ABC es un triángulo rectángulo.

IDENTIDADES DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTO DE SENO Y COSENO A SUMA (O DIFERENCIA) DE SENOS

Sabemos:

$$\text{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\text{sen}\theta = \text{sen}(\alpha+\theta) \quad ...(I)$$
$$\text{sen}\alpha\cos\theta - \cos\alpha\text{sen}\theta = \text{sen}(\alpha-\theta) \quad ...(II)$$

Sumando (I) y (II):

$$\boxed{2\text{sen}\alpha\cos\theta = \text{sen}(\alpha+\theta) + \text{sen}(\alpha-\theta)}$$

IDENTIDAD DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTO DE COSENOS A SUMA DE COSENOS

Sabemos:

$$\cos\alpha\cos\theta + \text{sen}\alpha\text{sen}\theta = \cos(\alpha+\theta) \quad ...(I)$$
$$\cos\alpha\cos\theta - \text{sen}\alpha\text{sen}\theta = \cos(\alpha-\theta) \quad ...(II)$$

Sumando (I) y (II):

$$\boxed{2\cos\alpha\cos\theta = \cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta)}$$

IDENTIDAD DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTO DE SENOS A DIFERENCIA DE COSENOS

Sabemos:

$$\cos\alpha\cos\theta + \text{sen}\alpha\text{sen}\theta = \cos(\alpha-\theta) \quad ...(I)$$
$$\cos\alpha\cos\theta - \text{sen}\alpha\text{sen}\theta = \cos(\alpha+\theta) \quad ...(II)$$

Restando (I) − (II):

$$\boxed{2\text{sen}\alpha\text{sen}\theta = \cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)}$$

Aplicaciones:

1.

- $2\text{sen}8x\cos x = \text{sen}(8x + x) + \text{sen}(8x - x)$
  $= \text{sen}9x + \text{sen}7x$
- $2\cos 9\alpha\cos 6\alpha = \cos(9\alpha + 6\alpha) + \cos(9\alpha - 6\alpha)$
  $= \cos 15\alpha + \cos 3\alpha$
- $2\text{sen}10\phi\text{sen}2\phi = \cos(10\phi - 2\phi) - \cos(10\phi + 2\phi)$
  $= \cos 8\phi - \cos 12\phi$
- $2\text{sen}5x\cos 8x = \text{sen}(5x + 8x) + \text{sen}(5x - 8x)$
  $= \text{sen}13x + \text{sen}(-3x)$
  sabemos que:
  $\text{sen}(-3x) = -\text{sen}3x$
  $2\text{sen}5x\cos 8x = \text{sen}13x - \text{sen}3x$
- $2\cos 7\alpha\cos 12\alpha = \cos(7\alpha + 12\alpha) + \cos(7\alpha - 12\alpha)$
  $= \cos 19\alpha + \cos(-5\alpha)$
  Pero: $\cos(-5\alpha) = \cos 5\alpha$
  $2\cos 7\alpha\cos 12\alpha = \cos 19\alpha + \cos(-5\alpha)$
- $2\text{sen}6x\text{sen}10x = \cos(6x - 10x) - \cos(6x + 10x)$
  $= \cos 4x - \cos 16x$
- $\text{sen}3\phi\cos 5\phi = \frac{1}{2}[\text{sen}8\phi + \text{sen}(-2\phi)]$
  $= \frac{1}{2}[\text{sen}8\phi - \text{sen}2\phi]$
- $\cos 8\phi\text{sen}5\phi = \frac{1}{2}[\text{sen } 13\phi + \text{sen}(-3\phi)]$
  $= \frac{1}{2}[\text{sen } 13\phi - \text{sen } 3\phi]$

2.

- $2\text{sen}80°\cos 20° = \text{sen}100° + \text{sen}60°$
- $2\cos 70°\cos 25° = \cos 95° + \cos 45°$
- $2\text{sen}50°\text{sen}80° = \cos 30° - \cos 130°$
- $2\text{sen}36°\cos 70° = \text{sen}106° - \text{sen}34°$
- $2\text{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{3} - \text{sen}\frac{\pi}{6}$
- $\text{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\frac{5\pi}{24} + \text{sen}\frac{\pi}{24}\right]$
- $\text{sen}\frac{\pi}{30}\text{sen}\frac{7\pi}{30} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{15}\right]$
- $2\text{sen}\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\frac{14\pi}{15} + \text{sen}\frac{4\pi}{15}$
- $2\text{sen}\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\frac{13\pi}{12} + \text{sen}\frac{5\pi}{12}$
- $2\text{sen}\frac{\pi}{6}\text{sen}\frac{\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{15} - \cos\frac{4\pi}{15}$
- $\text{sen}27°\cos 65° = \frac{1}{2}(\text{sen}92° - \text{sen}38°)$
- $\text{sen}42°\text{sen}6° = \frac{1}{2}(\cos 36° - \cos 48°)$
- $\cos 35°30'\cos 25°30' = \frac{1}{2}(\cos 61° + \cos 10°)$
- $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{19\pi}{90} + \cos\frac{\pi}{90}\right]$

3. Simplificar:
$R = \cos 6x\cos x + \operatorname{sen}5x\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}6x\operatorname{sen}3x$

Resolución:

$2R = 2\cos 6x\cos x + 2\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}2x - 2\operatorname{sen}6x\operatorname{sen}3x$

$2R = (\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 3x - \cos 7x) - (\cos 3x - \cos 9x)$

$2R = \cos 7x + \cos 5x + \cos 3x - \cos 7x - \cos 3x + \cos 9x$

$2R = \cos 5x + \cos 9x = 2\cos\left(\frac{5x+9x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-5x}{2}\right)$

$2R = 2\cos 7x\cos 2x$

$R = \cos 7x\cos 2x$

4. Reducir:
$A = \cos 77°\cos 43° + \operatorname{sen}16°\operatorname{sen}18° + \cos 121°\cos 61°$

Resolución:

$2A = 2\cos 77°\cos 43° + 2\operatorname{sen}16°\operatorname{sen}18° + 2\cos 121°\cos 61°$

$2A = (\cos 120° + \cos 34°) + (\cos 2° - \cos 34°) + (\cos 182° + \cos 60°)$

$2A = \cos 120° + \cos 34° + \cos 2° - \cos 34° + \cos 182° + \cos 60°$

$\cos 182° = \cos(180° + 2°) = -\cos 2°$

Además: $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$2A = -\frac{1}{2} + \cos 34° + \cos 2° - \cos 34° - \cos 2° + \frac{1}{2} = 0$

$A = 0$

5. Calcular el valor de:
$K = \cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{9\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.

Para: $\alpha = \frac{\pi}{10}$

Resolución:

Multiplicamos ($\times 2$) a toda la expresión:

$2K = 2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{9\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

$2K = (\cos 5\alpha + \cos 2\alpha) - (\cos 4\alpha - \cos 5\alpha)$

$2K = 2\cos 5\alpha + \cos 2\alpha - \cos 4\alpha$

Si $\alpha = \frac{\pi}{10} \rightarrow$

$2K = 2\cos 5\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) - \cos 4\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$2K = 2\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$

$2K = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \rightarrow K = \frac{1}{4}$

6. Transformar a producto:
$E = 2\operatorname{sen}(3x+y)\operatorname{sen}(3x-y) - 2\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)$

Resolución:

$E = 2\operatorname{sen}(3x+y)\operatorname{sen}(3x-y) - 2\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)$

$E = [\cos 2y - \cos 6x] - [\cos 2y - \cos 2x]$

$E = \cos 2y - \cos 6x - \cos 2y + \cos 2x$

$E = \cos 2x - \cos 6x = -2\operatorname{sen}\left(\frac{2x+6x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2x-6x}{2}\right)$

$\therefore\ E = 2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}2x$

7. Hallar la suma del máximo y mínimo valor de:
$M = \operatorname{sen}(2x + 10°)\operatorname{sen}(20° - 2x)$

Resolución:

$M = \operatorname{sen}(2x + 10°)\operatorname{sen}(20° - 2x)$

$M = \frac{1}{2}[\cos(2x + 10° - 20° + 2x) - \cos(2x + 10° + 20° - 2x)]$

$M = \frac{1}{2}[\cos(4x - 10°) - \cos 30°]$;

Sabemos que: $-1 \leq \cos(4x - 10°) \leq 1$

Entonces:

$M_{máx} = \frac{1}{2}(1 - \cos 30°) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$M_{min} = \frac{1}{2}(-1 - \cos 30°) = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$M_{máx} + M_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Simplificar: $S = \dfrac{\operatorname{sen}9\theta\cos\theta - \operatorname{sen}6\theta\cos 4\theta}{\cos 4\theta\cos 2\theta - \cos 7\theta\cos\theta}$

Resolución:

$S = \dfrac{2\operatorname{sen}9\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}6\theta\cos 4\theta}{2\cos 4\theta\cos 2\theta - 2\cos 7\theta\cos\theta}$

$S = \dfrac{\operatorname{sen}10\theta + \operatorname{sen}8\theta - \operatorname{sen}10\theta - \operatorname{sen}2\theta}{\cos 6\theta + \cos 2\theta - \cos 8\theta - \cos 6\theta}$

$S = \dfrac{\operatorname{sen}8\theta - \operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta - \cos 8\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen}3\theta\cos 5\theta}{2\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}5\theta} = \dfrac{\cos 5\theta}{\operatorname{sen}5\theta}$

$S = \cot 5\theta$

9. Calcular el valor de:
$V = \operatorname{sen}10°\operatorname{sen}50° + \operatorname{sen}130°\operatorname{sen}610° - \operatorname{sen}430°\cos 280°$

Resolución:

$V = \operatorname{sen}10°\operatorname{sen}50° + \operatorname{sen}130°\operatorname{sen}610° - \operatorname{sen}430°\cos 280°$

$2V = 2\operatorname{sen}10°\operatorname{sen}50° + 2\operatorname{sen}130°\operatorname{sen}610° - 2\operatorname{sen}430°\cos 280°$

$2V = \cos 40° - \cos 60° + \cos 480° - \cos 740° - \operatorname{sen}710° - \operatorname{sen}150°$

Pero:

$\cos 480° = \cos(360° + 120°) = \cos 120° = -\cos 60°$

$\cos 740° = \cos(2 \times 360° + 20°) = \cos 20°$

$\operatorname{sen}710° = \operatorname{sen}(2 \times 360° - 10°) = -\operatorname{sen}10°$

$\operatorname{sen}150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen}30°$

$2V = \cos 40° - \cos 60° + (-\cos 60°) - (\cos 20°) - (-\operatorname{sen}10°) - (\operatorname{sen}30°)$

$2V = \cos 40° - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos 20° + \operatorname{sen}10 - \frac{1}{2}$

$= -\frac{3}{2} + \cos 40° - \cos 20° + \operatorname{sen}10°$

$2V = -\frac{3}{2} + (-2\operatorname{sen}30°\operatorname{sen}10°) + \operatorname{sen}10°$

$2V = -\frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}10° + \operatorname{sen}10°$

$2V = -\frac{3}{2} - \operatorname{sen}10° + \operatorname{sen}10°$

$V = -\frac{3}{4}$

10. Simplificar:

$$E = \text{sen}(25° + \theta)\cos(5° - \theta) + \text{sen}(65° - \theta)\cos(85° + \theta)$$

Resolución:

$$2E = 2\text{sen}(25° + \theta)\cos(5° - \theta) + 2\text{sen}(65° - \theta\cos(85° + \theta)$$

$$2E = \text{sen}30° + \text{sen}(20° + 2\theta) + \text{sen}150° + \text{sen}(-20° - 2\theta)$$

$$2E = \frac{1}{2} + \text{sen}(20° + 2\theta) + \frac{1}{2} - \text{sen}(20° + 2\theta)$$

$$2E = 1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}$$

◄ SERIES TRIGONOMÉTRICAS

En este punto sólo se analizará dos casos elementales, las series de senos y cosenos cuando los ángulos están en progresión aritmética, en el apéndice se analizan otros tipos de series.

Serie de senos para ángulos en progresión aritmética

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}(\alpha + r) + \text{sen}(\alpha + 2r) + \ldots + \text{sen}[a + (n - 1)r] = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\text{sen}\left(\frac{P + U}{2}\right)$$

P: primer ángulo; U: último ángulo
n: número de términos

Demostración:

Sea: $A = \text{sen}\alpha + \text{sen}(\alpha + r) + \text{sen}(\alpha + 2r) + \ldots + \text{sen}[\alpha + (n - 1)r]$

Como la razón de la progresión es r.
Entonces multiplicamos a toda la expresión por: $2\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$

$$\left(2\text{sen}\frac{r}{2}\right)A = 2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\frac{r}{2} + 2\text{sen}(\alpha + r)\text{sen}\frac{r}{2} + 2\text{sen}(\alpha + 2r)\text{sen}\frac{r}{2} + \ldots$$

Sabemos que: $2\text{sen}x\,\text{sen}y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
Aplicamos esta identidad en cada término y para que Ud. lo pueda entender con mayor facilidad lo ordenamos en forma vertical.

$$2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{r}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(\alpha + r)\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(\alpha + r - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + r + \frac{r}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(\alpha + 2r)\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(\alpha + 2r - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 2r + \frac{r}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{5r}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(\alpha + 3r)\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(\alpha + 3r - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 3r + \frac{r}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{5r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right)$$

$$2\text{sen}[\alpha - (n - 1)r]\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left[\alpha + (n - 1)r - \frac{r}{2}\right] - \cos\left[\alpha + (n - 1)r + \frac{r}{2}\right]$$

Al sumar miembro a miembro observa que al lado derecho se cancelan varios términos, finalmente queda:

$$\left(2\text{sen}\frac{r}{2}\right)A = \cos\left(\alpha - \frac{r}{2}\right) - \cos\left[\alpha + (n - 1)r + \frac{r}{2}\right]$$

Transformando el segundo miembro a producto:

$$\left(2\text{sen}\frac{r}{2}\right)A = -2\text{sen}\left[\alpha + \frac{(n - 1)r}{2}\right]\text{sen}\left[-\frac{nr}{2}\right]$$

Ordenando y simplificando:

$$\left(\text{sen}\frac{r}{2}\right)A = \text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)\text{sen}\left[\frac{2\alpha + (n - 1)r}{2}\right];$$

$P = a$; $U = a + (n - 1)r$

Entonces

$$A = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\text{sen}\left(\frac{P + U}{2}\right)$$

Serie de cosenos para ángulos en progresión aritmética

$$\cos\alpha + \cos(a + r) + \cos(a + 2r) + \ldots \cos[a + (n - 1)r] = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cos\left(\frac{P + U}{2}\right)$$

P = primer ángulo
U = último ángulo
n = número de términos

Aplicaciones:

1. Calcular la suma de los n primeros términos de:
   $S = \cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta + \ldots$ y
   $T = \text{sen}\theta + \text{sen}2\theta + \text{sen}3\theta + \ldots$

   Resolución:

   La razón de la progresión es: $r = \theta$

   $S = \cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta + \ldots + \cos n\theta$

   $$S = \frac{\text{sen}\frac{n\theta}{2}}{\text{sen}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta + n\theta}{2}\right)$$

   $$S = \text{sen}\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n + 1)\theta}{2}\csc\frac{\theta}{2}$$

   $T = \text{sen}\theta + \text{sen}2\theta + \text{sen}3\theta + \ldots + \text{sen}\,n\theta$

   $$T = \frac{\text{sen}\frac{n\theta}{2}}{\text{sen}\frac{\theta}{2}}\text{sen}\left(\frac{\theta + n\theta}{2}\right)$$

   $$T = \text{sen}\frac{n\theta}{2}\text{sen}\frac{(n + 1)}{2}\csc\frac{\theta}{2}$$

2. Calcular:
   $M = \text{sen}1° + \text{sen}2° + \text{sen}3° + \ldots + \text{sen}180°$

   Resolución:

   Razón de la progresión: $r = 1°$
   Número de términos: $n = 180°$

   $$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{180° \times 1°}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1°}{2}\right)}\text{sen}\left(\frac{1° + 180°}{2}\right)$$

$$M = \frac{\text{sen}90°\text{sen}\left(90° + \frac{1°}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1°}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1°}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1°}{2}\right)} = \cot\left(\frac{1°}{2}\right)$$

$$M = \cot\left(\frac{1°}{2}\right) = \cot 30'$$

3. Calcular:

$$Q = \text{sen}\frac{\pi}{15} + \text{sen}\frac{5\pi}{15} + \text{sen}\frac{9\pi}{15} ... + \text{sen}\frac{33\pi}{15}$$

Resolución:

Razón de la progresión: $r = \frac{4\pi}{15}$

Número de términos:

$$n = \frac{U - P}{\text{Razón}} + 1 \Rightarrow n = \frac{\frac{33\pi}{15} - \frac{\pi}{15}}{\frac{4\pi}{15}} + 1 \Rightarrow n = 9$$

$$Q = \frac{\text{sen}\left(\frac{9}{2} \times \frac{4\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{30}\right)} \text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{15} + \frac{33\pi}{15}}{2}\right)$$

$$Q = \frac{\text{sen}\left(\frac{18\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}\right)} \text{sen}\left(\frac{17\pi}{15}\right)$$

Pero:

$$\text{sen}\frac{18\pi}{15} = \text{sen}\left(\pi + \frac{3\pi}{15}\right) = -\text{sen}\frac{3\pi}{15} = -\text{sen}\frac{\pi}{5}$$

$$\text{sen}\frac{17\pi}{15} = \text{sen}\left(\pi + \frac{2\pi}{15}\right) = -\text{sen}\frac{2\pi}{15}$$

$$Q = \frac{\left(-\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)\left(-\text{sen}\frac{2\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}\right)} \Rightarrow Q = \text{sen}\frac{\pi}{5}$$

4. Calcular la suma de los n primeros términos de:

$F = \cos x \cos 2x + \cos 2x \cos 3x + \cos 3x \cos 4x + ...$

Resolución:

$$2F = 2\cos x\cos 2x + 2\cos 2x\cos 3x + 2\cos 3x\cos 4x + ... + 2\cos nx\cos(n + 1)x$$

$$2F = \cos x + \cos 3x + \cos x + \cos 5x + \cos x + \cos 7x + ... + \cos x + \cos(2n + 1)x$$

$$2F = n\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + ... + \cos(2n + 1)x$$

Razón: $r = 2x$

Número de términos = n (dato).

$$2F = n\cos x + \frac{\text{sen}\left(\frac{n(2x)}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2x}{2}\right)} \cos\left(\frac{3x + (2n + 1)x}{2}\right)$$

$$2F = n\cos x + \frac{\text{sen}(nx)}{\text{sen}x} \cos(n + 2)x$$

$$F = \frac{n}{2}\cos x + \frac{\text{sen}nx\cos(n + 2)x}{2\text{sen}x}$$

5. Calcular la suma de los k primeros términos.

$R = \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2 3\alpha + \text{sen}^2 5\alpha + ...$

Resolución:

$$R = \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2 3\alpha + \text{sen}^2 5\alpha + ... + \text{sen}^2(2k - 1)\alpha$$

$$2R = 2\text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}^2 3\alpha + 2\text{sen}^2 5\alpha + ... + 2\text{sen}^2(2k - 1)\alpha$$

Sabemos: $2\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

$$2R = 1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 6\alpha + 1 - \cos 10\alpha + ... + 1 - \cos(4k - 2)\alpha$$

$$2R = k - [\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha + ... + \cos(4k - 2)\alpha]$$

Razón: $r = 4a$

Número de términos = k (dato).

$$2R = k - \frac{\text{sen}\left(\frac{k \times 4\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{4\alpha}{2}\right)} \cos\left[\frac{2\alpha + (4k - 2)\alpha}{2}\right]$$

$$2R = k - \frac{\text{sen}(2k\alpha)}{\text{sen}(2\alpha)} \cos(2k\alpha)$$

$$2R = k - \frac{2\text{sen}(2k\alpha)\cos(2k\alpha)}{2\text{sen}2\alpha}$$

$$2R = k - \frac{\text{sen}(4k\alpha)}{2\text{sen}2\alpha} \rightarrow R = \frac{k}{2} - \frac{\text{sen}(4k\alpha)}{4\text{sen}2\alpha}$$

En los casos donde el signo de la serie es alternado se procede de la siguiente manera:

$$S = \text{sen}\alpha - \text{sen}(\alpha + r) + \text{sen}(\alpha + 2r) + ... + (-1)^{n-1}\text{sen}[\alpha + (n - 1)r]$$

a) Si n (número de términos)

Es impar: $S = \frac{\cos\left(\frac{nr}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \text{sen}\left(\frac{P + U}{2}\right)$

b) Si n (número de términos)

Es par: $S = -\frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \cos\left(\frac{P + U}{2}\right)$

$$M = \cos a - \cos(a + r) + \cos(a + 2r) - \cos(a + 3r) + ... + (-1)^{n-1}\cos(a + (n - 1)r)$$

a) Si n (número de términos)

Es impar: $M = \frac{\cos\left(\frac{nr}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \cos\left(\frac{P + U}{2}\right)$

b) Si n (número de términos)

Es par: $M = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \text{sen}\left(\frac{P + U}{2}\right)$

Aplicaciones:

1. Calcular la suma de los n primeros términos de la siguiente serie: (n: impar)
$A = \text{sen}x - \text{sen}2x + \text{sen}3x - \text{sen}4x ... + (-1)^n\text{sen}(nx)$

Resolución:

Si n es impar:

$$A = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\text{sen}\left(\frac{x+nx}{2}\right)$$

$$A = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\text{sen}\frac{(n+1)x}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Si n es par:

$$A = -\frac{\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{x+nx}{2}\right)$$

$$A = -\frac{\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Calcular la suma de los n primeros términos de la siguiente serie (n: impar).
$B = \cos^2x + \text{sen}^2 2x + \cos^2 3x + \text{sen}^2 4x + ...$

Resolución:

Como el número de términos (n) es impar entonces:
$B = \cos^2x + \text{sen}^2 2x + \cos^2 3x + \text{sen}^2 4x + ... + \cos^2 nx$
$2B = 2\cos^2x + 2\text{sen}^2 2x + 2\cos^2 3x + 2\text{sen}^2 4x + ... + 2\cos^2 nx$
$2B = 1 + \cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 + \cos 6x + 1 - \cos 8x + ... + 1 + \cos 2nx$
$2B = n + [\cos 2x - \cos 4x + \cos 6x - \cos 8x + ... + \cos 2nx]$

Razón: $r = 2x$
Número de términos: n (impar)

$$2B = n + \frac{\cos\left(\frac{n\times 2x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{2x}{2}\right)}\cos\left(\frac{2x+2nx}{2}\right)$$

$$\therefore\ B = \frac{n}{2} + \frac{\cos(nx)\cos(n+1)x}{2\cos x}$$

3. Calcular:
$F = \text{sen}1° - \text{sen}2° + \text{sen}3° - \text{sen}4° + ... - \text{sen}180°$

Resolución:

En este caso observa que el número de términos es: 180(número par)
Además: $r = 1°$
Entonces:

$$F = -\frac{\text{sen}\left(\frac{180\times 1°}{2}\right)}{\cos\left(\frac{1°}{2}\right)}\cos\left(\frac{1°+180°}{2}\right)$$

$$F = -\frac{\text{sen}90°}{\cos\left(\frac{1°}{2}\right)}\cos\left(90° + \frac{1°}{2}\right)$$

$$F = -\frac{1}{\cos\left(\frac{1°}{2}\right)}\left(-\text{sen}\frac{1°}{2}\right) \rightarrow F = \tan\frac{1°}{2} = \tan 30°$$

4. Calcular: $E = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

Resolución:

En este caso número de términos: $n = 3$
La razón: $r = \frac{\pi}{7}$
Entonces:

$$E = \frac{\cos\left(\frac{3\times\frac{\pi}{7}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{7}}{2}\right)}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}}{2}\right)$$

$$E = \frac{\cos\frac{3\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

Pero: $\cos\frac{3\pi}{14} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) = \text{sen}\left(\frac{4\pi}{14}\right)$

$$\cos\frac{3\pi}{14} = \text{sen}\frac{2\pi}{7}$$

Entonces:

$$E = \frac{2\text{sen}\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

Pero: $\text{sen}\frac{4\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Entonces: $E = \dfrac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} \rightarrow E = \frac{1}{2}$

5. Calcular:
$M = \text{sen}\frac{\pi}{11} - \text{sen}\frac{3\pi}{11} + \text{sen}\frac{5\pi}{11} - \text{sen}\frac{7\pi}{11} + \text{sen}\frac{9\pi}{11}$

Resolución:

En este caso el número de término es: 5
La razón es: $\frac{2\pi}{11}$
Entonces:

$$M = \frac{\cos\left(\frac{5}{2}\times\frac{2\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{11}\right)}\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{11}+\frac{9\pi}{11}}{2}\right)$$

$$M = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)}\text{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)}$$

$$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)};\text{pero: } \text{sen}\frac{10\pi}{11} = \text{sen}\frac{\pi}{11}$$

$$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

Observaciones

Dada una suma, por ejemplo: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ esta se puede representar de una manera más simple. Para ello se emplea la letra griega SIGMA (mayúscula) $\sum$ de la siguiente manera:

$\sum_{i=1}^{4} x_i$ } Esta representación significa que la variable x toma valores para i = 1, 2, 3, 4, y que dichos valores se deben sumar.

Es decir:

$$\sum_{i=a}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

En forma general: x_i

$\sum_{i=a}^{b} x_i$ ← índice superior ← índice inferior

- i: Se llama índice y sólo toma valores enteros positivos.
- El índice se puede representar por cualquier otra letra: j, k, m, n, ...
- El número de términos se calcula: (b − a) + 1

Aplicaciones:

1. $\sum_{i=2}^{7} x_i = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$
2. $\sum_{k=1}^{4} x^k = x^1 + x^2 + x^3 + x^4$
3. $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x}{j}\right) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \ldots + \frac{x}{n}$
4. Representar usando el símbolo $\sum$ cada una de las siguientes sumas:

   a) $x_5 + x_6 + x_7 + \ldots + x_{100} = \sum_{i=5}^{100} x_i$

   b) $y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots + y^n = \sum_{i=1}^{n} (y^i)$

   c) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$

   d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

   Hay una serie de propiedades que no corresponden en este momento explicar. El objetivo de esta observación es solamente que el lector aprenda a usar la simbología correcta para el caso de sumas. Usted sabe que:

   a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   es lo mismo: $\sum_{k=1}^{n} (k) = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   es lo mismo: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

   es lo mismo: $\sum_{k=1}^{n} = (2k - 1) = n^2$

   Para el caso de las series trigonométricas que es el objetivo fundamental de esta observación se procede así:

   $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha + r) + \operatorname{sen}(\alpha + 2r) + \ldots + \operatorname{sen}[\alpha + (n-1)r]$

   Se representa: $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}[\alpha + (k-1)r]$

   Entonces es correcto escribir:

   $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}[\alpha + (k-1)r] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \operatorname{sen}\left[\frac{2\alpha + (n-1)r}{2}\right]$$

   De igual para el caso de cosenos:

   $$\sum_{k=1}^{n} \cos[\alpha + (k-1)r] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cos\left[\frac{2\alpha + (n-1)r}{2}\right]$$

Aplicaciones:

1. Calcular: $S = \sum_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$

   En este caso podemos desarrollar la suma es decir:

   $$S = \sum_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$$

   Donde: $r = \frac{2\pi}{7} \wedge n = 3$

   $$S = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{7}\right)} \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

2. Calcular: $F = \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(kx)$

   Desarrollamos la suma:

   $F = (-1)^2 \operatorname{sen}x + (-1)^3 \operatorname{sen}2x + (-1)^4 \operatorname{sen}3x + (-1)^5 \operatorname{sen}4x + \ldots + (-1)^9 \operatorname{sen}8x$

   $F = \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}7x - \operatorname{sen}8x$

   $$F = -\frac{\operatorname{sen}\left(8 \times \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{x + 8x}{2}\right) = -\left(\frac{\operatorname{sen}4x \cos\frac{9x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right)$$

   $$F = -\operatorname{sen}4x \cos\frac{9x}{2} \sec\frac{x}{2}$$

PRODUCTOS TRIGONOMÉTRICOS

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\ldots\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\tan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\ldots\tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}$

Aplicaciones:

- $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}$ observa que:

  $n = 3 \Rightarrow 2n + 1 = 7 \wedge 2^n = 8$

  Entonces: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$
- $E = \cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$

  observa que: $n = 5 \Rightarrow 2^n = 32$

  $E = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
- $E = \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{3\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9} \Rightarrow n = 4$

  $E = \sqrt{9} = 3$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor de M si la siguiente expresión es una identidad:

$(\text{sen}6x + \text{sen}(2x))\csc(2x) =$
$\sec(2x)[\cos(6x) + \cos(2x) + M\cos(2x)]$

Resolución:

$[\text{sen}6x + \text{sen}2x]\csc 2x = \sec 2x\,[\cos 6x + \text{Cos}2x + M\cos 2x]$

$$\frac{\text{sen}6x + \text{sen}2x}{\text{sen}2x} = \frac{\cos 6x + \cos 2x + M\cos 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{2\text{sen}4x \cdot \cos 2x}{\text{sen}2x} = \frac{2\cos 4x\cos 2x + M\cos 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{2[2\text{sen}2x\cos 2x]\cos 2x}{\text{sen}2x} = \frac{\cos 2x[2\cos 4x + M]}{\cos 2x}$$

$2[2\cos^2 2x] = 2\cos 4x + M$

$2[1 + \cos 4x] = 2\cos 4x + M$

$2 + 2\cos 4x = 2\cos 4x + M \quad \therefore\ M = 2$

2. Simplificar: $T = \dfrac{\text{sen}20°}{1 - \sqrt{3}\,\text{sen}20°}$

Resolución:

Como:

$$T = \frac{\text{sen}20°}{1 - \underbrace{2\text{sen}60°\text{sen}20°}_{\cos 40° - \cos 80°}}$$

$$T = \frac{\text{sen}20°}{\underbrace{1 + \text{sen}80° - \cos 40°}_{2\cos^2 40°}}$$

$$T = \frac{\text{sen}20°}{\cos 40°[2\cos 40° - 1]}$$

$$T = \frac{\text{sen}20°}{\cos 40°\dfrac{\cos 60°}{\cos 20°}} = \frac{2\text{sen}20°\cos 20°}{\cos 40°}$$

$$T = \frac{\text{sen}40°}{\cos 40°} \quad \rightarrow\ T = \tan 40°$$

3. Si $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{1}{5}$, hallar: senx

Resolución:

En la identidad: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Para: $\theta = \left[\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{x}{3}\right]$

$$\cos\left[\frac{5\pi}{2} + x\right] = 4\cos^3\left[\frac{5\pi}{6} + \frac{x}{3}\right] - 3\cos\left[\frac{5\pi}{6} + \frac{x}{3}\right]$$

$$-\text{sen}x = 4\left[\frac{1}{5}\right]^3 - 3\left[\frac{1}{5}\right]$$

$$-\text{sen}x = -\frac{71}{125} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{71}{125}$$

4. Determinar el valor de k

$$k = \frac{\text{sen}^3 10° + \cos^3 20°}{\text{sen}10° + \cos 20°}$$

Resolución:

Se sabe que: $\text{sen}30° = 3\text{sen}10° - 4\text{sen}^3 10°$ ...(1)

$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$ ...(2)

Como: $\text{sen}30° = \cos 60°$

$\Rightarrow 3\text{sen}10° - 4\,\text{sen}^3 10° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$

$3[\text{sen}10° + \cos 20°] = 4[\text{sen}^3 10° + \cos^3 20°]$

$$\therefore\ \frac{3}{4} = \frac{\text{sen}^3 10° + \cos^3 20°}{\text{sen}10° + \cos 20°} \rightarrow k = \frac{3}{4}$$

5. Si $\tan^2 A = 1$; reducir la expresión:

$$S = \frac{\dfrac{\text{sen}(3A)}{\text{sen}A} - 3\cos^2 A}{\dfrac{\cos(3A)}{\cos A} + 3\text{sen}^2 A}$$

Resolución:

$$S = \frac{\dfrac{3\text{sen}A - 4\text{sen}^3 A}{\text{sen}A} - 3\cos^2 A}{\dfrac{4\cos^3 A - 3\cos A}{\cos A} + 3\text{sen}^2 A}$$

Simplificando:

$$S = \frac{3 - 4\text{sen}^2 A - 3\cos^2 A}{4\cos^2 A - 3 + 3\text{sen}^2 A} = \frac{3\text{sen}^2 A - 4\text{sen}^2 A}{4\cos^2 A - 3\cos^2 A}$$

$$S = \frac{-\text{sen}^2 A}{\cos^2 A} = -\tan^2 A \quad \therefore\ S = -1$$

6. Simplificar: $Q = \dfrac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x)}{\text{sen}x\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)}$

Resolución:

$$Q = \frac{\overbrace{\text{sen}2x + \text{sen}4x}^{2\text{sen}3x\cos x}}{\underbrace{\text{sen}x\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}_{\frac{\text{sen}3x}{4}}} \Rightarrow Q = \frac{2\cos x}{\frac{1}{4}}$$

$\Rightarrow Q = 8\cos x$

7. Hallar el valor numérico de:

$K = [(\sqrt{5} - 1)\cot 9° - (\sqrt{5} + 1)\cot 27°]^2 + 8\sqrt{5}$

Resolución:

$$K = \left\{\underbrace{(\sqrt{5} - 1)\cot 9° - (\sqrt{5} + 1)\cot 27°}_{A}\right\}^2 + 8\sqrt{5}$$

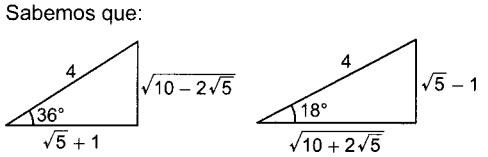
$$A = 4\text{sen}18° \times \cot 9° - 4\underbrace{\cos 36°}_{\text{sen}54°} \times \cot 27°$$

$$A = 4\left[2\text{sen}9° \times \cos 9° \times \frac{\cos 9°}{\text{sen}9°} - 2\text{sen}27°\cos 27°\frac{\cos 27°}{\text{sen}27°}\right]$$

$A = 8[\cos^2 9° - \cos^2 27°] \Rightarrow A = 8[\text{sen}^2 27° - \text{sen}^2 9°]$

$A = 8[\text{sen}36°\text{sen}18°]$

Sabemos que:



$$A = 8\left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right]$$

$$A = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Reemplazamos en k.

$$K = \left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times(\sqrt{5}-1)}{2}\right]^2 + 8\sqrt{5}$$

$$K = \frac{(10-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{4} + 8\sqrt{5}$$

Reduciendo obtenemos: $K = 20$

8. Eliminar x; si:

$\cos(\alpha - 3x) = m\cos^3 x$

$\text{sen}(\alpha - 3x) = m\,\text{sen}^3 x$

Resolución:

- $4\cos(\alpha - 3x) = m[4\cos^3 x]$
  $4\cos(\alpha - 3x) = m(3\cos x + \cos 3x]$
  $4\cos(\alpha - 3x) - m\cos 3x = 3m\cos x$ ...(1)
- $4\text{sen}(\alpha - 3x) = m[4\text{sen}3x]$
  $4\text{sen}(\alpha - 3x) = m(3\text{sen}x - \text{sen}3x]$
  $4\text{sen}(\alpha - 3x) + m\,\text{sen}3x = 3m\,\text{sen}x$ ...(2)

Sumanos $(1)^2 + (2)^2$

$[4\cos(\alpha - 3x) - m\cos 3x]^2 +$
$[4\text{sen}(\alpha - 3x) + m\,\text{sen}3x]^2 = 9m^2$

Al resolver:

$16 + m^2 - 8m[\cos(\alpha - 3x + 3x)] = 9m^2$

$\therefore\ 16 + m^2 - 8m\cos\alpha = 9m^2$

Ordenando: $m^2 = 2 - m\cos\alpha$

9. Calcular: $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ si:

$$f(\theta) = [1 + 2\cos(2\theta)][1 + 2\cos(2\theta)][1 + \cos(6\theta)][1 + 2\cos(8\theta)]$$

Resolución:

Sea:

$f(\theta) = [2\cos 2\theta + 1][2\cos 4\theta + 1][2\cos 6\theta + 1][2\cos 8\theta + 1]$

Se sabe:

$\text{sen}3x = \text{sen}x[2\cos 2x + 1]$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = [2\cos 2x + 1]$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \left(\frac{\text{sen}3\theta}{\text{sen}\theta}\right)\left(\frac{\text{sen}6\theta}{\text{sen}2\theta}\right)\left(\frac{\text{sen}9\theta}{\text{sen}3\theta}\right)\left(\frac{\text{sen}12\theta}{\text{sen}4\theta}\right)$$

Se pide: $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Sea: $\theta = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 5\theta = \pi \vee 10\theta = 2\pi$

Luego:

$\text{sen}6\theta = -\text{sen}4\theta$

$\text{sen}9\theta = -\text{sen}\theta$

$$f(\theta) = \frac{(-\text{sen}4\theta)(-\text{sen}\theta)\text{sen}12\theta}{(\text{sen}\theta)(\text{sen}2\theta)(\text{sen}4\theta)}$$

$$f(\theta) = \frac{\text{sen}(10\theta + 2\theta)}{\text{sen}2\theta}$$

$$f(\theta) = \frac{\text{sen}(2\pi + 2\theta)}{\text{sen}2\theta} \quad \therefore \quad f(\theta) = 1$$

10. En la identidad:

$$\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(6x)} + \frac{\text{sen}(6x)}{\cos(18x)} = a\tan(bx) + c\tan(2x)$$

$a > 0$. Calcular: $a + b + c$

Resolución:

Sea: $\underbrace{\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(6x)} + \frac{\text{sen}(6x)}{\cos(18x)}}_{P} = a\tan(bx) + c\tan 2x$

$$P = \frac{\text{sen}2x\cos 18x + \text{sen}6x\cos 6x}{\cos 6x\cos 18x}$$

$$P = \frac{2\text{sen}2x\cos 18x + 2\text{sen}6x\cos 6x}{2\cos 6x\cos 18x}$$

$$P = \frac{\text{sen}20x - \text{sen}16x + \text{sen}12x}{2\cos 6x\cos 18x}$$

$$P = \frac{2\text{sen}16x\cos 4x - \text{sen}16x}{2\cos 6x\cos 18x}$$

Factorizamos:

$$P = \frac{\text{sen}16x[2\cos 4x - 1]}{\underbrace{2\cos 6x}_{\cos 2x(2\cos 4x - 1)}\cos 18x} \Rightarrow P = \frac{\text{sen}(18x - 2x)}{2\cos 2x\cos 18x}$$

$$P = \frac{\text{sen}18x\cos 2x}{2\cos 2x\cos 18x} - \frac{\cos 18x\text{sen}2x}{2\cos 2x\cos 18x}$$

$$P = \frac{1}{2}\tan 18x - \frac{1}{2}\tan 2x = a\tan bx + c\tan 2x$$

$$a = \frac{1}{2};\ b = 18;\ c = -\frac{1}{2} \quad \therefore\ a + b + c = 18$$

11. Simplificar:

$$P = \frac{\text{sen}(4\theta)}{\cos(3\theta)}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\,\text{sen}\theta} - \frac{1}{1-\sqrt{2}\,\text{sen}\theta} + \frac{2}{\sqrt{2}\,\text{sen}\theta}\right)$$

Resolución:

$$P = \frac{\text{sen}4\theta}{\cos 3\theta}\left(\underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{2}\,\text{sen}\theta} - \frac{1}{1-\sqrt{2}\,\text{sen}\theta}}_{\frac{-2\sqrt{2}\text{sen}\theta}{1-2\text{sen}\theta}} + \frac{2}{\sqrt{2}\,\text{sen}\theta}\right)$$

$$P = \frac{\text{sen}4\theta}{\cos 3\theta}\left(\frac{2}{\sqrt{2}\,\text{sen}\theta} - \frac{2\sqrt{2}\,\text{sen}\theta}{1-2\text{sen}^2\theta}\right)$$

$$P = \frac{\text{sen}4\theta}{\cos 3\theta}\left(\frac{2 - 4\text{sen}^2\theta - 4\text{sen}^2\theta}{\sqrt{2}\,\text{sen}\theta(1-2\text{sen}^2\theta)}\right)$$

$$P = \frac{\text{sen}4\theta \times 2(1 - 4\text{sen}^2\theta)}{\sqrt{2}\,\text{sen}\theta\cos 3\theta\cos 2\theta}$$

$$P = \frac{(2\text{sen}2\theta\cos 2\theta)\times\sqrt{2}[1 - 4(1-\cos^2\theta)]}{\text{sen}\theta\cos 3\theta\cos 2\theta}$$

$$P = \frac{4\text{sen}\theta\cos\theta\times\sqrt{2}(4\cos^2\theta - 3)}{\text{sen}\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)} \quad \therefore\ P = 4\sqrt{2}$$

12. Simplificar: $T = \dfrac{\cos(3x) + \text{sen}(2x) - \text{sen}(4x)}{1 - 2\text{sen}x}$

Resolución:

Sea: $T = \dfrac{\cos 3x - \overbrace{(\text{sen}4x - \text{sen}2x)}^{2\text{sen}x\cos 3x}}{1 - 2\text{sen}x}$

Factorizamos:

$$T = \frac{\cos 3x(1 - 2\text{sen}x)}{(1 - 2\text{sen}x)} \quad \therefore\ T = \cos 3x$$

13. Si α, β y θ son arcos que están en progresión aritmética creciente y se cumple que:

$$\frac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta}{\cos\alpha + \cos\theta} = n\tan\beta, \text{ calcular: } n$$

Resolución:

Dato: $\alpha < \beta < \theta \wedge 2\beta = \alpha + \theta \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha+\theta}{2}$

Además:

$$\frac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta}{\cos\alpha + \cos\theta} = n\tan\beta$$

Pasamos a producto

$$\frac{2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} = n\tan\beta$$

$$\tan\left[\frac{\alpha+\theta}{2}\right] = n\tan\left[\frac{\alpha+\theta}{2}\right] \quad \therefore\ n = 1$$

14. Hallar una expresión equivalente a:

$$A = \frac{\text{sen}x + \text{sen}(2x) + \text{sen}(3x)}{\cos x + \cos(2x) + \cos(3x)}$$

Resolución:

Sea:

$$A = \frac{\overbrace{\text{sen}x + \text{sen}2x}^{2\text{sen}2x\cos x} + \text{sen}3x}{\underbrace{\cos x + \cos 2x}_{2\cos 2x\cos x} + \cos 3x}$$

Factorizamos:

$$A = \frac{\text{sen}2x(2\cos x + 1)}{\cos 2x(2\cos x + 1)}$$

$\therefore$ A = tan2x ó A = csc4x − cot4x

15. Simplificar

$$R = \left|\frac{\cos\alpha + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha)}{\text{sen}\alpha + \text{sen}(2\alpha) + \text{sen}(3\alpha)}\right|;\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Resolución:

$$\text{Sea: } R = \left|\frac{\overbrace{\cos 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos\alpha}^{2\cos 2\alpha\cos\alpha}}{\underbrace{\text{sen}3\alpha + \text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}_{2\text{sen}2\alpha\cos\alpha}}\right|$$

$$R = \left|\frac{\cos 2\alpha(2\cos\alpha + 1)}{\text{sen}2\alpha(2\cos\alpha + 1)}\right|$$

$R = |\cot 2\alpha|$

Dato: $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \underbrace{2\alpha}_{\in \text{II C}} < \pi$

$R = -\cot 2\alpha$

16. Hallar una expresión equivalente a:

$Q = \sqrt{3}\sec 70° - 2$

Resolución:

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{\cos 70°} - 2 = \frac{\sqrt{3} - 2\cos 70°}{\cos 70°}$$

$$Q = \frac{2\cos 30° - 2\cos 70°}{\cos 70°}$$

Transformamos a producto:

$$Q = \frac{2(2\text{sen}80°\text{sen}20°)}{\cos 70°}$$

$Q = -4\,\text{sen}50° \ \vee\ Q = -4\cos 40°$

17. Transformar a producto:

$S = 1 + \text{sen}84° - \text{sen}86° - \text{sen}\,88°$

Resolución:

$S = 1 + \cos 6° - (\cos 4° + \cos 2°)$

$S = 2\cos^2 3° - (2\cos 3°\cos 1°)$

$S = 2\cos 3°(\cos 3° - \cos 1°)$

$S = -2\cos 3°\underbrace{(\cos 1° - \cos\alpha°)}_{2\text{sen}2°\text{sen}1°}$

$S = -4\text{sen}1°\text{sen}2°\cos 3°$

18. Hallar los valores de las constantes A, B, C y D para que la expresión:

$32\cos^6\alpha = A + B\cos(2\alpha) + C\cos(4\alpha) - D\cos(6\alpha)$

sea una identidad trigonométrica. Dar como respuesta el valor de A + B + C + D.

Resolución:

Degradaremos $32\cos^6\alpha$

Conocemos que: $4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$

Elevamos al cuadrado:

$16\cos^6\alpha = 9\cos^2\alpha + \cos^2 3\alpha + 6\cos\alpha\cos 3\alpha$

Degradamos los cuadrados:

$32\cos^6\alpha = 9[2\cos^2\alpha] + [2\cos^2 3\alpha] + 6[2\cos\alpha \times \cos 3\alpha]$

$32\cos^6\alpha = 9[1 + \cos 2\alpha] + [1 + \cos 6\alpha] + 6[\cos 4\alpha + \cos 2\alpha]$

Luego:

$32\cos^6\alpha = \underset{A}{10} + \underset{B}{15}\cos 2\alpha + \underset{C}{6}\cos 4\alpha + \underset{D}{1}\cos 6\alpha$

$\therefore$ A + B + C + D = 32

19. Reducir:

$$A = \frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}x} - 2\cos(2x) - 2\cos(4x)$$

$$B = \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}x} - 2\cos(2x)$$

Indicar como respuesta el valor de A + B

Resolución:

$$A = \frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}x} - 2\cos(2x) - 2\cos(4x)$$

$$A = \frac{\text{sen}5x - 2\text{sen}x\cos 2x - 2\text{sen}x\cos 4x}{\text{sen}x}$$

$$A = \frac{\text{sen}5x - (\text{sen}3x - \text{sen}x) - (\text{sen}5x - \text{sen}3x)}{\text{sen}x}$$

$$A = \frac{\text{sen}x}{\text{sen}x} \quad \therefore\ A = 1$$

$$B = \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - 2\cos 2x = \frac{\text{sen}3x - 2\text{sen}x\cos 2x}{\text{sen}x}$$

$$B = \frac{\text{sen}3x - (\text{sen}3x - \text{sen}x)}{\text{sen}x} \Rightarrow B = \frac{\text{sen}x}{\text{sen}x}$$

$\therefore$ B = 1

Luego: A + B = 2

20. Reducir:

$$A = \frac{[1 - \tan(3x)\tan(2x)][\text{sen}(15x) - \text{sen}(11x)]}{\sec 3x(\cos 18x + \cos 8x)}$$

Resolución:

$$A = \frac{(1 - \tan 3x \tan 2x)(\text{sen}15x - \text{sen}11x)}{\sec 3x(\cos 18x + \cos 8x)}$$

$$A = \frac{\left(1 - \frac{\text{sen}3x\text{sen}2x}{\cos 3x \cos 2x}\right)(2\text{sen}2x \cos 13x)}{\frac{1}{\cos 3x}(2\cos 13x \cos 5x)}$$

$$A = \frac{(\cos 3x \cos 2x - \text{sen}3x\text{sen}2x)\text{sen}2x}{(\cos 3x \cos 2x)\left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)}$$

$$A = \frac{\cos 5x \text{sen}2x}{\cos 5x \cos 2x} \qquad \therefore A = \tan 2x$$

21. Si:

$$S = \frac{\text{sen}x + \text{sen}(3x)}{\cos x + \cos(3x)}; T = \frac{\text{sen}(5x) + \text{sen}(11x)}{\cos(5x) + \cos(11x)};$$

Reducir:

$V = [\cos(10x) + \cos(6x)](S + T)$

Resolución:

I. $S = \dfrac{\text{sen}x + \text{sen}3x}{\cos x + \cos 3x}$

$S = \dfrac{2\text{sen}2x \cos x}{2\cos 2x \cos x} \rightarrow S = \tan 2x$

II. $T = \dfrac{\text{sen}5x + \text{sen}11x}{\cos 5x + \cos 11x}$

$T = \dfrac{2\text{sen}8x \cos 3x}{2\cos 8x \cos 3x} \rightarrow T = \tan 8x$

III. $V = (\cos 10x + \cos 6x)(S + T)$

Reemplazamos:

$V = (2\cos 8x \cos 2x)(\tan 2x + \tan 8x)$

$V = 2(\cos 8x \cos 2x)\left(\dfrac{\text{sen}2x}{\cos 2x} + \dfrac{\text{sen}8x}{\cos 8x}\right)$

$V = 2(\cos 8x \text{sen}2x + \cos 2x \text{sen}8x)$

$\therefore V = 2\text{sen}10x$

22. Evaluar: $N = \dfrac{\text{sen}9°}{\text{sen}48°} - \dfrac{\text{sen}12°}{\text{sen}81°}$

Resolución:

Siendo: $\text{sen}81° = \cos 9°$

$$N = \frac{\text{sen}9° \cos 9° - \text{sen}48° \text{sen}12°}{\text{sen}48° \cos 9°}$$

$$2N = \frac{2\text{sen}9° \cos 9° - 2\text{sen}48° \text{sen}12°}{\text{sen}48° \cos 9°}$$

$$2N = \frac{\text{sen}18° - (\cos 36° - \cos 60°)}{\text{sen}48° \cos 9°}$$

$$2N = \frac{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right) + \frac{1}{2}}{\text{sen}48° \cos 9°}$$

$$2N = \frac{0}{\text{sen}48° \cos 9°} \Rightarrow N = 0$$

23. Reducir:

$S = \text{sen}5° + \text{sen}10° + \text{sen}15° + ...$
$+ \text{sen}345° + \text{sen}350° + \text{sen}355°$

Resolución:

$S = \text{sen}5° + \text{sen}10° + \text{sen}15° +$
$...+ \text{sen}345° + \text{sen}350° + \text{sen}355°$

Sea $\begin{cases} \text{primer: } 5° \\ \text{último: } 355° \\ \text{n.° de términos: } 71 \\ \text{razón: } 5° \end{cases}$

Luego:

$$S = \frac{\text{sen}\left(\frac{71 \times 5°}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{5° + 355°}{2}\right)}{\text{sen}\frac{5°}{2}}$$

$$S = \frac{\text{sen}\left(\frac{355°}{2}\right)\text{sen}180°}{\text{sen}\frac{5°}{2}} \rightarrow \quad \therefore S = 0$$

24. Si:

$A\text{sen}^5\alpha + B\text{sen}^3\alpha + C\text{sen}\alpha = \text{sen}5\alpha + \text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha$

hallar $A - B + C$

Resolución:

$A\text{sen}^5\alpha + B\text{sen}^3\alpha + C\text{sen}\alpha = \text{sen}5\alpha + \text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha$

Sea:

$k = \underline{\text{sen}5\alpha + \text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha}$

$k = 2\text{sen}3\alpha\cos 2\alpha + \text{sen}3\alpha$

$k = 2(3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha)(1 - 2\text{sen}^2\alpha) +$
$(3\text{Sen}\alpha - 4\text{Sen}^3\alpha)$

Hacemos un cambio de variable

Sea: $\text{sen}\alpha = x$

$k = 2(3x - 4x^3)(1 - 2x^2) + (3x - 4x^3)$

Ordenando:

$k = (16x^5 - 20x^3 + 6x) + (3x - 4x^3)$

$k = 16x^5 - 24x^3 + 9x$

Luego:

$Ax^5 + Bx^3 + Cx = 16x^5 - 24x^3 + 9x$

$\therefore A - B + C = 49$

25. Si se cumple; la expresión:

$3\text{sen}3x\cos x + 7\cos 3x\text{sen}x = \text{sen}x\cos x$

Calcular el valor de $\cos 4x$

Resolución:

$3\text{sen}3x\cos x + 7\cos 3x\text{sen}x = \text{sen}x\cos x$

Transformamos:

$3(2\text{sen}3x\cos x) + 7(2\text{sen}x\cos 3x) = 2\text{sen}x\cos x$

$3(\text{sen}4x + \text{sen}2x) + 7(\text{sen}4x - \text{sen}2x) = \text{sen}2x$

$10\text{sen}4x = 5\text{sen}2x$

$2[2\text{sen}2x\cos 2x] = \text{sen}2x \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{4}$

Nos piden: $\cos 4x$

$\Rightarrow \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\cos 4x = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - 1 \quad \therefore \cos 4x = -\dfrac{7}{8}$

26. Simplificar:

$$M = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos 2x}$$

Resolución:

$$M = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos 2x}$$

Se sabe: $\text{sen}^2x - \text{sen}^2y = \text{sen}(x + y)\,.\text{sen}\,(x - y)$

$$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos 2x}$$

$$M = \frac{(\cos 2x)\left(\frac{1}{2}\right)}{\cos 2x} \qquad \therefore\ M = \frac{1}{2}$$

27. Calcular la suma de los (n + 1) primeros términos:
$Q = \text{sen}\phi\sec 3\phi + \text{sen}3\phi\sec 9\phi + \text{sen}9\phi\sec 27\phi + \ldots$

Resolución:

$$Q = \frac{\text{sen}\phi}{\cos 3\phi} + \frac{\text{sen}3\phi}{\cos 9\phi} + \frac{\text{sen}9\phi}{\cos 27\phi} + \ldots + \frac{\text{sen}3\phi}{\cos 3^{n+1}\phi}$$

Analizamos el primer término:

$$\frac{\text{sen}\phi}{\cos 3\phi} = \frac{\text{sen}\phi\cos\phi}{\cos 3\phi\cos\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}2\phi}{\cos 3\phi\cos\phi}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\text{sen}(3\phi-\phi)}{\cos 3\phi\cos\phi}$$

$$\frac{\text{sen}\phi}{\cos 3\phi} = \frac{1}{2}(\tan 3\phi - \tan\phi)$$

en forma análoga se descompone cada término

$$\frac{\text{sen}\phi}{\cos 3\phi} = \frac{1}{2}(\tan 3\phi - \tan\phi)$$

$$\frac{\text{sen}3\phi}{\cos 9\phi} = \frac{1}{2}(\tan 9\phi - \tan 3\phi)$$

$$\frac{\text{sen}9\phi}{\cos 27\phi} = \frac{1}{2}(\tan 27\phi - \tan 9\phi)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\text{sen}3^n\phi}{\cos 3^{n+1}\phi} = \frac{1}{2}(\tan 3^{n+1}\phi - \tan 3^n\phi)$$

$$\therefore\ Q = \frac{1}{2}(\tan 3^{n+1}\phi - \tan\phi)$$

28. Calcular la suma de los k primeros términos de la siguiente serie:
$M = \tan x\tan 2x + \tan 2x\tan 3x + \tan 3x\tan 4x + \ldots$

Resolución:

Sabemos que:

$\tan(a - b) = \tan a - \tan b - \tan(a - b)\tan a\tan b$

entonces:

$\tan(a - b)\tan a\tan b = \tan a - \tan b - \tan(a - b)$

$\tan x\tan 2x\tan x = \tan 2x - \tan x - \tan x$

$\tan x\tan 3x\tan 2x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

$\tan x\tan 4x\tan 3x = \tan 4x - \tan 3x - \tan x$

$\vdots \qquad \vdots$

$\tan x\tan(k + 1)x\tan kx = \tan(k + 1)x - \tan kx - \tan x$

Sumando:

$\tan x[M] = \tan(k + 1)x - (k + 1)\tan x$

$\therefore\quad M = \tan(k + 1)x\cot x - (k + 1)$

29. Calcular: $D = \text{sen}^2\frac{\pi}{9} + \text{sen}^2\frac{2\pi}{9} + \text{sen}^2\frac{4\pi}{9}$

Resolución:

$$2D = 2\text{sen}^2\frac{\pi}{9} + 2\text{sen}^2\frac{2\pi}{9} + 2\text{sen}^2\frac{4\pi}{9}$$

$$2D = 1 - \cos\frac{2\pi}{9} + 1 - \cos\frac{4\pi}{9} + 1 - \cos\frac{8\pi}{9}$$

$$2D = 3 - \cos\frac{2\pi}{9} - \underbrace{\left(\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)}_{2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}}$$

$$2D = 3 - \cos\frac{2\pi}{9} - 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9},$$

Pero: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$2D = 3 - \cos\frac{2\pi}{9} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{9}$$

$$2D = 3 - \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9}$$

$$2D = 3 \Rightarrow D = \frac{3}{2}$$

30. Calcular el valor de R si:

$\alpha = \frac{\pi}{14} \qquad R = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 9\alpha$

Resolución:

$$R = \cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{9\pi}{14}$$

$$R^2 = \left(\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{9\pi}{14}\right)^2.$$

$$R^2 = \underbrace{\cos^2\frac{\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{9\pi}{14}}_{A} +$$

$$\underbrace{2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14} + 2\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{9\pi}{14} + 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{9\pi}{14}}_{B}$$

$\therefore\ R^2 = A + B$

$$B = 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14} + 2\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{9\pi}{14} + 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{9\pi}{14}$$

$$B = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} + \underbrace{\cos\frac{6\pi}{7}}_{-\cos\frac{\pi}{7}} + \cos\frac{3\pi}{7} +$$

$$\underbrace{\cos\frac{5\pi}{7}}_{-\cos\frac{2\pi}{7}} + \underbrace{\cos\frac{4\pi}{7}}_{-\cos\frac{3\pi}{7}}$$

$$B = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}$$

$$B = 0$$

$$A = \cos^2\frac{\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{9\pi}{14}$$

$$2A = 2\cos^2\frac{\pi}{14} + 2\cos^2\frac{3\pi}{14} + 2\cos^2\frac{9\pi}{14}$$

$$2A = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + 1 + \cos\frac{3\pi}{7} + 1 + \cos\frac{9\pi}{7}$$

Pero: $\cos\frac{9\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{7}$

$$2A = 3 + \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right)}$$

razón de la progresión: $r = \frac{2\pi}{7}$

número de términos: $n = 3$

$$2A = 3 + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\times\frac{2\pi}{7}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{2\pi}{7}}{2}\right)}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}}{2}\right)$$

$$2A = 3 + \frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}} = 3 + \frac{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}$$

$$2A = 3 + \frac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}$$

Pero:

$$\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

$$2A = 3 + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow A = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{7}{4} + 0 \quad \therefore R = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

31. a, b y c, están en progresión aritmética.
Reducir: $T = n\operatorname{sen}(a - b)$, sabiendo que:

$$n = \frac{(\operatorname{sen}a + \operatorname{sen}c)(\cos a + \cos c)}{\operatorname{sen}2b} + \cos 2(a - b)$$

Resolución:

Transformando a producto n

$$n = \frac{\left(2\operatorname{sen}\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}\right)\left(2\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}\right)}{2\operatorname{sen}b\cos b} + \cos 2\,(a - b)$$

pero como a, b y c están en progresión aritmética.

$$c - b = b - a \Rightarrow \frac{c+a}{2} = b \qquad \ldots(*)$$

reemplazando en la expresión anterior y simplificando $\operatorname{sen}\frac{a+c}{2}$ con senb y $\cos\frac{a+c}{2}$ con cosb, se tendrá:

$$n = 2\cos^2\frac{a-c}{2} + \cos 2(a - b)$$

$$n = 1 + \cos(a - c) + \cos 2(a - b)$$

de (*): $c = 2b - a$, luego:

$$n = 1 + \cos(a - (2b - a)) + \cos 2(a - b)$$

$$n = 1 + \cos(2a - 2b) + \cos 2(a - b)$$

$$n = 2\cos 2(a - b) + 1$$

$$n = \frac{\operatorname{sen}3(a - b)}{\operatorname{sen}(a - b)}$$

$$n = \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}3(a - b)$$

$$\therefore T = \operatorname{sen}3(a - b)$$

32. Eliminar x: $\frac{\operatorname{sen}x}{a} = \frac{\operatorname{sen}3x}{b} = \frac{\operatorname{sen}5x}{c}$

Resolución:

Usando proporciones

$$\frac{\operatorname{sen}5x + \operatorname{sen}3x}{c + b} = \frac{\operatorname{sen}x3x + \operatorname{sen}x}{b + a}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}4x\cos x}{c + b} = \frac{2\operatorname{sen}2x\cos x}{b + a}$$

$$\frac{\operatorname{sen}4x}{c + b} = \frac{\operatorname{sen}2x}{b + a}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}2x\cos 2x}{c + b} = \frac{\operatorname{sen}2x}{b + a}$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x = \frac{c + b}{b + a} \qquad \ldots(\alpha)$$

Además, se tiene del dato:

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{b} = \frac{\operatorname{sen}x}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x + 1 = \frac{b}{a}$$

$$2\cos 2x = \frac{b - a}{a} \qquad \ldots(\beta)$$

Igualando (α) y (β): $\frac{c + b}{b + a} = \frac{b - a}{a}$

$$\therefore a(c + b) = b^2 - a^2$$

33. Calcular: $T = \sec 2\frac{\pi}{7} + \sec 4\frac{\pi}{7} + \sec 6\frac{\pi}{7}$

Resolución:

$$T = \frac{1}{\cos 2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos 6\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos 4\frac{\pi}{7}}$$

$$T = \frac{\cos 6\frac{\pi}{7} + \cos 2\frac{\pi}{7}}{\cos 2\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos 4\frac{\pi}{7}}$$

$$T = \frac{2\cos 4\frac{\pi}{7}\cos 2\frac{\pi}{7}}{\cos 2\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos 4\frac{\pi}{7}}$$

Simplificando y dando común denominador

$$T = \frac{2\cos^2 4\frac{\pi}{7} + \cos 6\frac{\pi}{7}}{\cos 6\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}} = \frac{1 + \cos 8\frac{\pi}{7} + \cos 6\frac{\pi}{7}}{\cos 6\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}}$$

pero: $\cos 6\frac{\pi}{7} = \cos\left(2\pi - 8\frac{\pi}{7}\right) = \cos 8\frac{\pi}{7}$

Luego:

$$T = \frac{2\cos 8\frac{\pi}{7} + 1}{\cos 4\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}12\frac{\pi}{7}}{\operatorname{sen}4\frac{\pi}{7}}}{\cos 4\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}}$$

$$T = \frac{\operatorname{sen}12\frac{\pi}{7}}{\operatorname{sen}4\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}} = \frac{2\operatorname{sen}6\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}}{\operatorname{sen}4\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}\cos 6\frac{\pi}{7}}$$

Pero: $\operatorname{sen}6\frac{\pi}{7} = \operatorname{sen}\left(2\pi - 8\frac{\pi}{7}\right) = -\operatorname{sen}8\frac{\pi}{7}$

$$\Rightarrow T = \frac{-2\operatorname{sen}8\frac{\pi}{7}}{\operatorname{sen}4\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}} = \frac{-2\left(2\operatorname{sen}4\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}4\frac{\pi}{7}\cos 4\frac{\pi}{7}}$$

$$\therefore T = -4$$

34. Si: $\dfrac{\cos a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a + \cos b} = \cos 2\theta$

obtener: $\tan\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ en función de θ.

Resolución:

$$\tan\left(45° - \frac{a-b}{2}\right) = \cos 2\theta$$

$$\frac{\tan 45° - \tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}{1 + \tan 45° \tan\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \cos 2\theta$$

$$\frac{1 - \tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \cos 2\theta$$

y despejando la tangente:

$$\tan\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{a-b}{2}\right) = \tan^2\theta$$

35. Factorizar trigonométricamente:

$$T = 2\sqrt{3} - \sqrt{10} - \sqrt{2} + 2$$

Resolución:

$T = \sqrt{2}(\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1 + \sqrt{2})$

$T = \sqrt{2}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{5} + 1)]$

$T = 4\sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$

$T = 4\sqrt{2}\,[\cos 15° - \cos 36°]$

$T = 4\sqrt{2}\left[2\operatorname{sen}\dfrac{51°}{2}\operatorname{sen}\dfrac{21°}{2}\right]$

$\therefore T = 8\sqrt{2}\ \operatorname{sen}\dfrac{21°}{2}\ \operatorname{sen}\dfrac{51°}{2}$

36. Si los arcos a, b y g están en progresión aritmética ($\alpha < \beta < \gamma$), calcule:

$$F = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta\cos(\alpha - \beta)}$$

Resolución:

Sean: $\alpha = \theta, \beta = \theta + r$ y $\gamma = \theta + 2r$

$\Rightarrow F = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta + 2r)}{\operatorname{sen}(\theta + r)\cos(\theta + r)}$

$F = \dfrac{\operatorname{sen}(\theta + 2r) + \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\theta + r)\cos(-r)}$

Transformando a producto el numerador

$F = \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta + 2r}{2}\right)\cos\left(\frac{2r}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\theta + r)\cos(-r)}$

$\cos(-x) = \cos x;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

$F = \dfrac{2\operatorname{sen}(\theta + r)\cos r}{\operatorname{sen}(\theta + r)\cos r} \Rightarrow F = 2$

37. Si al factorizar trigonométricamente la expresión: $W = 2\sqrt{3} - \sqrt{10} - \sqrt{2} - 2$ se transforma en $-8\sqrt{2} \times \operatorname{sen}A° \times \cos B°$, halle: A + B

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$W = (2\sqrt{3} - 2) - (\sqrt{10} + \sqrt{2})$

$W = \sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$

$W = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$

$W = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{5+14}}{}\right)$

$W = 4\sqrt{2}\,(\operatorname{sen}15° - \operatorname{sen}54°)$

Transformando a producto la diferencia de senos:

$W = 4\sqrt{2}\left[2\operatorname{sen}\left(\dfrac{15° - 54°}{2}\right)\cos\left(\dfrac{15° + 54°}{2}\right)\right]$

$W = -\,8\sqrt{2}\ \operatorname{sen}(39°/2)\cos(69°/2)$

Luego:

$-8\sqrt{2}\operatorname{sen}A\cos B = -8\sqrt{2}\operatorname{sen}(39°/2)\cos(69°/2)$

$\Rightarrow A = 39°/2 \wedge B = 69°/2$

$\therefore A + B = 54°$

38. Si: $\cos(\theta + \alpha)\cos(\theta + \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, halle: $F = \operatorname{sen}(\theta + \alpha)\operatorname{sen}(\theta + \beta)$

Resolución:

Multiplicando por 2 m o m en la condición

$2\cos(\theta + \alpha)\cos(\theta + \beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$

$\cos(\theta + \alpha + \theta + \beta) + \cos(\theta + \alpha - \theta - \beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$

$\cos(2\theta + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$

$\cos(2\theta + \alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 0$

Transformando a producto

$-2\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\theta + 2\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\theta + 2\beta}{2}\right)$

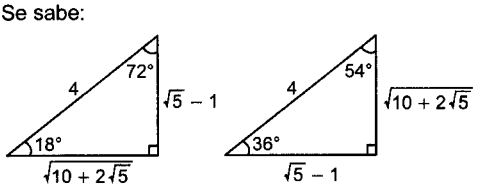
$-2\operatorname{sen}(\theta + \alpha)\operatorname{sen}(\theta + \beta) = 0$

$\operatorname{sen}(\theta + \alpha)\operatorname{sen}(\theta + \beta) = 0 \quad \therefore F = 0$

39. Hallar el valor de: $y = \operatorname{sen}(\pi/10) + \operatorname{sen}(13\pi/10)$

Resolución:

Se sabe:



$y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{10} + \operatorname{sen}\left(\pi + \dfrac{3\pi}{10}\right)$

$y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{10} + \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{10}$

$\dfrac{\pi}{10}\text{rad} <> 18°$

$y = \operatorname{sen}18° - \operatorname{sen}54°$

$y = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right) - \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \dfrac{-2}{4}$

$y = -\,1/2$

40. Sabiendo que $x + y = \theta$, halle el mínimo y máximo valor de $E = \cos x \cos y$

Resolución:

Multiplicando por 2:

$2E = 2\cos x\cos y$

$2E = \cos(x + y) + \cos(x - y)$

Reemplazando: $x + y = \theta$

$2E = \cos\theta + \cos(x - y)$

$E = \dfrac{\cos\theta + \cos(x - y)}{2}$

Construyendo E:

Por teoría: $-1 \le \cos(x - y) \le 1$

$+ (\cos\theta)$: $-1 + \cos\theta \le \cos\theta + \cos(x - y) \times 1 + \cos\theta$

$\times \left(\frac{1}{2}\right)$: $\dfrac{-1 + \cos\theta}{2} \le E \le \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$

$\therefore$ E mínimo $= \dfrac{-1 + \cos\theta}{2}$

También: E máximo $= \dfrac{1 + \cos\theta}{2} = \dfrac{2\cos^2(\theta/2)}{2}$

$\therefore$ E máximo $= \cos^2\dfrac{\theta}{2}$

41. Evaluar: $T = \dfrac{\text{sen}9°}{\text{sen}48°} - \dfrac{\text{sen}12°}{\text{sen}81°}$

Resolución:

De la expresión a evaluar:

$$T = \frac{\text{sen}9°}{\text{sen}48°} - \frac{\text{sen}12°}{\underbrace{\text{sen}81°}_{\cos 9°}}$$

$$T = \frac{\text{sen}9°\cos 9° - \text{sen}48°\text{sen}12°}{\text{sen}48° \times \cos 9°}$$

$$2T = \frac{2\text{sen}9° \times \cos 9° - 2\text{sen}48° \times \text{sen}12°}{\text{sen}48° \times \cos 9°}$$

$$2T = \frac{\text{sen}18° - (\cos 36° - \cos 60°)}{\text{sen}48° \times \cos 9°}$$

$$2T = \frac{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right) + \frac{1}{2}}{\text{sen}48° \times \cos 9°}$$

$$2T = \frac{0}{\text{sen}48° \times \cos 9°}$$

$\therefore T = 0$

42. En un triángulo ABC, halle la expresión L en términos de B.

$$T = \left\{\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\cos\left(\frac{A - C}{2}\right) - \text{sen}\frac{B}{2}}\right\}$$

Resolución:

Como:

$A + B + C = \pi$ rad

Por la identidad condicional:

$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

Además, como:

$\left(\frac{A + C}{2}\right) + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}\frac{B}{2} = \cos\left(\frac{A + C}{2}\right)$

Reemplazamos en T:

$$T = \frac{4\text{sen}\frac{A}{2} \times \text{sen}\frac{B}{2} \times \text{sen}\frac{C}{2}}{\underbrace{\cos\left(\frac{A - C}{2}\right) - \cos\left(\frac{A + C}{2}\right)}}$$

$$T = \frac{4\text{sen}\frac{A}{2} \times \text{sen}\frac{B}{2} \times \text{sen}\frac{C}{2}}{2\text{sen}\frac{A}{2} \times \text{sen}\frac{C}{2}}$$

$\therefore T = 2\text{sen}\frac{B}{2}$

43. Si en un triángulo ABC se cumple

$\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C < 4\cos A\cos B\text{sen}C$

$\text{sen}2A + \text{sen}2B + \sqrt{3}\cos(2B + C) = 0$

hallar la medida del ángulo C.

Resolución:

$\triangle ABC$: $A + B + C = 180°$

Condiciones:

$\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C < 4\cos A \times \cos B \times \text{sen}C$

Conocemos la identidad condicional:

Si: $A + B + C = 180°$

$\Rightarrow \text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C = 4\text{sen}A \times \text{sen}B \times \text{sen}C$

En la condición tendremos:

$4\text{sen}A \times \text{sen}B \times \text{sen}C < 4\cos A \times \cot B \times \text{sen}C$.

Como: $C \in \langle 0°; 180°\rangle \Rightarrow 0 < \text{sen}C \times 1$

Ahora: $\text{sen}A \times \text{sen}B \times \cos A \times \cos B$

$0 < \underbrace{\cos A \times \cos B - \text{sen}A \times \text{sen}B}$

$0 < \underbrace{\cos(A + B)}$

$0 < -\cos C \Rightarrow \cos C < 0$

$\Rightarrow C \in \langle 90°; 180°\rangle$ ...(1)

$\underbrace{\text{sen}2A + \text{sen}2B} + \sqrt{3}\cos(2B + C) = 0$

$2\text{sen}(A + B) \times \cos(A - B) + \sqrt{3}\cos(2B + C) = 0$

Como: $A + B + C = 180° \Rightarrow \text{sen}(A + B) = \text{sen}C$

$(A - B) + (2B + C) = 180°$

$\Rightarrow \cos(2B + C) = -\cos(A - B)$

Reemplazamos:

$2\text{sen}C \times \cos(A - B) \times \sqrt{3}\cos(A - B) = 0$

$\cos(A - B)\underbrace{(2\text{sen}C - \sqrt{3})}_{0} = 0$

$2\text{sen}C - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{sen}C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De(1): $C \in \langle 90°; 180°\rangle$

$\therefore C = 120°$

44. Halle el mínimo valor de:

$$M = \frac{\text{sen}(3x) + \text{sen}(9x)}{\cos(60° - 3x) + \cos(60° + 3x)} + \cos(6x)$$

Resolución:

Transformando a producto los términos de la fracción:

Términos de la fracción:

$M = \dfrac{2\text{sen}6x\cos 3x}{2\cos 60°\cos 3x} + \cos 6x$

Restringiendo los valores de x:

$\cos 3x \neq 0$

$3x \neq (2k + 1)\pi/2$

$x \neq (2k + 1)\pi/6;\ k \in \mathbb{Z}$

Simplificando:

$M = 2sen6x + cos6x$

$M = 2(2sen3xcos3x) + 2cos^2 3x - 1$

$M = 4sen3xcos3x + 2cos^2 3x - 1$

Como: $cos3x \neq 0$

$\Rightarrow M \neq 4sen3x(0) + 2(0)^2 - 1$

$M \neq -1$

Nota

$asen\theta + bcos\theta \in \left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\right]$

$a \wedge b$ constantes; θ es variable

$M = 2sen6x + cos6x$

$M = \left[-\sqrt{2^2+1^2}; \sqrt{2^2+1^2}\right] - \{-1\}$

$M = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] - \{-1\}$

M mínimo $= -\sqrt{5}$

45. Si $\dfrac{cos47° - cos73°}{sen43° + sen17°} = \dfrac{k}{\sqrt{3}}$, entonces al calcular cot58° se obtiene:

Resolución:

Condición: $\dfrac{cos47° - cos73°}{sen43° + sen17°} = \dfrac{k}{\sqrt{3}}$

Transformamos a producto:

$$\frac{2sen60° \times sen13°}{2\underbrace{sen30°}_{cos60°} \times cos13°} = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow tan60° \times tan13° = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \times tan13° = \frac{k}{\sqrt{3}} \Rightarrow tan13° = \frac{k}{3}$$

Buscamos hallar: cot58°

$\Rightarrow cot58° = tan32° = tan(45° - 13°)$

$$cot58° = \frac{tan45° - tan13°}{1 + tan45° \times tan13°}$$

$$cot58° = \frac{1 - \frac{k}{3}}{1 + \frac{k}{3}} \quad \therefore cot58° = \frac{3-k}{3+k}$$

46. Simplifique:

$T = sen(47°) + sen(61°) - sen(11°) - sen(25°)$

Resolución:

$$T = \underbrace{sen47° + \overbrace{sen61° - sen11°} - sen25°}$$

Transformamos a producto:

$$T = \underbrace{2sen11°cos36°} + \underbrace{2sen25° \times cos36°}$$

$$T = 2cos36°\underbrace{(sen25° + sen11°)}_{2sen18° \times cos7°}$$

$T = 4cos36° \times cos7° \times sen18°$

$$T = 4\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)cos7°$$

$\therefore F = cos7°$

47. Simplifique:

$$S = \frac{cos(10°) + cos(40°) - cos(120°)}{sen(40°) \times cos(25°)}$$

Resolución:

$$S = \frac{cos10° + \overbrace{cos40° - cos120°}}{sen40° \times cos25°}$$

Transformamos a producto:

$$S = \frac{cos10° + 2sen80° \times sen40°}{sen40° \times cos25°}$$

$$S = \frac{sen80° + 2sen80° cos50°}{sen40° \times cos25°}$$

$$S = \frac{sen80°(2cos50° + 1)}{sen40° \times cos25°}$$

$$S = \frac{(2sen40° cos40°)(sen25°(2cos50° + 1))}{sen40° \times cos25° \times sen25°}$$

$$S = \frac{2sen50° \times sen75°}{\frac{sen50°}{2}} = 4sen75°$$

$\therefore S = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

48. Halle una expresión equivalente a:

$N = \sqrt{3}sec70° - 2$

Resolución:

De la expresión dada:

$$N = \frac{\sqrt{3}}{cos70°} - 2 = \frac{\sqrt{3} - 2cos70°}{cos70°}$$

$$N = \frac{2cos30° - 2cos70°}{cos70°} = \frac{2(cos30° - cos70°)}{cos70°}$$

Transformamos a producto

$$N = \frac{2(2sen50° \times sen20°)}{cos70°}$$

$\therefore N = 4sen50°$

49. Transformar a producto:

$T = 1 + sen84° - sen86° - sen88°$

Resolución:

$T = 1 + \underset{\downarrow}{sen84°} - \underset{\downarrow}{sen86°} - \underset{\downarrow}{sen88°}$

$T = \underbrace{1 + cos6} - (cos4° + cos2°)$

$T = \underline{\underline{2cos^2 3°}} - (\underline{\underline{2cos3°}} \times cos1°)$

$T = 2cos3°(cos3° - cos1°)$

$T = -2cos3°\underbrace{(cos1° - cos3°)}_{2sen2° \times sen1°}$

$\therefore T = -4sen1° \times sen2° \times cos3°$

50. Si: $sen1° + sen2° + sen3° + ... + sen539° = tan\theta$

Resolución:

Usaremos la fórmula:

Reemplazando:

n.° de términos: $n = 539$
Primer ángulo: $p = 1°$
Último término: $u = 180°$
Razón de la PA: $r = 1°$

$$tan\theta = \frac{sen\left(\frac{nr}{2}\right)sen\left(\frac{p+u}{2}\right)}{sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow tan\theta = \frac{sen\left(\frac{539°}{2}\right)sen\left(\frac{539° + 1°}{2}\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\right)°}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\left(270° - \frac{1°}{2}\right)\operatorname{sen}270°}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}}$$

$$\tan\theta = \frac{\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}\right)(-1)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}} = \frac{\cos(1/2)^{\circ}}{\operatorname{sen}(1/2)^{\circ}}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \cot\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$$

51. Calcular:

$$P = \operatorname{sen}\frac{\pi}{15} + \operatorname{sen}\frac{5}{15} + \operatorname{sen}\frac{9\pi}{15} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{33\pi}{15}$$

Resolución:

$n = 9$; $p = \pi/15$; $u = 33\pi/15$; $r = 4\pi/15$

$$P = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \times \operatorname{sen}\left(\frac{p+u}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{18\pi}{15}\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{15}\right)}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2}}$$

$$P = \frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{15} \times \operatorname{sen}\frac{2\pi}{15}}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{15}} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{3\pi}{15}$$

$$\therefore\ P = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$$

52. El valor de:

$$A = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} + \cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^{\circ} + \cos^2\left(\frac{3}{2}\right)^{\circ} + \ldots + \cos^2\left(\frac{180}{2}\right)^{\circ}$$

Resolución:

De la expresión A:

$$A = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} + \cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^{\circ} + \cos^2\left(\frac{3}{2}\right)^{\circ} + \ldots + \cos^2\left(\frac{180}{2}\right)^{\circ}$$

Multipliquemos por 2 a A:

$$2A = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} + 2\cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^{\circ} + 2\cos^2\left(\frac{3}{2}\right)^{\circ} + \ldots + 2\cos^2\left(\frac{180}{2}\right)^{\circ}$$

$$2A = (1 + \cos1°) + (1 + \cos2°) + (1 + \cos3°) + \ldots + (1 + \cos180°)$$

$$2A = 180 + \underbrace{\cos1° + \cos2° + \cos3° + \ldots + \cos180°}_{M} \ldots(I)$$

Sea $M = \cos1° + \cos2° + \cos3° + \cos3° + \ldots + \cos1°$

Por fórmula: $M = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}\cos\frac{(p+u)}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}}$ $\begin{cases} n = 180 \\ p = 1° \\ u = 180° \\ r = 1° \end{cases}$

$$\Rightarrow M = \frac{\operatorname{sen}90°\cos\left(90° + \frac{1°}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}} = \frac{-\operatorname{sen}(1/2)^{\circ}}{\operatorname{sen}(1/2)^{\circ}}$$

$\Rightarrow M = -1 \quad \ldots(II)$

(II) en (I): $A = 89{,}5$

53. Si: $\cos(A - B)\operatorname{sen}\left(C - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(A + B)\operatorname{sen}\left(C + \frac{\pi}{4}\right)$

halle: cotAcotBcotC

Resolución:

$$\frac{\cos(A-B)}{\cos(A+B)} = \frac{\operatorname{sen}\left(C + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(C - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{\cos A\cos B + \operatorname{sen}A \times \operatorname{sen}B}{\cos A\cos B - \operatorname{sen}A \times \operatorname{sen}B} = \frac{\frac{\operatorname{sen}C + \cos C}{\sqrt{2}}}{\frac{\operatorname{sen}C - \cos C}{\sqrt{2}}}$$

Por proporciones:

$$\frac{2\cos A \times \cos B}{2\operatorname{sen}A \times \operatorname{sen}B} = \frac{2\operatorname{sen}C}{2\cos C}$$

$$1 = \frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} \times \frac{\operatorname{sen}B}{\cos B} \times \frac{\operatorname{sen}C}{\cos C}$$

$$1 = \tan A \times \tan B \times \tan C$$

54. Si en un triángulo ABC, se cumple que: $\operatorname{sen}^2A + \operatorname{sen}^2B + \operatorname{sen}^2C = 2$. ¿Qué tipo de triángulo es?

Resolución:

En un △ABC:

$\operatorname{sen}^2A + \operatorname{sen}^2B + \operatorname{sen}^2C = 2$

$\Rightarrow (1 - \cos^2A) + (1 - \cos^2B) + (1 - \cos^2C) = 2$

$1 = \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C \quad \ldots(I)$

Pero recordemos que, si: $A + B + C = 180°$

$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

En (I) obtenemos que: $2\cos A\cos B\cos C = 0$

Luego: $\cos A = 0 \vee \cos B = 0 \vee \cos C = 0$

Afirmamos entonces que uno de los ángulos del triángulo es de 90°:

∴ El triángulo es rectángulo.

55. Calcular: $M = \cos66°\cos6°$

Resolución:

Multiplicamos por 2:

$2M = 2\cos66°\cos6°$

$2M = \cos72° + \cos60°$

$$2M = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\therefore\ M = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}$$

56. Calcular: $T = \dfrac{\tan5° + \cot5° - 8\cos20°}{4}$

Resolución:

$$T = \frac{2\csc10° - 8\cos20°}{4} = \frac{\csc10° - 4\cos20°}{2}$$

$$T = \frac{1 - 2(2\cos20°\operatorname{sen}10°)}{2\operatorname{sen}10°}$$

(Transformando a diferencia)

$$T = \frac{1 - 2(2\cos30°\operatorname{sen}10°)}{2\operatorname{sen}10°} = \frac{2\operatorname{sen}10°}{2\operatorname{sen}10°}$$

$$\therefore\ T = 1$$

57. Reducir:

$$S = \operatorname{sen}(25° + A)\cos(5° - A) + \cos(185° + A)\operatorname{sen}(165° - A)$$

Resolución:

De la expresión S

$S = \text{sen}(25° + A)\cos(5° - A) + \cos(85° + A)\,\text{sen}(65° - A)$

$S = \cos(65° - A)\cos(5° - A) + \cos(85° + A)\cos(25° + A)$

Transformamos a suma:

$2S = 2\cos(65° - A)\cos(5° - A) + 2\cos(85° + A)\cos(25° + A)$

$2S = \cos(70° - 2A) + \cos 60° + \cos(110° + 2A) + \cos 60°$

$(70° - 2A) + (110° + 2A) = 180°$

(suplementarios)

$\Rightarrow \cos(70° - 2A) = -\cos(110° + 2A)$

$2S = 1 \Rightarrow S = 1/2$

58. Calcular:

$M = \text{sen}1° + \text{sen}2° + \text{sen}3° + \ldots + \text{sen}180°$

Resolución:

Como la expresión M tiene una cantidad considerable de términos, vamos aplicar la fórmula, para la suma de senos de ángulos que se hallan en progresión aritmética:

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(x + r) + \text{sen}(x + 2r) + \ldots + \text{sen}(x + (n - 1)r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}\,\text{sen}\left(\frac{p + u}{2}\right)}{\text{sen}\frac{r}{2}}$$

En el problema

n.° de términos: $n = 180$

Primer ángulo: $p = 1°$

Último ángulo: $u = 180°$

Razón de la PA: $r = 1°$

Reemplazando:

$$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{180}{2}\right)^{\circ}\text{sen}\left(\frac{p + u}{2}\right)^{\circ}}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}}$$

$$M = \frac{\text{sen}(90°30')}{\text{sen}30'} = \frac{\cos 30'}{\text{sen}30'} \quad \therefore\ M = \cot 30'$$

59. Si: $\cos 12° + \cos 60° + \cos 84° = \cos\alpha + \cos\beta$

hallar: α y β (agudos); $\alpha > \beta$

Resolución:

De la expresión, ordenando:

$\cos 84° + \cos 60° + \cos 12° = \cos\alpha + \cos\beta$

Transformando a producto:

$2\cos 72°\cos 12° + \cos 12° = \cos\alpha + \cos\beta$

Factorizando $\cos 12°$

$\cos 12°(2\cos 72° + 1) = \cos\alpha + \cos\beta$

$$\frac{\cos 12°\,\text{sen}36°(2\cos 72° + 1)}{\text{sen}36°} = \cos\alpha + \cos\beta$$

$$\frac{\cos 12°\,\text{sen}72°}{\text{sen}36°} = \frac{\cos 12°\,2\text{sen}36°\cos 36°}{\text{sen}36°} = \cos\alpha + \cos\beta$$

$2\cos 36°\cos 12° = \cos\alpha + \cos\beta$

$\cos 48° + \cos 24° = \cos\alpha + \cos\beta$

$\alpha = 48°;\ \beta = 24°$

60. Sabiendo que: $\text{sen}2\alpha + \text{sen}4\alpha = m$

$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = n$

Eliminar α

Resolución:

De las ecuaciones: $\text{sen}2\alpha + \text{sen}4\alpha = m$ ...(1)

$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = n$ ...(2)

$(1)^2 + (2)^2$:

$2 + 2\text{sen}4\alpha\,\text{sen}2\alpha + 2\cos 4\alpha\cos 2\alpha = m^2 + n^2$

Transformando a suma y diferencia:

$2 + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha = m^2 + n^2$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{m^2 + n^2 - 2}{2} \quad \ldots(3)$$

De (2) transformando a producto:

$2\cos 3\alpha\cos\alpha = n$

$2\cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1)\cos\alpha = n$

$2\cos^2\alpha(2\cos 2\alpha - 1) = n$

$(1 + \cos 2\alpha)(2\cos\alpha - 1) = n$ ...(4)

(3) en (4): $\left(1 + \frac{m^2 + n^2 - 2}{2}\right)(m^2 + n^2 - 3) = n$

Reduciendo:

$(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 3) = 2n$

61. En qué tipo de triángulo ABC se cumple:

$$\text{sen}A = \frac{\text{sen}B + \text{sen}C}{\cos B + \cos C}$$

Resolución:

Del triángulo: $A + B + C = 180°$

La expresión:

$$\text{sen}A = \frac{\text{sen}B + \text{sen}C}{\cos B + \cos C}$$

$$\text{sen}A = \frac{2\text{sen}\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - C}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - C}{2}\right)};\ \cos\left(\frac{B - C}{2}\right) \neq 0$$

$$\text{sen}A = \frac{\text{sen}\left(90° - \frac{A}{2}\right)}{\cos\left(90° - \frac{A}{2}\right)}$$

$$2\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos A/2}{\text{sen}A/2}$$

$\cos\frac{A}{2} = 0 \Rightarrow A = 180°$ (imposible)

$\Rightarrow 2\text{sen}^2\frac{A}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos A = 1 \Rightarrow \cos A = 0$

$\Rightarrow A = 90°$

Dicha condición se cumple en un triángulo rectángulo.

62. Si se cumple que:

$\text{sen}x + \text{sen}y = a$

$\cos x + \cos y = b$

hallar: $\text{sen}(x + y)$

Resolución:

De:

$\text{sen}x + \text{sen}y = a$ ...(1)

$\Rightarrow 2\text{sen}\dfrac{(x+y)}{2}\cos\dfrac{(x-y)}{2} = a$ ...(α)

$\cos x + \cos y = b$ ...(2)

$\Rightarrow 2\cos\dfrac{(x+y)}{2}\cos\dfrac{(x-y)}{2} = b$ ...(β)

(α) × (β):

$2\text{sen}(x+y)\cos^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = ab$

$\Rightarrow \text{sen}(x+y)[1+\cos(x-y)] = ab$ ...(3)

$(1)^2 + (2)^2$

$\cos(x-y) = \dfrac{a^2+b^2-2}{2}$ ...(4)

Reemplazando (4) en (3):

$\text{sen}(x+y)\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right) = ab$

$\therefore \text{sen}(x+y) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

63. En qué tipo de triángulo ABC se cumple que: $\text{sen}2B + \text{sen}2C = \text{sen}2A$

Resolución:

De la condición: $\text{sen}2B + \text{sen}2C = \text{sen}2A$

Transformando a producto:

$2\text{sen}(B+C)\cos(B-C) = 2\text{sen}A\cos A$

$(A + B + C = 180°)$ ...(1)

$\text{sen}A\cos(B-C) = \text{sen}A\cos A$

$\text{sen}A = 0 \Rightarrow A = 0$ (imposible)

$\cos(B-C) = \cos A \Rightarrow B - C = A$

$\Rightarrow B = C + A$ ...(2)

De: (2) en (1): $B = 90°$

Dicha condición se cumple en un triángulo rectángulo.

64. Simplificar:

$$M = \frac{\text{sen}20°}{\text{sen}50° + \text{sen}10°} + \frac{2\text{sen}40°}{\text{sen}60°° + \text{sen}20°}$$

Resolución:

Transformando:

$$M = \frac{\text{sen}20°}{2\text{sen}30°\cos 20°} + \frac{2\text{sen}40°}{2\text{sen}40°\cos 20°}$$

$M = \tan 20° + \sec 20°$;

Por RT complementarios

$M = \csc 70° + \cot 70°$

Como: $\cot\dfrac{x}{2} = \csc x + \cot x$

$\therefore M = \cot 35°$

65. Calcular:

$S = (\cos\theta - \cos 5\theta)(\cos 2\theta - \cos 3\theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)$

para: $\theta = \dfrac{2\pi}{13}$

Resolución:

De la expresión S transformamos a producto:

$S = 2\text{sen}3\theta\text{sen}2\theta \times 2\text{sen}\dfrac{5\theta}{2}\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2} \times \text{sen}5\theta\text{sen}\theta$

Ordenando:

$S = 8\text{sen}\theta\text{sen}2\theta\text{sen}3\theta\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\text{sen}\dfrac{5\theta}{2}\text{sen}5\theta$

Para: $\theta = \dfrac{2\pi}{13}$

$S = 8\text{sen}\dfrac{2\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{4\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{6\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{5\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{10\pi}{13}$

$S = 8\text{sen}\dfrac{\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{2\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{3\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{4\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{5\pi}{13} \times \text{sen}\dfrac{6\pi}{13}$

Recordar:

$\text{sen}\dfrac{\pi}{2n+1} \times \text{sen}\dfrac{2\pi}{2n+1} \times \text{sen}\dfrac{3\pi}{2n+1} \ldots \text{sen}\dfrac{n\pi}{2n+1} = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

$\Rightarrow S = \dfrac{8\sqrt{13}}{2^6} \quad \therefore S = \dfrac{\sqrt{13}}{8}$

66. Si: $x - y = \pi/3$

calcular el valor de la expresión:

$$T = \left(\frac{\text{sen}x - \cos x + \cos y - \text{sen}y}{\text{sen}x + \cos x + \text{sen}y + \cos y}\right)^2$$

Resolución:

De la expresión (ordenando y transformando):

$$T = \left(\frac{\text{sen}x - \text{sen}y + \cos y - \cos x}{\text{sen}x + \text{sen}y + \cos x + \cos y}\right)^2$$

$$T = \left(\frac{2\text{sen}\dfrac{(s-y)}{2}\cos\dfrac{(x+y)}{2} + 2\text{sen}\dfrac{(x-y)}{2}\text{sen}\dfrac{(x-y)}{2}}{2\text{sen}\dfrac{(x-y)}{2}\cos\dfrac{(x-y)}{2} + 2\cos\dfrac{(x-y)}{2}\cos\dfrac{(x-y)}{2}}\right)^2$$

Factorizando:

$$T = \frac{\text{sen}^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2}{\cos^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\left(\text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2}$$

$T = \tan^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ del dato $x - y = \dfrac{\pi}{3}$

$T = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow T = 1/3$

67. Hallar x, si: $\sec 70° + \csc 70° = x\sec 50°$

Resolución:

De la condición: $\sec 70° + \csc 70° = x\sec 50°$

$\dfrac{1}{\cos 70°} + \dfrac{1}{\text{sen}70°} = \dfrac{1}{\cos 50°}$

Dando mínimo:

$\dfrac{\cos 70° + \text{sen}70°}{\text{sen}70°\cos 70°} = \dfrac{x}{\cos 50°}$

$\dfrac{\cos 70° + \cos 20°}{2\text{sen}20°\cos 20°} = \dfrac{x}{2\text{sen}40°}$

Transformando a producto

$\dfrac{2\cos 45°\cos 25°}{\text{sen}40°} = \dfrac{x}{2\text{sen}40°}$

$\therefore x = \sqrt{2}\cos 25°$

68. Factorizar: $T = 1 - 2\cos 72° + 4\text{sen}6°$

Resolución:

De la expresión:

$T = 1 - 2\cos 72° + 4\text{sen}6°$

$T = 2\cos60° - 2\cos72° + 4\text{sen}6°$

$T = 2\underbrace{(\cos60° - \cos72°)}_{\text{Transformamos a producto}} + 4\text{sen}6°$

$T = 4\text{sen}66°\text{sen}6° + 4\text{sen}6°$

Factorizamos: $T = 4\text{sen}6°(1 + \text{sen}66°)$

$T = 4\text{sen}6°(1 + \cos24°)$

$T = 4\text{sen}6° \times 2\cos212°$

$\therefore\ T = 8\text{sen}6°\cos212°$

69. Calcular cot32° a partir de:

$$\frac{\text{sen}43° - \text{sen}17°}{\cos47° + \cos73°} = a\sqrt{3}$$

Resolución:

De la condición: transformaremos a producto:

$$\frac{2\text{sen}13°\cos30°}{2\cos60°\cos13°} = a\sqrt{3}$$

Ordenando: $\dfrac{\text{sen}13°}{\cos13°} \times \dfrac{\text{sen}60°}{\cos60°} = a\sqrt{3}$

$\tan13°\tan60° = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan13° = a$

Lo pedido:

$\cot32° = \tan58° = \tan(45° + 13°) = \dfrac{1 + \tan13°}{1 - \tan13°}$

Reemplazando: $\cot32° = \dfrac{1 + a}{1 - a}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2002 - I)

Si $\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\beta$ y $\cos\beta = 3\cos\alpha$, hallar el valor de: "$\cos(\alpha - \beta)$".

A) $-\frac{5}{7}$ B) $-\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

Resolución:

De la segunda expresión:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 3 \Rightarrow \frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \text{sen}\alpha} = 2 \qquad ...(\alpha)$$

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = 2 \qquad ...(\beta)$$

Igualando (α) y (β): $\dfrac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}$

$\Rightarrow \text{sen}\beta\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha = \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\cos\alpha$

$\text{sen}2\alpha + \text{sen}2\beta = 2\text{sen}(\alpha - \beta)$

$2\text{sen}(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha - \beta)$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \qquad ...(\gamma)$$

Multiplicando las dos expresiones dadas:

$\text{sen}\alpha\cos\beta = 6\text{sen}\beta\cos\alpha$

Dela expresión anterior obtenemos:

$\text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha = 5\text{sen}\beta\cos\alpha$

$\text{sen}(\alpha - \beta) = 5\text{sen}\beta\cos\alpha;$

$\text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha = 7\text{sen}\beta\cos\alpha$

$\text{sen}(\alpha + \beta) = 7\text{sen}\beta\cos\alpha$

Luego: $\cos(\alpha - \beta) = 5/7$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2007 - I)

Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{6x - \pi}{12}\right)}$$

A) $\text{sen}\left(\frac{6x + \pi}{12}\right)$ B) $\cos(3x + \pi)$ C) $\cos\left(\frac{3x + \pi}{12}\right)$

D) $\cos\left(\frac{6x + \pi}{12}\right)$ E) $\cos\left(\frac{6x + \pi}{18}\right)$

Resolución:

Por identidades:

$\cos^2A - \text{sen}^2B = \cos(A + B)\cos(A - B)$

En el problema:

$$E = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{6x - \pi}{12}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{x}{12} - \frac{\pi}{12}\right)}$$

Reduciendo: $E = \cos\left(\frac{x}{12} + \frac{\pi}{12}\right)$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2008 - I)

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulo, tal que $(\tan\alpha)\tan\beta)(\tan\gamma) = 2006$. Entonces podemos afirmar que el valor de:

$1 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$ es:

A) 2006 B) 2007 C) 2008

D) 2009 E) 2010

Resolución:

Condición: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ...(1)

$\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = 2006$ ...(2)

Propiedad: $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = 2006$

Luego lo pedido: $E = 1 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$

$E = 2007$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2009 - I)

Simplificando la siguiente expresión:

$K = \text{sen}^2 3A\csc^2 A + \cos^2 3A\sec^2 A + 2\cos4A$

se obtiene:

A) $6\cos^2 2A$ B) $6\cos2A$ C) $8\text{sen}^2 A$

D) $12\text{sen}A$ E) $12\cos^2 2A$

Resolución:

$K = \text{sen}^2 3A\csc2A + \cos^2 3A\sec^2 A + 2\cos4A$

Resolviendo:

$$K = \left(\frac{\text{sen}3A}{\text{sen}A}\right)^2 - \left(\frac{\cos3A}{\cos A}\right)^2 + 2\cos4A$$

$$K = \underbrace{(2\cos 2A + 1)^2 + (2\cos 2A - 1)^2}_{\text{Por Legendre}} + 2\cos 4A$$

$K = 8\cos^2 2A + 2 + 2\cos 4A$

$K = 8\cos^2 2A + 2 + 2(2\cos^2 2A - 1)$

$K = 8\cos^2 2A + 2 + 4\cos^2 2A - 2$

$\therefore\ K = 12\cos^2 2A$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2010 - II)

Si $16\text{sen}^5x = A\text{sen}x + B\text{sen}3x + C\text{sen}5x$, determine el valor de $(A + 2B + C)$.

A) -3 B) -2 C) 1
D) 4 E) 6

Resolución:

Nos piden: $A + 2B + C$

Si: $16\text{sen}^5x = A\text{sen}x + B\text{sen}^3x + C\text{sen}5x$ ...(I)

Transformaremos el primer miembro haciendo uso de las identidades trigonométricas:

$16\text{sen}^5x = 2\underbrace{(2\text{sen}^2x)}\,\underbrace{4\text{sen}^3x}$

$= 2(1 - \cos 2x)(3\text{sen}x - \text{sen}3x)$

$= 6\text{sen}x - 6\text{sen}x\cos 2x - 2\text{sen}3x + 2\text{sen}3x\cos 2x$

Ahora usando transformaciones trigonométricas:

$16\text{sen}^5x = 6\text{sen}x - 3(\text{sen}3x - \text{sen}x) - 2\text{sen}3x + \text{sen}5x + \text{sen}x$

$\Rightarrow\ 16\text{sen}^5x = 10\text{sen}x - 5\text{sen}3x + \text{sen}5x$ ...(II)

Identificando de (I) y (II):

$A = 10;\ B = -5$ y $C = 1$

$\therefore\ A + 2B + C = 10 + 2(-5) + 1 = 1$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Eliminar x e y de:

$$\frac{\cos(x+7y)}{a}=\frac{\cos(3x+5y)}{b}=\frac{\cos(5x+3y)}{c}=\frac{\cos(7x+y)}{d}$$

A) $a(a+c)=d(b+d)$ B) $a^2+b^2=b^2+d^2$
C) $c(a+c)=b(b+d)$ D) $b(a+b)=c(c+d)$
E) $d(a+d)=c(c+b)$

2. Se tiene un hexágono regular ABCDEF cuyo lado mide 2 cm, se traza una recta L, que pasa por A y forma con AB un ángulo θ. Calcular la suma de la cuarta potencia de las proyecciones de los lados del hexágono sobre la recta L.

A) 2 cm^4 B) 18 $\cos 2\theta$ cm^4 C) 36 cm^4
D) 36 $\cos 2\theta$ cm^4 E) 18 cm^4

3. De la igualdad:

$$k\,\text{sen}^m x\,\text{sen}^n 2x=\begin{vmatrix}\text{sen}x & \text{sen}3x & \text{sen}5x\\ \text{sen}2x & \text{sen}4x & \text{sen}6x\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

calcular: $T=\dfrac{k}{m+n}$

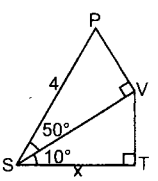
A) -1 B) -2 C) 2
D) 4 E) -4

4. Si se define la función: $f(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{9}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}-x\right)$

hallar: $f(x)_{máx.}$

A) 1 B) 1/2 C) 3/2
D) 3/4 E) 1/4

5. Del gráfico, calcular: x
($\cos 40° = 0{,}766$)



A) 2,532
B) 3,156
C) 2,216
D) 3,108
E) 2,748

6. Si el ángulo A mide $\frac{\pi}{13}$ rad, hallar el valor de:

$$T=\frac{\cos A\cos 10A}{\cos 2A+\cos 4A}$$

A) 1 B) $-1/2$ C) 2/3
D) 1/2 E) $-3/2$

7. Simplificar: $T=\dfrac{64\text{sen}^7x+\text{sen}7x}{64\cos^7x-\cos 7x}$

A) $\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ B) $\dfrac{\tan^2 x}{\tan 3x}$ C) $\dfrac{\tan^3 x}{\tan 3x}$

D) $\dfrac{\tan^3 x}{\tan^2 3x}$ E) $\dfrac{\tan^2 x}{\tan^3 3x}$

8. Calcular: $S=\sum_{k=1}^{6}\left(\dfrac{\text{sen}(5k\alpha)}{\text{sen}(k\alpha)}\right)$, si: $13\alpha=\pi$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) $\frac{1}{4}$

9. En un triángulo ABC, se tiene que:
$\cos A+\cos B+\cos C=m$

$$\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-A}{2}\right)=n$$

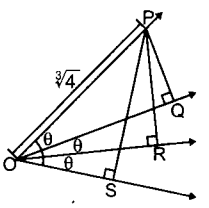
Hallar: $V=\text{sen}A\,\text{sen}B+\text{sen}B\,\text{sen}C+\text{sen}C\,\text{sen}A$

A) $\dfrac{m+2n-1}{2}$ B) $\dfrac{m+2n+1}{2}$

C) $\dfrac{m+4n-1}{2}$ D) $\dfrac{m+n-1}{2}$

E) $\dfrac{m+4n+1}{2}$

10. De acuerdo al gráfico, hallar el quivalente de xyz:
siendo: PQ = x; PR = y; PS = z



A) $\text{sen}6\theta+\text{sen}4\theta-\text{sen}2\theta$
B) $\text{sen}6\theta-\text{sen}4\theta-\text{sen}2\theta$
C) $\text{sen}4\theta+\text{sen}2\theta-\text{sen}6\theta$
D) $\text{sen}6\theta+\text{sen}4\theta+\text{sen}2\theta$
E) $\text{sen}2\theta-\text{sen}4\theta-\text{sen}6\theta$

11. Hallar el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix}\text{sen}2x & \text{sen}8x & \text{sen}14x\\ \text{sen}4x & \text{sen}10x & \text{sen}16x\\ \text{sen}6x & \text{sen}12x & \text{sen}18x\end{vmatrix}$$

A) $\text{sen}3x\,\text{sen}6x\,\text{sen}15x$
B) $-\text{sen}3x\,\text{sen}6x\,\text{sen}15x$
C) $2\text{sen}3x\,\text{sen}6x\,\text{sen}15x$
D) $-2\text{sen}3x\,\text{sen}6x\,\text{sen}15x$
E) 0

12. Si se cumple:
$\text{sen}^2\theta+2\text{sen}^2 2\theta+3\text{sen}^2 3\theta+4\text{sen}^2 4\theta+5\text{sen}^2 5\theta=$

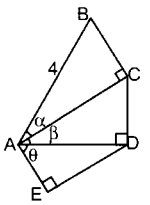
$$\frac{1}{4}\csc^2\theta(\text{sen}^2 5\theta-4)+\frac{15}{2}$$

calcular el valor de: $S=\text{sen}\theta\,\text{sen}11\theta$

A) 3/5 B) 4/5 C) 2/5
D) 3/7 E) 4/7

13. En el gráfico: $\alpha + \beta + \theta = 180°$
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\theta = -n$
hallar: AE

A) $\left(\frac{n+1}{4}\right)$
B) $\left(\frac{1-n}{4}\right)$
C) $\frac{n-1}{2}$
D) $n + 1$
E) $n - 1$



14. Si al reducir:

$$T = \text{sen}^3\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\text{sen}3\theta + \cos^3\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

se obtiene: $C\cos L\theta + J\cos A\theta$; $A > L > 0$
Calcular: $y = (C - J)(A - L)$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

15. Si: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$, calcular el valor numérico de:

$$A = \frac{(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)(\text{sen}\beta' + \cos\beta)(\text{sen}\gamma + \cos\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. Dado:

$$f(x) = \underbrace{(\cos^2 x - \text{sen}^2 2°)(\cos^2 x - \text{sen}^2 6°)(\cos^2 x - \text{sen}^2 10°)\ldots}_{11\text{ factores}}$$

evaluar: f(46°)

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{2^{20}}$ C) $\frac{1}{2^{22}}$
D) $\frac{1}{2^{48}}$ E) $\frac{\sqrt{22}}{2^{11}}$

17. Hallar el valor de la expresión:

$$T = \cot\frac{5\pi}{14}\cot\frac{3\pi}{14} - \cot\frac{3\pi}{14}\cot\frac{\pi}{14} - \cot\frac{5\pi}{14}\cot\frac{\pi}{14}$$

A) −4 B) −3 C) 5
D) 6 E) −7

18. Desde el centro de una semicircunferencia de radio r se traza perpendiculares a las cuerdas que se generan con el extremo A del diámetro AB con cada punto de la semicircunferencia si este se divide en n partes iguales. Calcular la suma de cuadrados de estas perpendiculares.

A) $r2(n - 1)$ B) $\frac{r^2 n}{2}$ C) $r^2(n + 1)$
D) $\frac{r^2}{2}(n - 1)$ E) $\frac{r^2}{2}(n + 1)$

19. Si se sabe $\alpha \neq \beta \neq \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$
¿cuál de las siguientes relaciones se debe cumplir para que la expresión sea máxima?

$$A = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)\cos\beta - \text{sen}(\alpha+\theta)\cos\theta}{\cos(\alpha+\beta+\theta)}$$

A) $\alpha - \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ B) $\beta - \alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
C) $\beta - \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ D) $\alpha + \theta = 2n\pi$
E) $\alpha + \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

20. Si se cumple $A + B + C = 180°$, factorizar
$S = \text{sen}^3 A\cos(B - C) + \text{sen}^3 B\cos(C - A) + \text{sen}^3 C\cos(A - B)$

A) 3senAsenBsenC B) 3cosAcosBcosC
C) 3tanAtanBtanC D) 3cscAcscBcscC
E) 2cosAcosBcosC

21. Sabiendo que $\theta = \frac{\pi}{25}$ rad, evaluar:

$$T = \sqrt{\prod_{k=1}^{12}\frac{1+\tan^2(2k-1)\theta}{1-\text{sen}^2 2k\theta}}$$

A) 2^{21} B) 2^{22} C) 2^{24}
D) 2^{28} E) 2^{12}

22. Calcular el valor de:
$A = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \ldots + \cos 91x$
sabiendo que: $91x = \pi$

A) 0 B) −1 C) $-\frac{1}{2}$
D) 1 E) $\frac{1}{2}$

23. Siendo A, B y C los ángulos internos de un triángulo ABC, tal que $M = \text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C$. Analizar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. Si $M = 2$; es un triángulo rectángulo.
II. Si $M > 2$; es un triángulo acutángulo.
III. Si $M < 2$; es un triángulo obtusángulo

A) VFF B) VVV C) VVF
D) VFV E) FVV

24. Sea el triángulo ABC donde:
$\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2} \leq k$, hallar k mínimo.

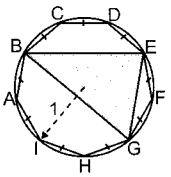
A) 3/8 B) 1/4 C) 1/2
D) 1/8 E) 1/16

25. Si A, B y C son los ángulos internos de un triángulo ABC, hallar un equivalente para la siguiente expresión:

$$\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} + 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

A) $\text{sen}^3 A + \text{sen}^3 B + \text{sen}^3 C$
B) $\text{sen}^3 3A + \text{sen}^3 3B + \text{sen}^3 3C$
C) $\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C$
D) $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C$
E) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

26. Siendo S el área de la región sombreada, calcular $A = (8\text{sen}20°)S$.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

27. Expresar la siguiente suma:
$S = 16\text{sen}^7\alpha - 24\text{sen}^5\alpha + 8\text{sen}^3\alpha$
como producto de razones trigonométricas.

A) $\text{sen}3\alpha\text{sen}5\alpha\text{sen}7\alpha$ B) $\text{sen}\alpha\text{sen}2\alpha\text{sen}3\alpha$
C) $\text{sen}2\alpha\text{sen}4\alpha\text{sen}6\alpha$ D) $\text{sen}\alpha\text{sen}3\alpha\text{sen}5\alpha$
E) $\text{sen}\alpha\text{sen}2\alpha\text{sen}4\alpha$

28. Siendo $x + y + z = k\pi$; $\forall k \in \mathbb{Z}$; k es par, donde:
$\cos x\,\text{sen}(y + z) + \cos y\,\text{sen}(x + z) + \cos z\,\text{sen}(x + y) = \alpha\,\text{sen}x\,\text{sen}y\,\text{sen}z$

Calcular el valor de $-\alpha$

A) 1/2 B) −2 C) 1
D) 2 E) cosxcosycosz

29. Determinar el valor de:
$T = \csc^2 x + \csc^2(60° - x) + \csc^2(60° + x)$

A) $6\csc^2 3x$ B) $9\csc^2 3x$ C) $12\csc^2 3x$
D) $15\csc^2 3x$ E) $18\csc^2 3x$

30. Siendo sec20° = n.
Hallar: $T = \dfrac{1 + 4\cos 20°}{1 - 4\text{sen}10°}$

A) 1/n B) n C) 1/n − 1
D) 1/n + 1 E) n − 1

31. Hallar el valor de la expresión:
$0{,}5\csc 10° - \text{sen}70° - 2\text{sen}75°\cos 35° + \text{sen}40°$

A) 1 B) − 1 C) 0
D) sen4° E) cos9°

32. Hallar el valor de la expresión:

$$S = \cos^{11}\frac{\pi}{9} + \cos^{11}\frac{5\pi}{9} + \cos^{11}\frac{7\pi}{9}$$

A) $\dfrac{1023}{1024}$ B) $\dfrac{1023}{2048}$ C) $\dfrac{255}{256}$
D) $\dfrac{17}{2002}$ E) $\dfrac{231}{512}$

33. Hallar el valor de la expresión:

$$T = \frac{\sqrt{\left(1 + \text{sen}\frac{\pi}{9}\right)\left(1 + \text{sen}\frac{2\pi}{9}\right)}}{2\cos\frac{\pi}{18} + 1}$$

A) $\csc\frac{\pi}{3}$ B) $\text{sen}\frac{\pi}{6}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\csc\frac{\pi}{4}$ E) $\sqrt{2}$

34. Hallar el valor de la expresión:

$$V = \sec\frac{\pi}{9} - \sec\frac{4\pi}{9} + \sec\frac{7\pi}{9}$$

A) −4 B) $-8\sqrt{2}$ C) $-2\sqrt{3}$
D) −5 E) −6

35. Hallar el valor de la sumatoria

$$S = \sum_{k=1}^{4}\cos\left[\arccos\left(\cos^4\frac{k\pi}{9}\right)\right]$$

A) 15/17 B) 17/18 C) 4/9
D) 19/16 E) 5/3

36. En un triángulo ABC, se cumple:
$\cos A + \cos B = 4\text{sen}^2\dfrac{C}{2}$

Hallar el valor de: $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

A) 1/2 B) 2/3 C) 1/3
D) 3/4 E) 4/3

37. Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$V = \frac{8\text{sen}^2 10° + \csc 10°}{\sqrt{\text{sen}^2 50°\text{sen}^2 10° + \text{sen}^2 10°\text{sen}^2 70° + \text{sen}^2 50\text{sen}^2 70}}$$

A) 4 B) 6 C) 3
D) 2 E) 8

38. Hallar el equivalente de la expresión:

$$S = \frac{\text{sen}x + \text{sen}3x}{\text{sen}2x + \text{sen}4x}$$

A) $\dfrac{\text{sen}4x}{\text{sen}6x}$ B) 1 C) $\dfrac{\cos 2x}{\text{sen}3x}$
D) $\dfrac{\text{sen}2x}{\text{sen}3x}$ E) sen2x

39. Hallar el equivalente de la expresión:
$\text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}5x + \text{sen}7x$

A) $\text{sen}4x + \text{sen}12x$ B) sen16x
C) $4\text{sen}x\,\text{sen}2x\cos 4x$ D) sen4x
E) $4\cos x\cos 2x\,\text{sen}4x$

40. Hallar el equivalente de la expresión:

$$S = \text{sen}4x + \frac{\text{sen}^2 2x}{\cos x\,\text{sen}x + \dfrac{\text{sen}x}{\cos x + \tan x\,\text{sen}x}}$$

A) tanx B) cos2xcos3x
C) 2senxcos3x D) sen2xsen3x
E) 2sen3xcosx

41. Transformar en producto la expresión:
$\cos 4x + \cos 8x + 2 - 4\text{sen}^2 x$

A) cos2xcos3x B) $4\cos 2x\,\text{sen}^2 3x$
C) $2\cos 2x\,\text{sen}^2 2x$ D) $4\cos 2x\cos^2 3x$
E) $4\cos 4x\cos^2 2x$

42. Hallar el máximo valor que adopta la expresión:
$S = \cos(x + 6°)\cos(x - 30°) + \text{sen}(x + 18°)\text{sen}(42° - x)$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\left(\frac{11+\sqrt{5}}{8}\right)$ C) $\frac{7+\sqrt{5}}{8}$

D) $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$ E) $\left(\frac{6+\sqrt{5}}{4}\right)$

43. Hallar el valor de la expresión:

$$T = \underbrace{\frac{\cos\frac{3\pi}{11}}{\cos\frac{10\pi}{11}} + \frac{\cos\frac{6\pi}{11}}{\cos\frac{9\pi}{11}} + \frac{\cos\frac{9\pi}{11}}{\cos\frac{8\pi}{11}}}_{5\text{ terminos}}$$

A) 1/2 B) 1 C) 3
D) 6 E) 9/2

44. Calcular el valor aproximado de la expresión:
$T = \csc 27° - \sec 27°$

A) $3-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}(3-\sqrt{5})$ C) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
D) $3+\sqrt{5}$ E) $5+\sqrt{5}$

45. Si x se aproxima a $\frac{\pi}{3}$ entonces la expresión:
$T = \frac{\tan x + \tan 2x}{\cos x + \cos 2x}$, se aproxima a:

A) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

46. Si: $\tan 7x = \sqrt{2}\cot 3x$, hallar: $S = \frac{\sec 4x}{\sec 10x}$

A) $\sqrt{2}-3$ B) $2\sqrt{2}-3$ C) $\sqrt{2}+3$
D) $2\sqrt{2}+3$ E) $\sqrt{2}+6$

47. En un triángulo ABC, determinar el valor de
$S = \frac{\text{sen}A\cos B\cos C + \text{sen}B\cos A\cos C + \text{sen}C\cos A\cos B}{\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C}$

A) 0,75 B) 0,5 C) 0,25
D) 1,5 E) 0,125

48. Determinar el valor de R^E si se verifica la igualdad:
$2\text{sen}\frac{10\pi}{11} - \tan\frac{9\pi}{11} = R\left(\text{sen}\frac{8\pi}{11}\text{sen}\frac{7\pi}{11}\right)^E$

A) $\frac{\sqrt{11}}{22}$ B) $\frac{2\sqrt{11}}{22}$ C) $4\sqrt{11}$
D) $\frac{4\sqrt{11}}{11}$ E) $\frac{\sqrt{11}}{33}$

49. En un triángulo acutángulo ABC, se cumple:
$\frac{\tan A}{m} = \frac{\tan B}{n} = \frac{\tan C}{p}$, si:
$\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C = \left[\frac{m+n+p}{mnp}\right]^x [(m+n)(n+p)(p+m)]^y$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

50. Transformar a producto: $S = \cos 22\theta - \text{sen}23\theta$

A) $\cos\theta\cos 2\theta$ B) $\cos 2\theta\cos 3\theta$ C) $\cos 3\theta\cos 4\theta$
D) $\cos\theta\cos 5\theta$ E) $\cos 2\theta\cos 5\theta$

51. Si: $\text{sen}38° + \text{sen}12° = m - n$
$\cos 38° + \cos 12° = m + n$
calcular: $\cot 65°$

A) $\frac{m-n}{m}$ B) $\frac{m+n}{m}$ C) $\frac{m-n}{m+n}$
D) $\frac{m+n}{m-n}$ E) $\frac{2mn}{m-n}$

52. Hallar k: $k\text{sen}40° = \sec 40° + \sec 100°$

A) $2\sqrt{3}$ B) $-2\sqrt{3}$ C) 1
D) $4\sqrt{3}$ E) $-4\sqrt{3}$

53. Transformar a producto:
$E = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$

A) $4\cos x\cos 2x\cos 3x$ B) $4\cos x\text{sen}2x\cos 3x$
C) $4\text{sen}x\text{sen}2x\text{sen}3x$ D) $4\cos x\cos 2x\cos 4x$
E) $4\cos x\cos 2x\text{sen}3x$

54. Transformar a producto:
$A = 2\cos 40° + 2\cos 20° + 1$

A) $\text{sen}50°\sec 10°$ B) $\text{sen}50°\sec 20°$
C) $\text{sen}40°\sec 10°$ D) $\text{sen}50°\csc 10°$
E) $\text{sen}50°\csc 20°$

55. Transformar a producto: $M = 4\cos x\cos 3x + 1$

A) $\text{sen}5x\sec x$ B) $\text{sen}5x\csc x$ C) $\cos 5x\sec x$
D) $\cos 5x\csc x$ E) $\sec x\cos 7x$

56. Si se tiene que: $\cos x = \cos 5x + 2\text{sen}4x$
calcule el valor de: $M = \text{sen}5x + \text{sen}x - 2\cos 4x$

A) 1 B) −2 C) 0 D) −1 E) 2

57. Determine el valor agudo de θ para que se verifique la igualdad: $1 + \tan 20°\tan 2\theta = 4\cos 40°$

A) 20° B) 40° C) 60° D) 80° E) 50°

58. Calcular el valor de:

$$E = \text{sen}\frac{2\pi}{7} + \text{sen}\frac{4\pi}{7} - \text{sen}\frac{6\pi}{7}$$

A) $2\sqrt{7}$ B) $4\sqrt{7}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}/2$ E) $\sqrt{7}/4$

59. En un △ABC, reducir:

$$E = \frac{1-\cos A+\cos B+\cos C}{1-\cos A+\cos B-\cos C}$$

A) $\tan\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$ B) $\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ C) $\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$
D) $\cot\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ E) $\cot\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$

60. Calcule la suma de los n primeros términos de:
$S = \text{sen}x\cos x + \text{sen}2x\cos 4x + \text{sen}3x\cos 9x + \ldots$

A) $\frac{1}{2}\text{sen}n(n+1)x$ B) $\frac{1}{2}\cos n(n+1)x$
C) $\frac{1}{2}\text{sen}n(n-1)x$ D) $\frac{1}{2}\cos n(n-1)x$
E) $\text{sen}n(n-1)\frac{x}{2}$

61. Calcular: $\text{sen}^2x + \text{sen}^2 2x + \text{sen}^2 3x + \ldots + \text{sen}^2 nx$ para: $x = \dfrac{2\pi}{n+1}$

A) $n+2$ B) $\dfrac{n+2}{2}$ C) $\dfrac{n+1}{2}$
D) n E) $(n+1)^2$

62. Simplificar:
$$\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{3\pi}{n} + \ldots + \text{sen}\frac{n\pi}{n}$$

A) $\tan\dfrac{\pi}{n}$ B) $\cot\dfrac{\pi}{n}$ C) $\tan\dfrac{\pi}{2n}$
D) $\cot\dfrac{\pi}{2n}$ E) $\tan\dfrac{2\pi}{n}$

63. Hallar:
$$\cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{3\pi}{n} + \cos^2\frac{5\pi}{n} + \ldots + \cos^2(2n-1)\frac{\pi}{n}$$

A) n B) $n/4$ C) $n/2$
D) $2n$ E) $4n$

64. Simplificar la expresión:
$$E = \frac{\text{sen}1 + \text{sen}2 + \text{sen}3 + \ldots + \text{sen}(n-1)}{\cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + \ldots + \cos(n-1)}$$

A) $\cot n$ B) $\tan n$ C) $\cot\dfrac{n}{2}$
D) $\tan\dfrac{n}{2}$ E) $\tan\dfrac{n}{4}$

65. Si: $A = \text{sen}1° + \text{sen}2° + \text{sen}3° + \ldots + \text{sen}180°$
$B = \cos1° + \cos2° + \cos3° + \ldots + \cos180°$
calcular: $A \times B$

A) $\tan(1/2)°$ B) $-1/2$ C) $-\cot(1/2)°$
D) 1 E) -1

66. Si: $\tan(\alpha+\theta) + \tan(\alpha-\theta) = 2$
calcular: $\dfrac{\text{sen}4\alpha}{1-\cos4\theta}$

A) 1 B) -1 C) $1/2$
D) $-1/2$ E) 2

67. Calcular el valor de: $E = \sqrt{3}\cot20° - 4\cos20°$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $1/2$

68. Si se cumple que: $\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha = 1/4$
calcule el valor de: $E = \dfrac{\text{sen}8\alpha + \text{sen}6\alpha}{\text{sen}2\alpha}$

A) $1/2$ B) $-1/4$ C) 1
D) $1/4$ E) $-1/2$

69. Transformar en otra equivalente: $E = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos3\theta}$

A) $0{,}25(\sec3\theta - \sec\theta)$ B) $0{,}25(\sec\theta - \sec3\theta)$
C) $0{,}25(\sec2\theta + \sec\theta)$ D) $0{,}25(\sec\theta - \sec\theta)$
E) $0{,}25(\sec4\theta - \sec2\theta)$

70. Hallar x en: $\tan x = \dfrac{2\cos20° - \cos40°}{\text{sen}40°}$
siendo x agudo.

A) $45°$ B) $15°$ C) $30°$
D) $60°$ E) $40°$

71. En un triángulo ABC se cumple: $\dfrac{A}{2}$
$2\text{sen}B\text{sen}C = \text{sen}A\cot\dfrac{A}{2}$
se trata de un triángulo:

A) equilátero B) rectángulo C) isósceles
D) acutángulo E) obtusángulo

72. Si se tiene que: $\theta = \dfrac{2\pi}{13}$, calcular el valor de:
$E = (\cos\theta - \cos5\theta)(\cos2\theta - \cos3\theta)(\cos4\theta - \cos6\theta)$

A) $\sqrt{13}/4$ B) $\sqrt{13}/8$ C) $\sqrt{13}/16$
D) $\sqrt{13}/2$ E) $\sqrt{13}$

73. Si $\cos x = \tan^2\phi\cos y$,
calcule: $E = \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\tan\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

A) $\cos2\phi$ B) $\cos4\phi$ C) $\cos^2\phi$
D) $\tan^2\phi$ E) $\text{sen}2\phi$

74. Se tiene que:
$M = \text{sen}\left(\dfrac{3-3\cos^2x}{\text{sen}x}\right) + \text{sen}(2\text{sen}x) + \text{sen}(\text{sen}x)$
Al factorizar es: $M = A\,\text{sen}B\cos C\cos D$;
calcule: $B + C + D$

A) $2\text{sen}x$ B) $-\text{sen}x$ C) $4\text{sen}x$
D) $3\text{sen}x$ E) $-3\text{sen}x$

75. Si $\tan(a+b-c)\tan b = \tan(a-b+c)\tan c$
calcule: $\dfrac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}c} + \dfrac{\cos c}{\cos(a-b)}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

76. Calcule el valor de la expresión
$M = \dfrac{\text{sen}23\theta - \text{sen}3\theta}{\text{sen}16\theta + \text{sen}4\theta}$; $\theta = \dfrac{\pi}{19}$

A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

77. Obtenga n en la igualdad:
$\csc3\theta - \csc\theta = n\cos2\theta\csc3\theta$

A) -4 B) -2 C) 2
D) 4 E) 6

78. Si: $A + B + C = \pi$,
calcule: $\dfrac{\cos C}{\text{sen}B\cos A} - \dfrac{\cos B}{\text{sen}C\cos A}$

A) $\cot C + \cot B$ B) $\cot C - \cot B$
C) $\cot A - \cot B$ D) $\cot A + \cot B$
E) $\cot B - \cot C$

79. En un triángulo ABC, reduzca:
$$N = \frac{\text{sen}A + \text{sen}B - \text{sen}C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1}$$

A) tanAtanBtanC B) cotAcotBcotC
C) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ D) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$
E) $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

80. Factorice:

$$R = 20 + 12\cos 4x + 30\cos 2x + 2\cos 6x$$

A) $30\cos^6 x$ B) $32\cos^4 x$ C) $64\cos^3 x$
D) $64\cos^6 x$ E) $30\cos^5 x$

81. Calcule:

$$D = 16\cos^7\frac{5\pi}{14} - 24\operatorname{sen}^5\frac{\pi}{7} + 8\cos^3\frac{5\pi}{14}$$

A) $\frac{\sqrt{11}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{8}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

82. Simplifique la sumatoria:

$$M = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$$

A) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2n} - \cot x$ B) $2n\cot x + \cot 2x$
C) $\cot\frac{x}{2^n} - 2n\cot 2x$ D) $\cot 2nx - \cot 2x$
E) $\cot 2x$

83. Reduzca:

$$K = \sum_{i=1}^{p}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi i}{p+1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi i}{p+1}\right)$$

siendo (m + n) divisible por 2(p + 1)

A) $\frac{p+1}{2}$ B) $-\left(\frac{p+1}{2}\right)$ C) $\frac{p-1}{2}$
D) $\frac{1-p}{2}$ E) $p - 1$

84. Reduzca

$$A = \binom{10}{0}\cos 1 + \binom{10}{1}\cos 2 + \binom{10}{2}\cos 3 + \ldots + \binom{10}{10}\cos 11$$

A) 1 B) $2^{10}\cos^{10}\frac{1}{2}\cos 6$
C) $\operatorname{sen}6\cos^{10}\frac{1}{2}$ D) $\cos^{10}\frac{1}{2}\cos 6$
E) $2^{10}\cos^{10}\frac{1}{2}\operatorname{sen}6$

85. Una circunferencia de radio 1 se divide en n arcos iguales. Calcule la suma de las distancias de los puntos de sección a cada extremo del diámetro, siendo un punto de sección un extremo de diámetro.

A) $\cot\frac{\pi}{4n} - 1$ B) $\cot\frac{\pi}{2n}$ C) $\tan\frac{\pi}{4n} + 1$
D) $\tan\frac{\pi}{4n} - 1$ E) $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}$

86. Calcule:

$$P = \left(\frac{1}{2}\sec\frac{4\pi}{9}\sec\frac{\pi}{9} - 1\right)\left(2\sec\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} - 1\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

87. Calcule:

$$\left(\cot\left(\frac{\pi}{4n+2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)\right)$$
$$\left(\cot\left(\frac{2\pi}{4n+2}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{4n+2}\right)\right)\ldots\left(\cot\left(\frac{n\pi}{4n+2}\right) - \tan\left(\frac{n\pi}{4n+2}\right)\right)$$

A) $\sqrt{2n+1}$ B) $\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$ C) $\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}$
D) $\frac{2^n}{\sqrt{2n+1}}$ E) 2^n

88. Obtenga el valor de:

$$A = \frac{-\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{3\pi}{10}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}}$$

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{23}$
D) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

CLAVES

1. C	13. E	25. A	37. E	49. C	61. C	73. A	85. A
2. C	14. E	26. C	38. D	50. D	62. D	74. D	86. C
3. A	15. C	27. E	39. E	51. C	63. C	75. A	87. D
4. D	16. C	28. B	40. E	52. E	64. D	76. A	88. E
5. A	17. E	29. B	41. D	53. A	65. C	77. B	
6. B	18. D	30. C	42. C	54. D	66. C	78. B	
7. D	19. C	31. A	43. D	55. D	67. A	79. D	
8. C	20. A	32. E	44. B	56. E	68. C	80. D	
9. C	21. C	33. B	45. C	57. D	69. A	81. B	
10. C	22. A	34. E	46. B	58. D	70. D	82. A	
11. E	23. B	35. D	47. C	59. A	71. C	83. B	
12. B	24. D	36. C	48. D	60. A	72. B	84. B	

Funciones trigonométricas

08 capítulo

Georg Rheticus

Georg Joachim Rheticus (Feldkirch, Austria, 16 de febrero de 1514-Košice, Hungría, 4 de diciembre de 1574), de nombre real Georg Joachim von Lauchen, fue un matemático, astrónomo, teólogo, cartógrafo, constructor de instrumentos musicales y médico austriaco. Rheticus era hijo de Georg Iserin, el médico local de Feldkirch. Se educó en la escuela de latín de Feldkirch para seguir su formación como matemático de 1528 a 1531 en Zúrich, luego en la Universidad de Wittenberg, donde consiguió en 1536 un magisterio de artes libres. Gracias al patronazgo de PhilippMelanchthon, se convirtió en 1537 en profesor de Matemáticas y Astronomía en Wittenberg. El año siguiente, Melanchthon le permitió un largo viaje de estudios para visitar a famosos matemáticos y astrónomos.

Fue el único discípulo de Copérnico y contribuyó considerablemente en la expansión de su pensamiento. Durante esa época dio las primeras noticias sobre la obra copernicana, editada en su *Narratio prima de libris revolutionum Copernici*. De camino a Núremberg para preparar la edición, todavía publicó en Wittenberg la parte matemática, completada por las tablas de senos y cosenos calculadas por él mismo. Otra contribución importante de Rheticus a las ciencias fueron sus tablas de funciones trigonométricas realizadas con una exactitud de 10 segundos.

Fuente: Wikipedia

CONCEPTOS PRELIMINARES

Intervalos

- Al conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b se le llama "Intervalo abierto" y se denota mediante $\langle a; b\rangle$.

  Decir $m \in \langle a; b\rangle$ equivale a decir $a < m < b$ y viceversa.

  Ejemplo:

  $2 \in \langle -1; 3\rangle$; $-5 \in \langle -6; 10\rangle$; $-8 \notin \langle -8; 0\rangle$

> **Nota**
>
> Decir $m \in \langle 1; 5\rangle$ significa que m puede tomar cualquier valor entre 1 y 5, pero no puede ser igual a $1 \vee 5$.

- Al conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b se le llama "intervalo cerrado" y se denota mediante $[a; b]$.

  Decir $m \in [a; b]$ equivale a decir $a \leq m \leq b$ y viceversa.

  Ejemplo:

  $2 \in [-1; 3]$; $6 \in [0; 6]$; $7 \in [0; 6]$

> **Nota**
>
> Decir $m \in [2; 7]$ significa que m puede tomar cualquier valor entre 2 y 7, inclusive puede ser igual a $2 \vee 7$.

- Hay otros intervalos cuya definición es semejante a los anteriores y son:

  Intervalo semiabierto por la izquierda: $\langle a; b]$

  Intervalo semiabierto por la derecha: $[a; b\rangle$

  Decir $m \in \langle a; b]$ equivale a decir: $a < m \leq b$ y viceversa.

  Decir $m \in [a; b\rangle$ equivale a decir: $a \leq m < b$ y viceversa.

  Ejemplo:

  $5 \in \langle 2; 5]$; $8 \notin \langle 8; 9]$; $-5 \in \langle -6; 0]$; $9 \notin [6; 9\rangle$

  $7 \in [5; 9\rangle$; $-8 \in [-8; 0\rangle$

> **Nota**
>
> Cada uno de los intervalos $\langle a; b\rangle$, $[a; b]$, $\langle a; b]$, $[a; b\rangle$ es un intervalo finito cuyo extremo izquierdo es a y cuyo extremo derecho es b ($a < b$).

- Otro tipo de intervalos son los denominados "intervalos infinitos" y se definen como sigue:

  Al conjunto de todos los números mayores que a se denota: $\langle a; +\infty\rangle$

  $m \in \langle a; +\infty\rangle$ equivale a: $m > a$ y viceversa.

- Al conjunto de todos los números mayores o iguales que a se denota $[a; +\infty\rangle$

  $m \in [a; +\infty\rangle$ equivale a: $m \geq a$ y viceversa.

- Al conjunto de todos los números menores que a se denota $\langle -\infty; a\rangle$

  $m \in \langle -\infty; a\rangle$ equivale a: $m < a$ y viceversa.

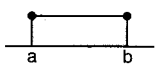
- Al conjunto de todos los números menores o iguales que a se denota $\langle -\infty; a\rangle$

  $m \in \langle -\infty; a\rangle$ equivale a: $m \leq a$ y viceversa.

> **Nota**
>
> - A los intervalos $\langle a; b]$ y $[a; b\rangle$ también se les denomina semiintervalos.
> - A los intervalos $\langle -\infty; a]$, $\langle -\infty; a\rangle$, $\langle a; +\infty\rangle$, $[a; +\infty\rangle$ también se les denomina rayos.

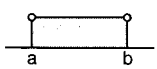
Representación gráfica de los intervalos

Intervalo cerrado: $[a; b]$



$x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

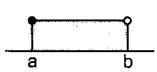
Intervalo abierto: $\langle a; b\rangle$



$x \in \langle a; b\rangle \Leftrightarrow a < x < b$

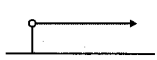
Intervalos semiabiertos

$x \in \langle a; b] \Leftrightarrow a < x \leq b$

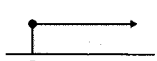


$x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x < b$

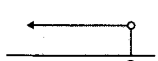
Intervalos infinitos



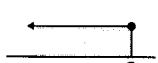
$x \in \langle a; +\infty\rangle \Leftrightarrow x > a$



$x \in [a; +\infty\rangle \Leftrightarrow x \geq a$



$x \in \langle -\infty; -a\rangle \Leftrightarrow x < a$



$x \in \langle -\infty; a] \Leftrightarrow x \leq a$

Observaciones

- Errores frecuentes
  $m \in \langle 10 ; 5\rangle$... incorrecto
  $a \in [-\infty; -2]$... incorrecto
  $x \in \langle 2 ; -7\rangle$ ... incorrecto
  $x \in \langle 6 ; +\infty]$ ... incorrecto
  El extremo izquierdo debe ser menor que el extremo derecho
  $-\infty$ y $+\infty$ sólo son símbolos no son números reales.
- Un concepto que aplicaremos más adelante es el de "unión de intervalos".
  Decir: $x \in \langle -5; -1\rangle \cup \langle 1; 9\rangle$ significa que x puede tomar valores entre -5 y -1 o entre 1 y 9. En este caso se plantean las desigualdades:
  $-5 < x < -1 \vee 1 < x < 9$.
- Decir $x \in \langle -\infty; +\infty\rangle$ equivale a decir $x \in \mathbb{R}$, conjunto de los números reales.

Ejemplos:

$1 \le x \le 6$	..... equivale a	$x \in [1; 6]$
$-1 \le m \le 1$	..... equivale a	$m \in [-1; 1]$
$n > 5$	..... equivale a	$n \in \langle 5; +\infty\rangle$
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$	..... equivale a	$x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
$m \in [4; 6]$	..... equivale a	$4 \le m \le 6$
$x \in \langle -2; 2\rangle$	..... equivale a	$-2 < x < 2$
$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\rangle$	..... equivale a	$-\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{4}$
$\alpha \in \left\langle -\infty; \frac{\pi}{3}\right\rangle$	..... equivale a	$\alpha < \frac{\pi}{3}$

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x denotado por $|x|$ se define por la regla:

$|x| = x \quad$ si $x \ge 0$
$|x| = -x \quad$ si $x < 0$

Ejemplos:

$|12| = 12 \qquad |-5| = -(-5) = 5$

Observación

Cuando tenemos expresiones de la forma $\sqrt{a^2}$ se aplica el siguiente concepto:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

- Otra aplicación que usaremos con frecuencia es la siguiente:

  Ejemplos:

  1. Si $\alpha \in$ IIC, hallar $|\cos\alpha|$; $|\tan\alpha|$

     Resolución:

     Como $\alpha \in$ IIC sabemos entonces que FT(α) son positivas y cuales negativas, por lo tanto:

     $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ ..... (porque $\cos\alpha < 0$)
     $|\csc\alpha| = \csc\alpha$ ..... (porque $\csc\alpha > 0$)
     $|\tan\alpha| = -\tan\alpha$ .....(porque $\tan\alpha < 0$)

  2. Si $\alpha \in$ IIC, simplificar: $a = \sqrt{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2}$ y $b = \sqrt{(\tan\alpha + \cot\alpha)^2}$

     Resolución:

     Como $\alpha \in$ IIC $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\alpha$ es positiva y $\cos\alpha$ es negativa por lo tanto: $(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$ es positiva.

     Luego: $a = \sqrt{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2} = \underbrace{|\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha|}_{(+)}$

     $a = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

     Como $\alpha \in$ IIC $\Rightarrow$ $\tan\alpha$ y $\cot\alpha$ son negativos por lo tanto: $(\tan\alpha + \cot\alpha)$ es negativa.

     Luego: $b = \sqrt{(\tan\alpha + \cot\alpha)^2} = \underbrace{|\tan\alpha + \cot\alpha|}_{(-)}$

     $b = -(\cot\alpha - \cot\alpha)$

- Sea m un número positivo, entonces:
  $|x| < m$...equivale a ... $-m < x < m \vee x \in \langle -m; m\rangle$ y viceversa.
  $|x| \le m$... equivale a ... $-m \le x \le m \vee x \in [-m; m]$ y viceversa.
  $|x| \ge m$... equivale a ... $x \le -m \vee x \ge m \vee x \in \langle -\infty; -m] \cup [m; +\infty\rangle$ y viceversa.

  Ejemplo:

  $|x| > 1$ ... significa que x puede tomar valores mayores de 1 o menores que -1. Las desigualdades que se plantean son: $x > 1 \vee x < -1$.
  $|a| \le 1$ ... significa que a puede tomar valores entre -1 y 1 inclusive puede ser -1 o 1. La desigualdad que se plantea: $-1 \le a \le 1$.

FUNCIONES

Se denomina función a todo conjunto no vacío de pares ordenados, con la propiedad de que no hay dos pares (diferentes) con una misma primera componente.

Al conjunto de todas las primeras componentes se le llama "dominio" de la función y al conjunto de todas las segundas componentes "rango" de la función.

Ejemplos:

1. Dado el conjunto:
   A = {(1; 2), (5; 7), (9; 11), (15; 20)}
   Observamos que la primera componente de cada par ordenado de A es diferente, por lo tanto A es función.
   Dominio de A = {1, 5, 9, 15}
   Rango de A = {2, 7, 11, 20}

2. Sea: $B = \left\{\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)\right\}$

   Observamos que B es una función:

   Dominio de B = $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$

   Rango de B = $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$

3. Sea: C = {(1; 5), (2; 9), (1; 7), (8; 16)}
   Observamos que C no es una función porque hay dos pares ordenados con una misma primera componente.

Frecuentemente las funciones se representan como: $y = f(x)$, esta representación nos indica lo siguiente:

1. Que las variables (x) e (y) están relacionadas mediante alguna fórmula o expresión (también llamada regla de correspondencia).
2. Que la variable (y) depende de la variable (x), es por esta razón que a (x) se le llama variable Independiente y a (y) se le llama variable dependiente.

Sea F una función definida como sigue:

$F = \{(x, y)/y = f(x)\}$... léase: "F es el conjunto de todos los pares ordenados (x; y) tal que (y) es igual a f de (x)".

Al conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente (x) se le llama dominio de la función y al conjunto de todos los valores de la variable dependiente (y) se le llama rango de la Función.

Observación

Cuando no se menciona específicamente el dominio de una función, aceptamos que la variable tome todos los valores reales permitidos (según su regla de correspondencia).

Ejemplos:

1. Cuáles de los siguientes conjuntos son funciones, para aquellas que lo sean indicar su dominio y rango.
   I. $\{(2; 1), (-1; 5), (3; 3), (-2; 5)\}$
   II. $\{(-7; 3), (-2; 3), (3; 3), (5; 3)\}$
   III. $\{(-5; 3), (-5; 1), (3; 1), (5; 2)\}$
   IV. $\left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)\right\}$

   Resolución:
   I. Sí es función.
   dominio $= \{-2; -1; 2; 3\}$; rango $= \{1; 3; 5\}$
   II. Sí es función.
   dominio $= \{-7; -2; 3; 5\}$; rango $= \{3\}$
   III. No es función.
   IV. Sí es función.
   dominio $= \left\{\frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\}$; rango $= \left\{-\frac{1}{3}; 1; \sqrt{3}\right\}$

2. Sea $F = \{(x; y) / y = x^2 + 2, x \in \{1; 2; 3; 4\}$; hallar el rango de la función.

   Resolución:
   Regla de correspondencia: $y = x^2 + 2$
   $x = 1 \Rightarrow y = 3 \quad x = 3 \Rightarrow y = 11$
   $x = 2 \Rightarrow y = 6 \quad x = 4 \Rightarrow y = 18$
   Rango $F = \{3; 6; 11; 18\}$

3. Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones:
   I. $F_1 = \{(x; y) / y = \sqrt{x}\}$
   II. $F_2 = \{(x; y) / y = x^2\}$
   III. $F_3 = \left\{(x;y)/y = \frac{1}{x}\right\}$

   Resolución:
   I. $y = \sqrt{x}$ ... Dominio: $[0; +\infty\rangle$
   Rango: $[0; +\infty\rangle$
   II. $y = x^2$ .... Dominio: R
   Rango: $[0; +\infty\rangle$
   III. $y = \frac{1}{x}$ .... Dominio: $\langle -\infty ; 0\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$
   Rango: $\langle -\infty ; 0\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$

   Para este último ejemplo otra notación para expresar el dominio y rango es:
   $y = \frac{1}{x}$ ..... Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
   Rango: $\mathbb{R} - \{0\}$

Nota

Decir $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ..... significa que x puede tomar cualquier valor real excepto el cero.

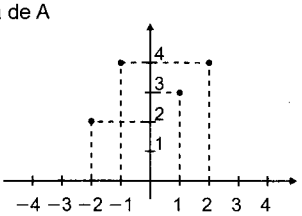
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Es la representación geométrica del conjunto de pares ordenados que define la función. (Recordar que cada par ordenado puede representase como un punto en el plano cartesiano).

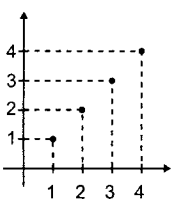
Ejemplo:

1. Graficar las siguientes funciones:
   $A = \{(1; 3), (2; 4), (-1; 4), (-2; 2)\}$ y
   $B = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$

   Resolución:
   Gráfica de A



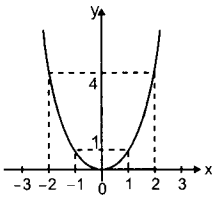
   Gráfica de B



2. Graficar la función definida por: $f(x) = x^2$

   Resolución:
   La gráfica de f es un número infinito de puntos, frecuentemente para graficar este tipo de funciones se elige un número adecuado de puntos y se dibuja luego una curva suave que pase por dichos puntos. (Observar que la curva que representa a la función es de extensión infinita, por esta razón sólo se dibuja una parte de ella).

x	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	4	1	0	1	4	9

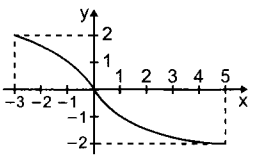


Observaciones

1. Es muy importante conocer la gráfica de una función, porque de esta manera es más fácil conocer su comportamiento o sus caracteristicas.
2. La gráfica de toda función tiene la siguiente propiedad, cuando se traza una recta vertical por cualquier punto de su dominio intersecta a la curva, solamente en un punto.

Ejemplos:

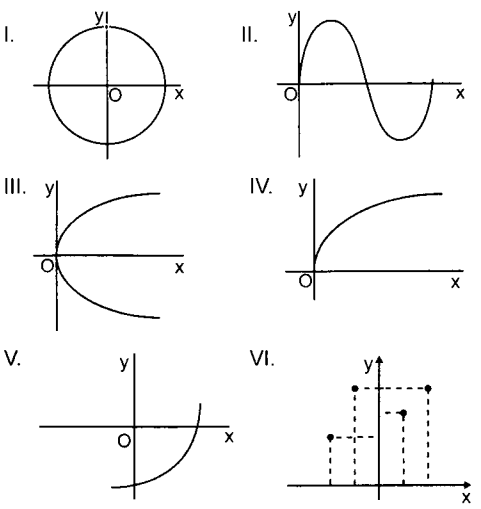
1. La gráfica de una función G se muestra en la figura adjunta. Hallar el dominio y rango de G.



Resolución:

Dominio de G: [−3; 5] Rango de G: [−2; 2]

2. Cuál (es) de las siguientes gráficas representan una función.



Resolución:

Las gráficas I y III no representan una función, ya que si trazamos una recta vertical las intersecta en dos puntos.

Las gráficas II, IV, V y VI sí representan una función.

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

Las funciones se clasifican de acuerdo a ciertas características.

De acuerdo a las operaciones indicadas

Funciones algebraicas; son aquellas formadas por un número finito de operaciones algebraicas.

Ejemplos:

$f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{\sqrt{x}}$; $g(x) = 5x + 3$; $h(x) = x^3 + x^2 + 1$

Funciones trascendentales; aquellas que no son algebraicas. Algunas funciones trascendentes elementales son: las funciones trigonométricas, las funciones logarítmicas.

Ejemplos:

$f(x) = \text{sen}x$; $g(x) = \text{Ln}x$; $h(x) = x + \text{sen}x$

De acuerdo a como están escritas

Explícita; cuando una variable está expresada en términos de la otra.

Ejemplos:

$y = x^2 + 2x + 1$; $y = \tan x$

Implícita; cuando una variable no está expresada en términos de la otra.

Ejemplos:

$xy + 1 = 0$; $x^6 + 2x = y^3 + y$

De acuerdo a su variación

- Se dice que una función es "creciente" en un intervalo, cuando al aumentar el valor de una variable la otra también aumenta o cuando disminuye el valor de una variable la otra también disminuye.

  Ejemplo: $y = \sqrt{x}$

x	0	1	4	9	16	...
y	0	1	2	3	4	...

  Observamos que al aumentar los valores de x también aumentan los valores de y, entonces dicha función es "creciente" (en todo su dominio).

- Se dice que una función es "decreciente" en un intervalo, cuando al aumentar el valor de una variable la otra disminuye o cuando al disminuir el valor de una variable la otra aumenta.

  Ejemplo: $y = \dfrac{1}{x}$

x	1	2	4	8	10	...
y	1	0,5	0,25	0,125	0,1	...

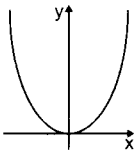
  Observamos que al aumentar los valores de x, los valores de y disminuyen, entonces dicha función es "decreciente".

De acuerdo a su continuidad

- El concepto de continuidad de una función requiere de conocimientos un poco más avanzados de la matemática, pero en forma intuitiva se puede decir que:

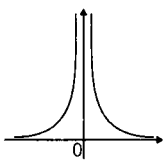
Una función es "continua" en un intervalo, cuando al graficarla, su curva se realiza mediante un trazo ininterrumpido.

Ejemplo:



En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $y = x^2$. Observamos que la curva no tiene interrupciones, entonces se dice que dicha función es continua.

- Una función es "discontinua", cuando al trazar su gráfica, ésta presenta saltos o interrupciones.



En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $y = 1/x^2$. Observa que la curva en $x = 0$ está interrumpida, es decir presenta un salto. Entonces se dice que la función es "discontinua" en $x = 0$.

Observaciones

Dada una función $y = f(x)$ tal que no está definida para algún o algunos valores de x, por ejemplo x_1; x_2 y x_3. Entonces se dice que dicha función es discontinua y que x_1 ; x_2 y x_3 son puntos de Discontinuidad.

Ejemplo: $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

Observamos que esta función no esta definida para $x = 1$ y $x = 2$.

Entonces dicha función es discontinua y $x = 1$, $x = 2$ son puntos de discontinuidad.

Observaciones

Las gráficas de algunas funciones discontinuas, presentan asíntotas.

Las asíntotas son rectas a las cuales la curva (gráfica de la función) se aproxima pero sin llegar a intersectar.

Las asíntotas se clasifican en:

Asíntotas horizontales; si es paralelo coincide con eje x.

Asíntotas verticales; si es paralelo coincide con eje x.

Asíntotas oblicuas; si no es paralela a ninguno de los ejes.

Nota:

1. Una curva puede tener más de una asíntota vertical, horizontal u oblicua.
2. En forma práctica para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales, si las hubiese, se despeja (y) en términos de (x) e igualamos el denominador a cero.
3. Para obtener las Asíntotas Horizontales si las hubiese se despeja (x) en términos de (y) e igualamos el denominador a cero.

Ejemplos:

1. Determinar cuántas asíntotas verticales tiene la función: $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

   Resolución:

   Asíntotas verticales: igualamos el denominador a cero: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

   Por lo tanto, hay dos asíntotas verticales.

2. Determinar las asíntotas de $y = \dfrac{1}{x - 4}$

   Resolución:

   Asíntotas verticales: $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ...(1)

   Asíntotas horizontales:

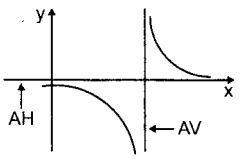
   Despejar x en términos de y $\Rightarrow x = \dfrac{1 + 4y}{y}$

   Igualamos el denominador a cero $y = 0$ ...(2)

   Por lo tanto, hay dos asíntotas.

   AV ... $x = 4$

   AH ... $y = 0$



FUNCIONES ESPECIALES

Función biyectiva

Se dice que una función es biyectiva si a cada elemento del rango de una función le corresponde un sólo valor de dominio.

Ejemplos:

1. $y = x^2$ ..... no es biyectiva

   Porque si $y = 4$ hay dos valores para $x \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

2. $y = \sqrt{x}$ ..... si es biyectiva

   Porque si $y = 2 \Rightarrow x = 4$ (no hay otro valor)

Función par e impar

Dada una función: $y = f(x)$ / $x \in$ Domf y $-x \in$ Domf

Se dice que una función es par si se cumple: $f(-x) = f(x)$

Se dice que una función es impar si se cumple: $f(-x) = -f(x)$

Ejemplos:

1. $f(x) = x^4 - x^2 + 3$; es una función par porque $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 3 = x^4 - x^2 + 3 = f(x)$
2. $g(x) = x^3 + x$; es una función impar porque $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x)$ $\Rightarrow g(-x) = -g(x)$

Función periódica

Dada una función f con dominio D, se dice que dicha función es periódica si existe algún número positivo T tal que: $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in D$ y $(x + T) \in D$

Al menor número T se le llama período mínimo o comúnmente período de la función.

Todo múltiplo entero de T también es un período de la función.

Propiedad:

Sean f(x) y g(x) dos funciones cuyo período es T, entonces la función $h(x) = af(x) + bg(x)$, (a y b constantes) tiene período T.

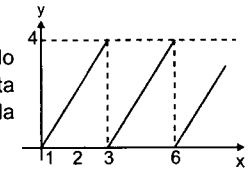
Observaciones

Cuando se grafica una función periódica, frecuentemente sólo se dibuja la curva en $[0; T\rangle$

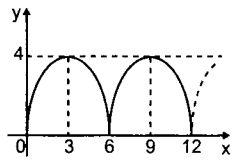
Ejemplos:

1. Graficar la función $f(x) = x + 1$, sabiendo que su período mínimo es 3.

   Resolución:
   Su gráfica se hace dando valores a x desde 0 hasta 3 (luego de este valor la gráfica se repite).



2. En la figura se muestra la gráfica de una función periódica, determinar el período de la función.



   Resolución:
   Observamos que la gráfica a partir de $x = 6$ se repite, entonces su período es igual a 6.

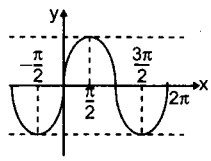
ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Para realizar el análisis de las funciones trigonométricas se considerarán los siguientes aspectos:

a) Gráfica b) Dominio
c) Rango d) Período (mínimo)
e) Continuidad f) Valores máximos y mínimos
g) Paridad o imparidad h) Crecimiento de la función.

Función seno: $\{(x; y) / y = \text{sen}x\}$

a) Gráfica



b) Dominio: $\mathbb{R} \vee \langle -\infty ; +\infty \rangle$
c) Rango: $[-1 ; 1]$
d) Período: 2π
e) Es continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$
f) Máximo valor: $1\left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$

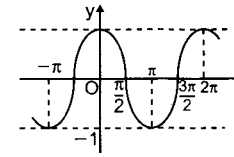
   Mínimo valor: $-1\left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$
g) La función es impar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$
h) La función no es monótona. (En todo su dominio).

   Crece en cada intervalo: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$

   Decrece en cada intervalo: $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$

Función coseno: $\{(x; y) / y = \cos x\}$

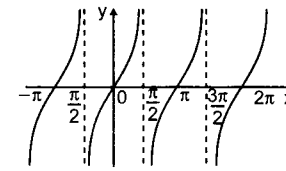
a) Gráfica



b) Dominio: $\mathbb{R}$
c) Rango: $[-1; 1]$
d) Período: 2π
e) Es continua: $\forall\ x \in \mathbb{R}$
f) Máximo valor: 1 ... para $x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
   Mínimo valor: -1 ... para $x = (2k + 1)\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
g) Es una función par: $\cos(-x) = \cos(x)$
h) La función no es monótona en todo su dominio:
   Es creciente en cada intervalo:
   $[-\pi + 2k\pi ; 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Es decreciente en cada intervalo:
   $[2k\pi ; 2k\pi + \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Función Tangente: $\{(x, y) / y = \tan x\}$

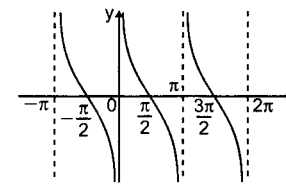
a) Gráfica



b) Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$
c) Rango: $\mathbb{R} \vee \langle -\infty; +\infty \rangle$
d) Período: π
e) La función es discontinua:
   $\forall\ x = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\} k \in \mathbb{Z}$ (Asíntotas verticales)
f) No tiene valor máximo ni mínimo.
g) La función es impar: $\tan(-x) = -\tan x$
h) La función no es monótona en todo su dominio.
   Es creciente en cada intervalor.
   $\left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$; $k \in \mathbb{Z}$

Función cotangente: $\{(x; y) / y = \cot x\}$

a) Gráfica

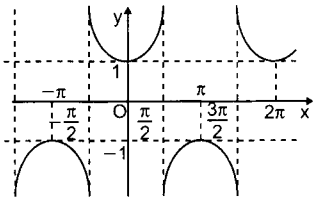


b) Dominio: $\mathbb{R} - \{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$
c) Rango: $\mathbb{R}$
d) Período: π
e) La función es discontinua $\forall\ x = \{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$

f) No tiene valor máximo ni mínimo.
g) La función es impar: $\cot(-x) = -\cot x$
h) La función no es monótona en todo su dominio.
Es decreciente en cada intervalo $\langle k\pi\ ;\ k\pi + \pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Función secante: {(x; y) / y = secx}

a) Gráfica



b) Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} k \in \mathbb{Z}$

c) Rango: $\mathbb{R} - \langle 1; 1\rangle \vee \langle -\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty\rangle$

d) Período: 2π

e) La función es discontinua:
$\forall x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

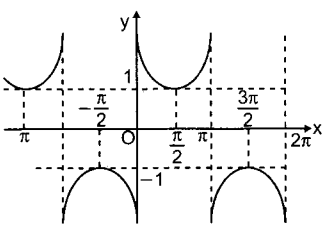
f) No tiene valor máximo ni mínimo.

g) La función es par: $\sec(-x) = \sec(x)$

h) La función no es monótona en todo su dominio.
Es creciente en cada intervalo:
$\left[2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\rangle \vee \left\langle 2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \pi\right], k \in \mathbb{Z}$
Es decreciente en cada intervalo:
$\left[2k\pi + \pi; 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right\rangle \vee \left\langle 2k\pi + \frac{3\pi}{2}; 2k\pi + 2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

Función cosecante: {(x; y) / y = cscx}

a) Gráfica



b) Dominio: $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Rango: $\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

d) Período: 2π

e) La función es discontinua: $\forall\ x = \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

f) No tiene valor máximo y mínimo

g) La función es impar: $\csc(-x) = -\csc x$

h) La función no es monótona en todo su dominio.
Es creciente en cada intervalo
$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2k\pi + \pi\right\rangle \vee \left\langle 2k\pi + \pi; 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$
Es decreciente en cada intervalo
$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi\right\rangle \vee \left\langle 2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$

Observaciones

1. Como ya conocemos el rango de las funciones trigonométricas podemos afirmar que:
$-1 \leq \operatorname{sen}x \leq 1$ $\quad -\infty < \tan x < +\infty$
$\sec x \leq -1 \vee \sec x \geq 1$ $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$
$-\infty < \cot x < +\infty$ $\quad \csc x \leq -1 \vee \csc x \geq 1$
2. La periodicidad de las funciones trigonométricas tiene como consecuencia que se pueda conocer el comportamiento y propiedades de dichas funciones en todos los puntos de su dominio con sólo analizarlas en un intervalo de longitud T.
3. Las funciones trigonométricas no son biyectivas (en general toda función periódica no es biyectiva).
4. Las funciones secante y cosecante son no acotados es decir no tiene máximo y mínimo valor.
Pero analizándolas en determinados intervalos presentan un máximo o mínimo valor, por esta razón se dice que un máximo relativo de estas funciones es −1 y un mínimo relativo es 1.
5. A los gráficos (curvas) de las funciones seno y coseno se les llama: ondas sinusoidales, o senoidales.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMPUESTAS

Teniendo como base el análisis realizado en el acápite anterior de las funciones trigonométricas básicas, se puede analizar otro tipo de funciones por ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen}2x$; $g(x) = 3\operatorname{sen}x$; $h(x) = 5 + \operatorname{sen}4x$ y así sucesivamente, a las que se denomina funciones trigonométricas compuestas.
No es el propósito de este libro dar una definición estricta de lo que es función compuesta, la cual se puede encontrar en los libros de Álgebra, la intención es indicarle al estudiante como se analizan las funciones trigonométricas compuestas, para esto se dividirá el análisis en 4 partes:

1° Multiplicación de la función por una constante.
2° Multiplicación del argumento por una constante.
3° Suma de una constante al valor de la función.
4° Suma de una constante al argumento.

MULTIPLICACIÓN DE LA FUNCIÓN POR UNA CONSTANTE

Función básica: $y = f(x)$

Función compuesta: $y = kf(x)$

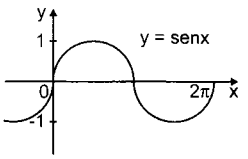
- En este caso ambas funciones tienen el mismo dominio.
- Considerando lógicamente que k ! 0, el rango de la función compuesta será igual a k veces el rango de la función básica.

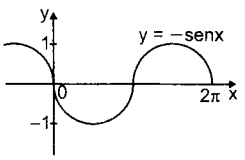
Ejemplos:

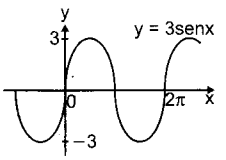
$\operatorname{sen}x$ ... $[-1; 1]$ $\quad \frac{1}{2}\operatorname{sen}x$ ... $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$
$3\operatorname{sen}x$ ... $[-3; 3]$ $\quad -2\cos x$ ... $[-2; 2]$
$5\cos x$ ... $[-5; 5]$ $\quad 3\cos x$ ... $[-3; 3]$

Gráficamente la curva se estira, se acorta o se invierte de acuerdo al valor de k.

Ejemplos:







Para el caso de y = ktanx; $k \neq 0$ el rango no varía sigue siendo: $\langle -\infty; +\infty \rangle$ pero la forma de la curva varía (se estira; se acorta o se invierte) de acuerdo al valor de k. Lo mismo ocurre con las funciones y = kcotx; $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplos:

Determinar el rango en cada caso:

a) cscx $\quad \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

b) 2cscx $\quad \mathbb{R} - \langle -2; 2 \rangle$

c) $\frac{1}{3}$secx $\quad \mathbb{R} - \left\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\rangle$

d) −2secx $\quad \mathbb{R} - \langle -2; 2 \rangle$

MULTIPLICACIÓN DEL ARGUMENTO POR UNA CONSTANTE

Función básica: y = f(x)

Función compuesta: y = f(Bx)

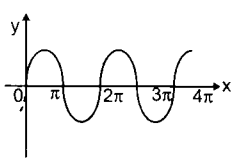
- En este caso el rango de las funciones básica y compuesta es el mismo.
- Para el caso de las funciones Seno y Coseno su dominio no varía pero sí varía el período mínimo.

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{sen}Bx \\ y = \cos Bx \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{B} \quad (B > 0)$$

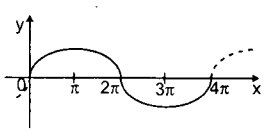
Gráficamente la curva se comprime o se alarga de acuerdo al valor de $B (B \neq 0)$.

Aplicaciones:

1.



y = senx
T = 2π



$y = \text{sen}\frac{x}{2}$
T = 4π

Para el caso de las funciones tangente, cotangente, Secante y cosecante varía el dominio y el período.

	Dominio	Periodo
y = tanBx	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2B}\right\}; n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{B}, B \in \mathbb{R}^+$
y = cotBx	$\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{B}\right\}; n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{B}, B \in \mathbb{R}^+$
y = secBx	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2B}\right\}; n \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{B}, B \in \mathbb{R}^+$
y = cscBx	$\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{B}\right\}; n \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{B}, B \in \mathbb{R}^+$

2.

- $y = \tan 3x \begin{cases} \text{dominio}: \mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{6}\right\}, n \in \mathbb{Z} \\ \text{periodo}: \frac{\pi}{3} \end{cases}$

- $y = \csc 4x \begin{cases} \text{dominio}: \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{4}\right\}, n \in \mathbb{Z} \\ \text{periodo}: \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- y = cot(−5x)

  En este caso como la cotangente es función impar:

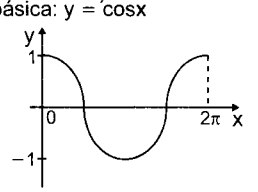
  $y = -\cot 5x \begin{cases} \text{dominio}: \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{5}\right\}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{periodo}: \frac{\pi}{5} \end{cases}$

3. Trazar la gráfica de un período de la función:

   y = 2cos5x

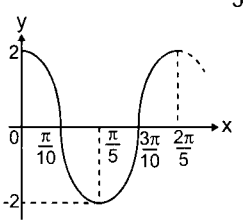
   Resolución:

   Función básica: y = cosx



Para la función: y = 2cos5x

Su amplitud es 2 y su período es: $\frac{2\pi}{5}$

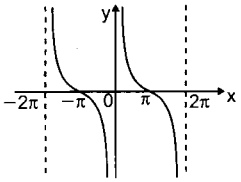


4. Trazar la gráfica de la función: $y = 3\cot\frac{x}{2}$ en $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$

   Resolución:

   En esta función: $y = 3\cot\frac{x}{2}$

   Varía el período: $T = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\pi$



SUMA DE UNA CONSTANTE AL VALOR DE LA FUNCIÓN

Función Básica: $y = f(x)$

Función Compuesta: $y = D + f(x)$

Cuando se le suma una constante a una función su gráfica se desplaza verticalmente, hacia arriba o hacia abajo dependiendo si el valor que se le suma es positivo o negativo. Para el caso de las funciones seno, coseno, secante y cosecante el rango varía.

$y = D + \operatorname{sen}x \Rightarrow$ Su rango es: $[-1 + D; 1 + D]$

$y = D + \cos x \Rightarrow$ Al número D se le llama valor promedio.

$y = D + \sec x$

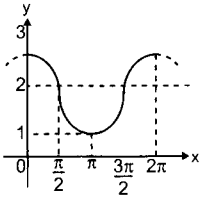
$y = D + \csc x$

Si $D > 0$ la curva se desplaza hacia arriba.

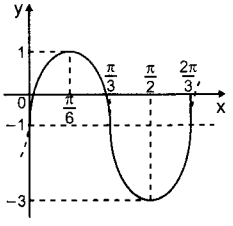
Si $D < 0$ la curva se desplaza hacia abajo.

Ejemplos:

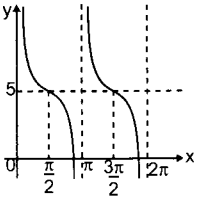
- $y = 2 + \cos x$
  Valor promedio = 2
  Rango: [1; 3]
  Período: 2π



- $y = -1 + 2\operatorname{sen}3x$
  * Valor promedio: -1
  (La curva se desplaza hacia abajo)
  * Período: $2\pi/3$
  * Rango: $[-3; 1]$



- $y = 5 + \cot x$
  Período: π
  La gráfica se traslada 5 unidades hacia arriba.



SUMA DE UNA CONSTANTE AL ARGUMENTO

Función básica: $y = f(x)$

Función compuesta: $y = f(x - C)$

Cuando se le suma una constante al argumento de la función su gráfica se desplaza horizontalmente hacia la derecha o a la izquierda dependiendo si el valor que se le suma es negativo o positivo.

Dadas las funciones:

$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{sen}(x - C) \\ y = \cos(x - C) \end{array}\right\}$ Al número C se le llama corrimiento de fase o simplemente desfase de la función

Para el caso de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante:

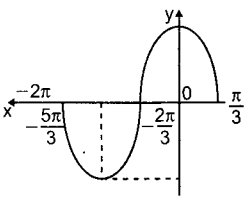
$\left.\begin{array}{l} y = \tan(x - C) \\ y = \cot(x - C) \\ y = \sec(x - C) \\ y = \csc(x - C) \end{array}\right\}$ El número de C es el desfase de la función, además este valor afecta al dominio

Si $C < 0$ ..... El desplazamiento es hacia la izquierda.

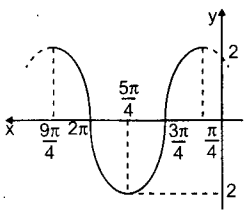
Si $C > 0$ ..... El desplazamiento es hacia la derecha.

Ejemplo:

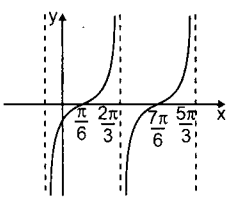
- $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
  $x + \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$
  El desplazamiento es hacia la izquierda.
  Período: 2π



- $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
  $x - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
  Desplazamiento es hacia la derecha.
  Período: 2π
  Amplitud: 2



- En el siguiente caso $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
  Hay un desplazamiento (desfase) hacia la derecha. $x - \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.
  Además el dominio de esta función (tomando como referencia la función básica) será:
  Función básica:
  $y = \tan x$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
  Las asíntotas ahora se trazan
  $\forall\, x = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$
  Es decir:
  $x = \left\{\ldots, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \ldots\right\}$



Observaciones

1. Cuando se suma, resta, multiplica o divide por una constante a las funciones trigonométricas básicas ocurre lo siguiente:
   a) El dominio no varía en ningún caso.
   b) El período no varía en ningún caso.
   c) El rango varía sólo para las funciones: Seno, coseno, secante y cosecante.

   Ejemplos:

Función	Dominio	Rango	T
$y = \text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	2π
$y = 3\text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-3\,;3]$	2π
$y = 1 + \text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[0\,;2]$	2π
$y = 2 + 3\text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-1;5]$	2π
$y = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = 7\tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = 1 + 2\tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = \csc x$	[illegible]	$\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$	2π
$y = 7\csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle -7; 7\rangle$	2π
$y = 13 + \csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle -12; 14\rangle$	2π
$y = 13 + 5\csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle 8; 18\rangle$	2π

2. Cuando se suma, resta, multiplica o divide al argumento de las funciones trigonométricas básicas ocurre lo siguiente:
   a) El rango no varía en ningún caso.
   b) El dominio no varía para el seno y coseno.
   c) El período varía (cuando se multiplica o divide al argumento).

   Ejemplos:

Función	Dominio	Rango	T
$y = \text{sen}\,x$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	2π
$y = \text{sen}\,7x$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	$\frac{2\pi}{7}$
$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	2π
$y = \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{7}\right)$	$\mathbb{R}$	$[-1\,;1]$	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = \tan 2x$	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{7}\right)$	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = \tan\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{15}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{5}$
$y = \csc 9x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{9}\right\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$	$\frac{2\pi}{9}$
$y = \csc\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{9} + \frac{\pi}{36}\right\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$	$\frac{2\pi}{9}$

3. Cuando se analizó el período de las funciones trigonométricas básicas y compuestas se ha considerado en todos casos el periodo mínimo. Pero no se debe olvidar que todos los múltiplos de este valor también son períodos de la función. Por ejemplo: La función y = senx su período mínimo es 2π pero también son períodos de la función: 4π, 6π, 8π, ...

Lo mismo ocurre por ejemplo para la función
y = sen3x

Período mínimo: $\frac{2\pi}{3}$

Para obtener los otros valores del período se multiplica por una constante:

$\frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ dando valores a k se obtiene: $\left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi, \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; 4\pi; ...\right\}$. Todos estos números son periodos de la función y = sen3x

FunciÓn	Periodo mínimo	Otros periodos
y = sen5x	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, 2\pi, \frac{12\pi}{5}, ...$
y = tan3x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, ...$
$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$	π	2π, 3π, 4π, 5π, ...
$y = 3\cot\frac{x}{4}$	4π	8π, 12π, 16π, 20π, ...
$y = \operatorname{sen}\pi x$	2	4, 6, 8, 10 , ...

4. Cuando a las funciones trigonométricas básicas o compuestas se les eleva a una potencia ocurren dos posibilidades:
   a) Si el exponente es par (positivo) varía el rango y el período.
   b) Si el exponente es impar (positivo) no hay ninguna variación en el dominio, rango y período.

En ambos casos la gráfica de la curva (comparada con la inicial) se modifica.

Funciones trigonométricas básicas elevadas a una potencia par (positivo) o impar:

k: par (positivo)

Función	Rango	Periodo
$y = \operatorname{sen}^k x$	[0; 1]	π
$y = \cos^k x$	[0; 1]	π
$y = \tan^k x$	$[0; +\infty\rangle$	π
$y = \cot^k x$	$[0; +\infty\rangle$	π
$y = \sec^k x$	$[1; +\infty\rangle$	π
$y = \csc^k x$	$[1; +\infty\rangle$	π

k: impar (positivo)

Función	Rango	Periodo
	[−1; 1]	2π
	[−1; 1]	2π
	$\langle -\infty; +\infty\rangle$	π
	$\langle -\infty; +\infty\rangle$	π
	$\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$	2π
	$\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$	2π

Para el caso de las funciones trigonométricas compuestas, sólo se puede indicar lo siguiente:
Sea:

$$\boxed{g(x) = A\,FT^n(Bx + C) + D}$$

FT: Función Trigonométrica
$A, B, C, D \in \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$

a) Si la función trigonométrica es seno, coseno, secante o cosecante:

   Para n: par el período es igual a: $\left(\frac{x}{2}\right.$

   Para n: impar el período es igual a: $\frac{2\pi}{|B|}$

b) Si la función trigonométrica es tangente o cotangente:

   Para n: par o impar el período es igual a: $\left(\frac{x}{2}\right.$

Ejemplos:

Función	Periodo
$y = \operatorname{sen}^2 2x$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \cos^2 5x$	$\frac{2\pi}{5}$
$y = 4\cos^7 3x$	$\frac{2\pi}{3}$
$y = 12\tan^4 x$	π
$y = 5 + 3\operatorname{sen}^2\left(7x + \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{7}$
$y = 9 - \cot^5\left(\frac{x}{2}\right)$	2π

5. También se estudió una propiedad que dice que el período de h(x) = af(x) + bg(x) es igual T si y sólo si los períodos de f y g son también iguales a T.

Por ejemplo: f(x) = 3sen2x y g(x) = 5cos2x

Observamos que el período de f(x) y g(x) es π.

Entonces la función:

h(x) = 3sen2x + 5cos2x tiene período igual a π.

Ejemplo:

• Si f(x) = 6senx y g(x) = 7cos2x

Cuál es el período de:

h(x) = 6senx − 7cos2x

Resolución:

Sabemos que el período mínimo de:
$f(x) = 6\text{sen}x$ es 2π y de $g(x) = 7\cos 2x$ es π, podemos observar que no coinciden, entonces buscamos otro período de $g(x)$ hasta que coincida con el de $f(x)$.
Los períodos de $g(x) = 7\cos 2x$ son: $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$.
$h(x) = 6\text{sen}x - 7\cos 2x$ ... su período es: 2π

6. Cuando se tiene una suma de funciones trigonométricas el período se calcula tomando el mínimo común múltiplo de los períodos que intervienen.

Sea: $F(x) = \underbrace{H_1(x)}_{T_1} + \underbrace{H_2(x)}_{T_2} + \underbrace{H_3(x)}_{T_3} + \ldots + \underbrace{H_n(x)}_{T_n}$

Período de $F(x) = T_{F(x)} = \text{MCM}(T_1; T_2; T_3; \ldots; T_n)$

Debido a que generalmente los períodos se expresan como una fracción, entonces el MCM se calcula así:

$\text{MCM}(T_1; T_2; \ldots T_n) =$

$$x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \right\rangle; n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- Si $F(x) = \cos 5x - \text{sen}3x - \cos\frac{4x}{3}$.
  Hallar el período de $F(x)$.

  Resolución:

  $F(x) = \underbrace{\cos 5x}_{T_1} - \underbrace{\text{sen}3x}_{T_2} - \underbrace{\cos\frac{4x}{3}}_{T_3}$

  Se deduce que:

  $T_1 = \frac{2\pi}{5}; T_2 = \frac{2\pi}{3}$ y $T_3 = \frac{2\pi}{4/3} = \frac{3\pi}{2}$

  $\text{MCM}(T_1; T_2; \ldots T_n) =$

  $$\frac{\text{MCM}(2\pi; 2\pi; 3\pi)}{\text{MCD}(5;3;2)} = \frac{6\pi}{1} \Rightarrow T_{F(x)} = 6\pi$$

- Hallar el período de:

  $G(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 48x\right) + \cos\left(\frac{24x - \pi}{5}\right) + \text{sen}\left(\frac{12x}{7}\right)$

  Resolución:

  Dato:

  $G(x) = \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 48x\right)}_{T_1} + \underbrace{\cos\left(\frac{24x - \pi}{5}\right)}_{T_2} + \underbrace{\text{sen}\left(\frac{12x}{7}\right)}_{T_3}$

  Se deduce que:

  $T_1 = \frac{2\pi}{48} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{24}; T_2 = \frac{2\pi}{24/5} \Rightarrow T_2 = \frac{5\pi}{12}$

  $T_3 = \frac{2\pi}{\frac{12}{7}} = \frac{7\pi}{6}$

  $\text{MCM}(T_1; T_2; T_3) = \frac{\text{MCM}(\pi; 5\pi; 7\pi)}{\text{MCM}(48;24;6)} = \frac{35\pi}{6}$

  $T_{G(x)} = \frac{35\pi}{6}$

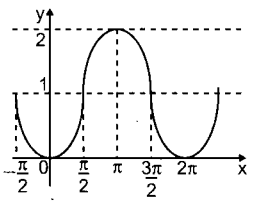
7. De la observación número 4 se puede deducir un caso que se usa con mucha frecuencia.

$0 \le \text{sen}^2 x \le 1$ $\quad \tan^2 x \ge 0$ $\quad \sec^2 x \ge 1$
$0 \le \cos^2 x \le 1$ $\quad \cot^2 x \ge 0$ $\quad \csc^2 x \ge 1$

FUNCIONES AUXILIARES

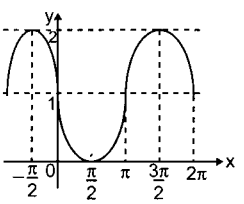
Función verso

$\{(x; y) / y = 1 - \cos x\} = \{(x; y) / y = \text{vers}x\}$
Dominio: $\mathbb{R} \vee \langle -\infty; +\infty \rangle$
Rango: $[0; 2]$
Período: 2π
Es una función para: $\text{vers}(-x) = \text{vers}x$
Valor máximo: 2
Valor mínimo: 0



Función coverso

$\{(x; y) / y = 1 - \text{sen}x\} = \{(x; y) / y = \text{cov}x\}$
Dominio: $\mathbb{R} \vee \langle -\infty; +\infty \rangle$
Rango: $[0; 2]$
Período: 2π
Valor máximo: 2
Valor mínimo: 0

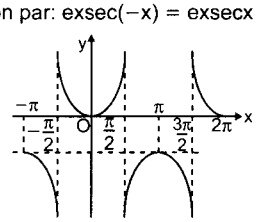


Función exsecante

$\{(x; y) / y = \sec x - 1\} = \{(x; y) / y = \text{exsec}x\}$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

Rango: $\mathbb{R} - \langle -2; 0 \rangle \vee \langle -\infty; -2] \cup [0; +\infty \rangle$
Período: 2π
Es una función par: $\text{exsec}(-x) = \text{exsec}x$

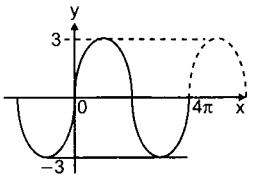


Cuadro de variación de las funciones verso, coverso y exsecante

X / FT	0	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	π	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	2π
verx	0	↗	1	↗	2	↘	1	↘	0
covx	1	↘	0	↗	1	↗	2	↘	1
exsecx	0	↗	∄	↗	−2	↘	∄	↘	0

Aplicaciones:

1. Si f(x) = asenbx es una función cuya gráfica se muestra en la figura adjunta, determinar: a + b



Resolución:

Por definición: y = asenbx

$\Rightarrow$ máximo valor es: $|a| \wedge$ período: $\frac{2\pi}{|b|}$

De la gráfica observamos que:
máximo valor es: $3 \wedge$ período: 4π

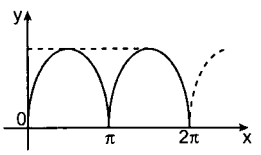
entonces: $a = 3$ y $\frac{2\pi}{b} = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$a + b = 3 + \frac{1}{2} = 3{,}5$

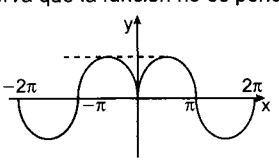
2. Determinar el período de:
a) y = |senx| b) y = sen|x|

Resolución:

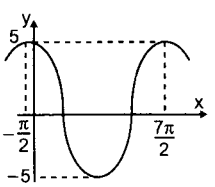
a) Esbozando la gráfica de y = |senx|
se observa que a partir de $x = \pi$ la gráfica se repite, luego el período de la función es: π



b) Al esbozar la gráfica de y = sen |x|
se observa que la función no es periódica.



3. La gráfica adjunta tiene por ecuación y = acos(kx + ϕ) hallar a, k y ϕ



Resolución:

Observamos que el máximo valor de y es 5 $\Rightarrow$ a = 5

y el período de la función es: $\frac{7\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi$.

Sabemos que: $T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{2\pi}{k} = 4\pi \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

además se observa que si $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 5$, reemplazamos en la ecuación para hallar el valor de ϕ.

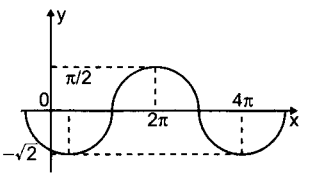
$y = a\cos(kx + \phi) \Rightarrow y = 5\cos\left(\frac{x}{2} + \phi\right)$

$5 = 5\cos\left(\frac{x}{2} + \phi\right)$

Simplificando: $1 = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \phi\right) \Rightarrow \phi - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

Por lo tanto, la ecuación de la gráfica es:
$y = 5\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

4. Hallar la ecuación de la gráfica adjunta



Resolución:

La ecuación de la gráfica es de la forma:
y = acosbx

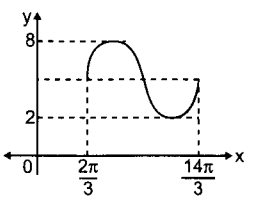
Observamos que $T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{b} = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

además: para $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2}$, reemplazando:

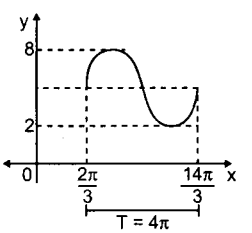
$-\sqrt{2} = a\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} = a\cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow -\sqrt{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = -2 \quad \therefore\ y = -2\cos\frac{x}{2}$

5. Determinar la ecuación de la gráfica adjunta.



Resolución:



Si la ecuación de la figura adjunta es de la forma:
y = AsenB(x − C) + D

se deduce: $A = \frac{8-2}{2} = 3$

El valor medio: $D = \frac{8+2}{2} = 5$

El periodo: $T = \frac{2\pi}{B} = 4\pi \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

luego: $y = 3\text{sen}\frac{1}{2}(x - C) + 5$ ...(I)

Para calcular el valor de C, observa de la gráfica que cuando $x = \frac{2\pi}{3}$; y = 5, reemplaza en la ecuación (I)

$5 = 3\text{sen}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - c\right) + 5 \Rightarrow \text{sen}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) = 0$

$\frac{2\pi}{3} - C = 0 \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3}$

Finalmente la ecuación es:

$y = 3\text{sen}\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 5 = y = 3\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 5$

6. Graficar la siguiente función:
$f(x) = 2\text{sen}x + |\text{sen}x|;\ x \in [-2\pi; 4\pi]$

Resolución:

Dato: $f(x) = 2\text{sen}x + |\text{sen}x|$

Dado que aparece valor absoluto, se debe analizar en intervalo donde el senx sea solo positivo o negativo.

El senx es positivo (inclusive cero) en:

$[-2\pi; -\pi]$; $[0; \pi]$; $[2\pi ; 3\pi] \Rightarrow |\text{sen}x| = \text{sen}x$

Entonces:

$f(x) = 2\text{sen}x + \text{sen}x = 3\text{sen}x$ ...(I)

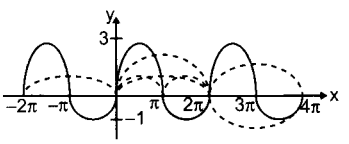
El senx es negativo en:

$\langle -\pi; 0\rangle$; $\langle \pi ; 2\pi\rangle \Rightarrow |\text{sen}x| = -\text{sen}x$

Entonces:

$f(x) = 2\text{sen}x - \text{sen}x = \text{sen}x$ ...(II)

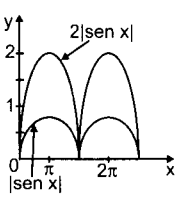
De (I) y (II) se obtiene la siguiente gráfica.

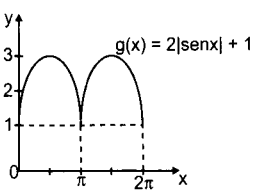


7. Graficar las siguientes funciones en $[0; 2\pi]$
- $g(x) = 2|\text{sen}x| + 1$
- $h(x) = |2\text{sen}x + 1|$

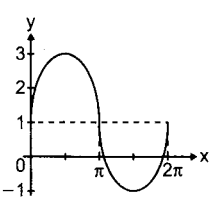
Resolución:

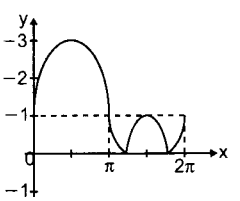
- Recuerda la gráfica de $|\text{sen}x|$ y deduce que sucede cuando se multiplica por 2 y finalmente cuando se le suma 1.





- Para hacer este gráfico, primero lo dibujamos sin valor absoluto y luego se le toma el valor absoluto. (Observa que la parte negativa se invierte).





8. Indicar el dominio de cada una de las funciones siguientes:
- $y = \text{sen}3x$
- $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- $y = \tan 2x$
- $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Resolución:

- $y = \text{sen}3x \Rightarrow$ Dominio: $\mathbb{R}$
- $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$ Dominio: $\mathbb{R}$
- $y = \tan 2x$:

  Sabemos que para $2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

  La tangente no está definida;

  de donde: $x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

  $\therefore$ Dominio: $R - \left\{(2n + 1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$:

  Sabemos que la función Cotangente no está definida.

  Cuando $x + \frac{\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

  $\therefore$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(3k - 1)\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Sabemos que la función: $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ no está definida.

  Para: $x - \frac{\pi}{4} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

  $\Rightarrow x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = (4n + 3)\frac{\pi}{4}$

  $\therefore$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(4n + 3)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

9. Determinar el rango de cada una de las siguientes funciones:
- $y = \text{sen}4x$
- $y = \text{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- $y = 5\cos 3x$
- $y = 3\tan x$
- $y = 2\sec x$
- $y = 3\csc^2 x$

Resolución:

A) $y = \text{sen}4x \Rightarrow$ Rango: $[-1 ; 1]$

B) $y = \text{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$ Rango: $[0; 1]$

C) $y = 5\cos 3x$: $-1 \le \cos 3x \le 1$

$\Rightarrow -5 \le 5\cos 3x \le 5 \Rightarrow -5 \le y \le 5$

Rango: $[-5 ; 5]$

D) $y = 3\tan x \Rightarrow$ Rango: $\mathbb{R}$

E) $y = 2\sec x$

$\left.\begin{array}{l}\text{sen}x \ge 1 \to 2\sec x \ge 2 \\ \text{sen}x \le -1 \to 2\sec x \le -2\end{array}\right\}$ Rango: $\langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

F) $y = 3\csc^2 x \Rightarrow \csc^2 x \ge 1 \Rightarrow 3\csc^2 x \ge 3$

$\Rightarrow y \ge 3 \quad \therefore$ Rango: $[3; +\infty\rangle$

10. Determinar el dominio, rango y período de las funciones:
- $y = 2 + 3\,\text{sen}^2 7x$
- $y = 1 + 6\sec^2\frac{x}{5}$

Resolución:

- $y = 2 + 3\text{sen}^2 7x \Rightarrow$ Dominio: $\mathbb{R}$

  Rango: $0 \le \text{sen}^2 7x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\text{sen}^2 7x \le 3$

  $\Rightarrow 2 \le 2 + 3\text{sen}^2 7x \le 5 \Rightarrow$ Rango: $[2; 5]$

  Período: $T = \frac{\pi}{7}$

- $y = 1 + 6\sec^2\frac{x}{5}$

  Dominio: $\frac{x}{5} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 5(2n+1)\frac{\pi}{2}$

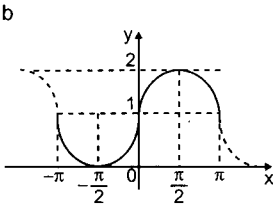
  $\Rightarrow$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{5(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

  Rango: $\sec^2\frac{x}{5} \geq 1 \Rightarrow 6\sec^2\frac{x}{5} \geq 6$

  $\Rightarrow 1 + 6\sec^2\frac{x}{5} \geq 7 \Rightarrow$ Rango: $[7; +\infty\rangle$

  Período: $T = \frac{\pi}{\frac{1}{5}} = 5\pi$

11. La ecuación de la gráfica adjunta es: $y = a + \text{sen}bx$
    Hallar: a y b



Resolución:

Observamos de la gráfica que:

$x = 0 \Rightarrow y = 1$ $x = \pi \Rightarrow y = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 2x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$

Entonces: $y = a + \text{sen}bx$

$x = 0 \Rightarrow a + \text{sen}0 = 1 \Rightarrow a = 1$

Se observa además que el periodo es:

$T = \pi - (-\pi)$, entonces: $\frac{2\pi}{b} = 2\pi \Rightarrow b = 1$

Por lo tanto la ecuación de la gráfica es: $y = 1 + \text{sen}x$

12. El punto $A(a; k^2 - k + 1)$ pertenece a la tangentoide y $B(b; k^2 + k - 1)$ pertenece a la cotangentoide. Si además a y b son complementarios; calcular el menor valor positivo de x, sabiendo que el punto $P(x, k + 1)$ pertenece a la cosecantoide.

Resolución:

Como $A \in$ a la tangentoide $\Rightarrow \tan a = k^2 - k + 1$

Como $B \in$ a la cotangentoide $\Rightarrow \cot b = k^2 + k - 1$

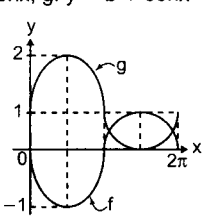
$a + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan a = \cot b$

$k^2 - k + 1 = k^2 + k - 1 \Rightarrow k = 1$

Como $P \in$ a la cosecantoide

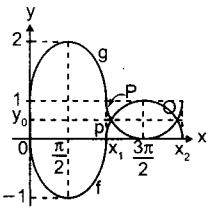
$\Rightarrow \csc x = k + 1 \Rightarrow \csc x = 2$ Por lo tanto el menor valor positivo de x tal que $\csc x = 2$ es: $x = \frac{\pi}{6}$

13. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas mostradas; si tienen por ecuación:
    f: $y = a\text{sen}x$; g: $y = b + \text{sen}x$



Resolución:

Primero determinamos a y b



Gráfica de f:

Observamos que para: $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -1$

$a\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow a = -1$

Gráfica de g:

Observamos que para: $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow b + \text{sen}\frac{\pi}{2} = 2 \Rightarrow b = 1$

f: $y = -\text{sen}x \wedge$ g: $y = 1 + \text{sen}x$

Observamos que hay dos puntos de intersección P y Q, además de la figura las coordenadas de P son $(x_1; y_0)$ y de Q son $(x_2; y_0)$

Como $P \in f \Rightarrow y_0 = -\text{sen}x_1$

Como $P \in g \Rightarrow y_0 = 1 + \text{sen}x_1$

$1 + \text{sen}x_1 = -\text{sen}x_1$; $x_1 \in \left\langle\pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

$\text{sen}x_1 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$

Como $Q \in f \Rightarrow y_0 = -\text{sen}x_2$

Como $Q \in g \Rightarrow y_0 = 1 + \text{sen}x_2$

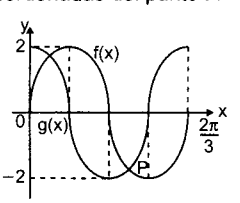
$1 + \text{sen}x_2 = -\text{sen}x_2$; $x_2 \in \left\langle\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

$\text{sen}x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ Coordenadas de P: $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Coordenadas de Q: $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

14. Si $f(x) = a\text{sen}kx$, $g(x) = a\cos kx$ son funciones cuyas gráficas se muestran en la figura adjunta. Calcular las coordenadas del punto P.



Resolución:

Observemos que P está debajo del eje X entonces tiene ordenada negativa; además sean las coordenadas del punto P: $(x_0; y_0)$

Se puede observar que las funciones dadas tienen como período: $\frac{2\pi}{3}$ y su máximo valor es 2, entonces:

$$\left.\begin{cases} a = 2 \\ \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow k = 3 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} f(x) = 2\text{sen}3x \\ g(x) = 2\cos 3x \end{array}$$

Como $P \in f(x) \Rightarrow y_0 = 2\text{sen}x_0$
Como $P \in g(x) \Rightarrow y_0 = 2\cos 3x_0$
$2\text{sen}3x_0 = 2\cos 3x_0 \Rightarrow \tan 3x_0 = 1$
$3x_0 = \frac{\pi}{4} \vee 3x_0 = \frac{5\pi}{4}$
No olvidar que y_0 es negativo (ya que $P \in$ IVC)
Si: $3x_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_0 = 2\text{sen}\frac{\pi}{4} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2}$ (NO)
Si: $3x_0 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow y_0 = 2\text{sen}\frac{5\pi}{4} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2}$ (Sí)
$\therefore$ Las coordenadas de P: $\left(\frac{5\pi}{12}; -\sqrt{2}\right)$

15. Un objeto se mueve de acuerdo a la ecuación $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(8\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ donde t está medido en minutos. ¿Cuál es el período, cuántos ciclos se completan en 10 minutos y cuál es la distancia que hay desde el objeto hasta el origen cuando t = 0?

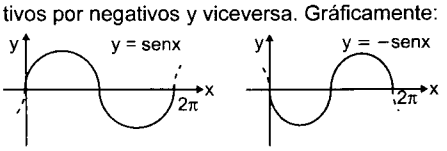
Resolución:

La función es: $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(8\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$
El período es: $\frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$
Esto significa que 1 ciclo se hace en $\frac{1}{4}$ minuto.
Por lo tanto en 10 minutos se completan 40 ciclos.
La distancia que hay del objeto al origen cuando t = 0 es:
$\left|\sqrt{2}\,\text{sen}\left(8\pi(0) - \frac{\pi}{4}\right)\right|$
$\left|\sqrt{2}\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|(\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = 1\text{m}$

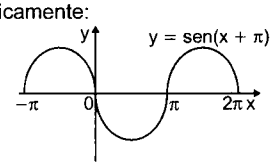
16. A partir de y = senx graficar cada una de las siguientes funciones y analizarlas.
- $y = -\text{sen}x$
- $y = \text{sen}(x + \pi)$
- $y = -\cos x$
- $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

Resolución:

- Dada la función: y = −senx y comparando con la función y = senx puede decir que el signo menos lo que hace es cambiar los valores positivos por negativos y viceversa. Gráficamente:

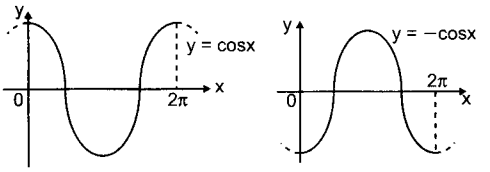


- En el caso de la función: $y = \text{sen}(x + \pi)$.
Hay un desfase de π unidades a la izquierda.
$(x + \pi = 0)$.
Gráficamente:



Si observa bien esta curva es idéntica a la anterior; y = −senx, por lo tanto se deduce que: $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}x$

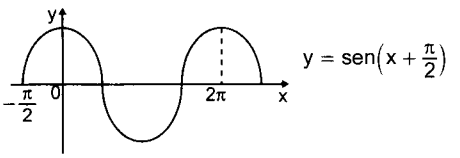
- Función: $y = -\cos x$



- Función: $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Desfase: $-\frac{\pi}{2}$

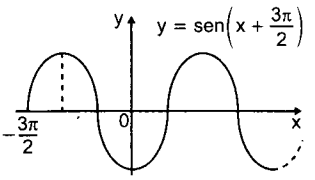
Significa que la curva de y = senx se traslada horizontalmente $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda.



Se observa que esta curva es igual a: y = cosx
por lo tanto: $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

- Función: $y = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$x + \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ Desfase $= -\frac{3\pi}{2}$

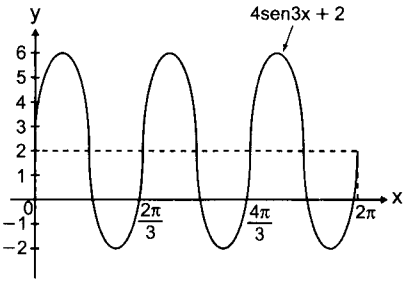


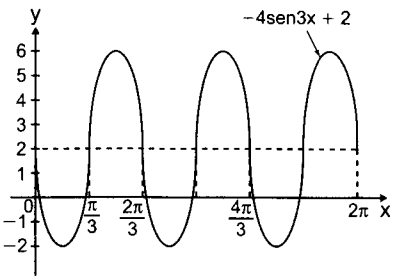
Se observa que esta curva es igual a y = −cosx
Por lo tanto: $\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$

17. Dada la función: f(x) = AsenBx + C, cuyo dominio es $[0; 2\pi]$, su rango es $[-2; 6]$ y su período es $\frac{2\pi}{3}$; graficar dicha función.

Resolución:

Dato: f(x) = AsenBx + C
Como el período es $\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{B} \Rightarrow B = 3$
Como el rango es $[-2; 6]$, entonces hay dos posibilidades.
(Primero) $\begin{cases} -A + C = -2 \\ A + C = 6 \end{cases}$ se deduce que:
$C = 2 \wedge A = 4$
Por lo tanto la función es: f(x) = 4sen3x + 2
(Segundo) $\begin{cases} -A + C = 6 \\ A + C = -2 \end{cases}$ se deduce:
$C = 2$ y $A = -4$
Por lo tanto la función es: f(x) = −4sen3x + 2
Graficamos ambas soluciones:





PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada la función f, definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}x + \cos x}{1 - \operatorname{sen}x + \cos x};\ k \in \mathbb{Z}$$

hallar los puntos de discontinuidad de f.

Resolución:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}x + \cos x}{1 - \operatorname{sen}x + \cos x}$$

Cálculo del dominio:

Del denominador: $1 - \operatorname{sen}x + \cos x \neq 0$

$1 \neq \operatorname{sen}x - \cos x$

$$1 \neq \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$1 \neq \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego: $x - \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \ \vee\ x - \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

$$x \neq \left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \ \vee\ x \neq (2k+1)\pi$$

Dominio $f = \mathbb{R} - \left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{(2k+1)\pi\}$

Por lo tanto, los puntos de discontinuidad:

$$\left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{(2k+1)\pi\}$$

2. Si $\forall x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, hallar el rango de la función f definida por: $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}x} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Resolución:

$$f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}x} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right); x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

$$f(x) = \sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} + \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = \underbrace{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right|}_{(+)} + \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) + \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

Pero: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} < \sqrt{2}$

$\therefore$ Rango de $f = \langle 0; \sqrt{2}\rangle$

3. Determinar el valor máximo que toma la función: $f(x) = 3\operatorname{sen}^2x + 4\cos^2x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Resolución:

$f(x) = 3(\operatorname{sen}^2x + \cos^2x) + \cos^2x$

$f(x) = 3 + \cos^2x$

Cálculo del rango:

Conocemos que: $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \cos^2x \leq 1$

$\Rightarrow 3 \leq \cos^2x + 3 \leq 4$

$\Rightarrow \underset{f(x)_{máx}}{\underset{\downarrow}{3}} \leq f(x) \leq \underset{f(x)_{mín}}{\underset{\downarrow}{4}}$

$\therefore f(x)_{máx} = 4$

4. Si $x \in [0; 2\pi]$, determinar el rango de la función f: $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen}x|(|\operatorname{sen}x| + \operatorname{sen}x)}$

Resolución:

$f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen}x|(|\operatorname{sen}x| + \operatorname{sen}x)};\ x \in [0; 2\pi]$

Cálculo del rango:

Si: $x \in [0; \pi] \Rightarrow \operatorname{sen}x \geq 0$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x)} = \sqrt{2\operatorname{sen}^2x}$

$f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}x$

Pero:

Si: $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \operatorname{sen}x \leq 1$

$0 \leq \sqrt{2}\operatorname{sen}x \leq \sqrt{2} \Rightarrow f(x) \in [0; \sqrt{2}]$ ...(1)

Ahora, si: $\pi < x \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen}x \leq 0$

$|\operatorname{sen}x| = -\operatorname{sen}x \Rightarrow |\operatorname{sen}x| + \operatorname{sen}x = 0$

Al reemplazar en f: $f(x) = 0$ ...(2)

Luego de (1) y (2): Rango de $f = [0; \sqrt{2}]$

5. Si $x \in \left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right)$ indicar la suma del valor mínimo y máximo de la función f definida por:

$$f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4} + x\right)$$

Resolución:

$$f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4} + x\right);\ x \in \left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right)$$

Calculo del rango de f.

Tenemos: $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{5\pi}{3} \leq \underbrace{\frac{7\pi}{4} + x}_{\in IVC} \leq \frac{11\pi}{6}$

Aquí la función senx es creciente.

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}+x\right) \le -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} \le 2\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}+x\right) \le -1$$

Rango f = $[-\sqrt{3}; -1]$

$\therefore f(x)_{máx} + f(x)_{mín} = -\sqrt{3} - 1$

6. Si f es una función definida por:
$f(x) = 3\text{sen}x + 4\cos x$, y g es una función definida por: $g(x) = 7\text{sen}x + 24\cos x$; y el rango de f es de la forma [a;b] y el rango de g es de la forma [m;n]; hallar el valor de $F = \frac{a}{b} - \frac{2m}{n}$

Resolución:

$f(x) = 3\text{sen}x + 4\cos x \wedge f(x) \in [a; b]$

Conocemos que:

$-\sqrt{3^2+4^2} \le 3\text{sen}x + 4\cos x \le \sqrt{3^2+4^2}$

$\Rightarrow f(x) \in [-5; 5]$ $a = -5 \wedge b = 5$

$g(x) = 7\text{sen}x + 24\cos x \wedge g(x) \in [m; n]$ también

$-\sqrt{7^2+24^2} \le 7\text{sen}x + 24\cos x \le \sqrt{7^2+24^2}$

$\Rightarrow g(x) = [-25; 25]$ $m = -25 \wedge n = 25$

luego:

$F = \frac{a}{b} - \frac{2m}{n} \Rightarrow F = (-1) - 2(-1) \therefore F = 1$

7. Determinar el rango de la función f definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|\cos x| - 1}}{\cos x - 1}$$

Resolución:

Cálculo del dominio:

Del radical: $\sqrt{|\cos x| - 1} \ge 0 \Rightarrow |\cos x| - 1 \ge 0$

$\Rightarrow |\cos x| \ge 1 \Rightarrow |\cos x| = 1$

$\cos x = \{-1;1\}$ ...(1)

Del denominador:

$\cos x - 1 \ne 0 \Rightarrow \cos x \ne 1$ ...(2)

De (1) $\wedge$ (2): $\cos x = -1 \Rightarrow x = [2n+1]\pi; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Dominio f = $\{(2n+1)\pi] : n \in \mathbb{Z}$

Calculo del rango:

Como $\cos x = -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{|-1|-1}}{-1-1} = 0$

$\therefore$ Rango f = {0}

8. Sea la función f definida por:
$f(x) = 2\text{sen}7x\cos 3x - \text{sen}4x - 5$
Hallar $f(x)_{máx.} + 2f(x)_{mín.}$

Resolución:

Cálculo del rango de f:

$f(x) = [\text{sen}10x + \text{sen}4x] - \text{sen}4x - 5$

$f(x) = \text{sen}10x - 5$

Conocemos que:

$-1 \le \text{sen}10x \le 1; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -6 \le \text{sen}10x - 5 \le -4$

Rango f = $[-6; -4]$

Además:

$\therefore f(x)_{máx.} + 2f(x)_{min.} = -16$

9. Si f es una función definida por:
$f(x) = \frac{4\cos^2 x - 2}{5 - \cos^2 x}$; calcular el rango de la función.

Resolución:

$$f(x) = \frac{4\cos^2 x - 2}{5 - \cos^2 x}$$

Cálculo del rango:

$$f(x) = \frac{-4(5-\cos^2 x) + 18}{5 - \cos^2 x} = -4 + \frac{18}{5 - \cos^2 x}$$

Conocemos que: $0 \le \cos^2 x \le 1 : \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 \ge -\cos^2 x \ge -1$

$\Rightarrow 5 \ge 5 - \cos^2 x \ge 4 \Rightarrow \frac{5}{18} \ge \frac{5-\cos^2 x}{18} \ge \frac{2}{9}$

$(\ )^{-1} \Rightarrow \frac{18}{5} \le \frac{18}{5-\cos^2 x} \le \frac{9}{2}$

$-4 \Rightarrow \frac{-2}{5} \le -4 + \frac{18}{5-\cos^2 x} \le \frac{1}{2}$

$\therefore$ Rango f = $\left[-\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right]$

10. Dada las funciones f y g definidas por:
$f(x) = \text{sen}^2 x + 2\text{sen}x + 1 \wedge g(x) = \cos^2 x$;
¿para qué valores de $x \in [0; 2\pi]$, $f(x) - g(x) \ge 0$?

Resolución:

Tenemos: $f(x) = \text{sen}^2 x + 2\text{sen}x + 1 \wedge g(x) = \cos^2 x$

Se pide valores de $x \in [0;2\pi]$

donde: $f(x) = g(x) \ge 0$

$\text{sen}^2 x + 2\text{sen}x + \underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{\text{sen}^2 x} \ge 0$

$\Rightarrow 2\text{sen}^2 x + 2\text{sen}x \ge 0$

$\Rightarrow 2\text{sen}x\,[\text{sen}x + 1] \ge 0$

Pero: $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \le \text{sen}x \le 1$

$2\text{sen}x(\text{sen}x + 1) \ge 0 \Rightarrow 2\text{sen}x \ge 0 \wedge \text{sen}x + 1 = 0$

$\text{sen}x \ge 0; x \in \langle 0;\pi\rangle \wedge \text{sen}x = -1;\ x = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ CS: $x \in \langle 0;\pi\rangle \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

11. Hallar todos los valores para x del intervalo $[0 ; 2\pi\rangle$ que verifiquen la desigualdad: $1 + \text{sen}x - \cos x > 0$

Resolución:

$1 + \underbrace{\text{sen}x - \cos x}_{\sqrt{2}\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} > 0$; $x \in [0 ; 2\pi\rangle$

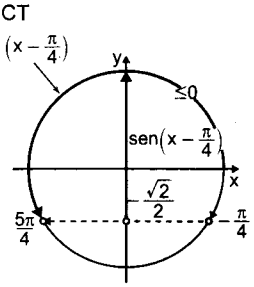
$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1 \Rightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lo representamos en la CT

Notemos que:

$-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ CS: $x \in \langle 0; 3\pi/2\rangle$



12. Hallar los valores de x en el intervalo $\langle 0;\pi\rangle$ para los cuales exista f si:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}x - 2\cos^2 x}}$$

Resolución:

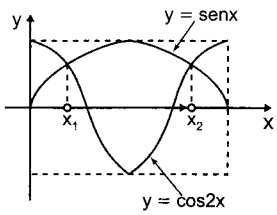
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}x - 2\cos^2 x}};\ x \in \langle 0;\pi\rangle$$

Para que f esté definido:

$1 + \operatorname{sen}x - 2\cos^2 x > 0$

$\operatorname{sen}x > 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \operatorname{sen}x > \cos 2x$

Resolvemos esta inecuación gráficamente



Notemos del gráfico que:

$\operatorname{sen}x > \cos 2x$ cuando $x \in \langle x_1; x_2\rangle$

pero en $x_1 \wedge x_2$ sucede que: $\operatorname{sen}x = \cos 2x$

$\Rightarrow x + 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore\ x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$; CS: $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

13. Hallar el valor mínimo de la función definida por:

$$f(x) = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

Resolución:

Completamos cuadrados:

$$f(x) = \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(x) = \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Conocemos que:

$$\tan x \in \mathbb{R} \wedge \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ f(x) \in [-1/4; \infty\rangle \wedge F(x)_{mín} = -\frac{1}{4}$$

14. Determinar el máximo valor que toma la función.

$$f(x) = \tan 3x \cot^3 x;\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Resolución:

$$f(x) = \left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)\frac{1}{\tan^3 x}$$

$$f(x) = y = \frac{(3 - \tan^2 x)\tan x}{\tan^3 x(1 - 3\tan^2 x)}$$

$\Rightarrow y\tan^2 x(1 - 3\tan^2 x) = 3 - \tan^2 x$

$\Rightarrow y\tan^2 x - 3y\tan^4 x = 3 - \tan^2 x$

$\Rightarrow 0 = 3y\tan^4 x - (y + 1)\tan^2 x + 3$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow$ Para que tanx admita valores reales.

$(y + 1)^2 - 4(3y)(3) \geq 0$

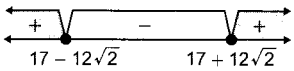
$(y^2 + 2y + 1] - 36y \geq 0$

$y^2 - 34y + 1 \geq 0 \Rightarrow (y^2 - 34y + 17^2) - 17^2 + 1 \geq 0$

$(y - 17)^2 - (12\sqrt{2})^2 \geq 0$

$(y - 17 + 12\sqrt{2})(y - 17 - 12\sqrt{2}) \geq 0$

Puntos críticos: $\{17 - 12\sqrt{2};\ 17 + 12\sqrt{2}\}$



$\therefore\ y \in \langle -\infty; 17 - 12\sqrt{2}] \cup [17 + 12\sqrt{2}; +\infty\rangle$

Luego "y" admite solo un máximo relativo.

Así: $y_{máx} = 17 - 12\sqrt{2}$

15. Hallar el rango de la función f definida por:

$$F(x) = \frac{3 + \tan^2 x}{1 + \tan x}$$

Resolución:

Cálculo del rango de F:

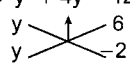
$$y = \frac{3 + \tan^2 x}{1 + \tan x} \Rightarrow y + y\tan x = 3 + \tan^2 x$$

$0 = \tan^2 x - y\tan x + (3 - y)$

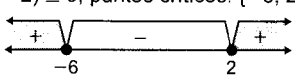
Para que tanx admita valores reales se debe cumplir que: $\Delta \geq 0$

$\Rightarrow y^2 - 4(1)(3 - y) \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + 4y - 12 \geq 0$



$(y + 6)(y - 2) \geq 0$; puntos críticos: $\{-6; 2\}$



$\Rightarrow y \in \langle -\infty; -6] \cup [2; +\infty\rangle$

$\therefore$ Rango F $= \langle -\infty; -6] \cup [2; +\infty\rangle$

16. Determinar los puntos de discontinuidad de la función f:

$$f(x) = \frac{\csc 2x}{\operatorname{sen}x - \cos x} + \frac{\csc 2x}{\operatorname{sen}x + \cos x}, n \in \mathbb{Z}$$

Resolución:

Cálculo del dominio:

$y = \csc 2x;\ 2x \neq \{n\pi\} \Rightarrow x \neq \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

también, de los denominadores:

$\operatorname{sen}x - \cos x \neq 0 \wedge \operatorname{sen}x + \cos x \neq 0$

$\operatorname{sen}x \neq \cos x \quad \wedge \quad \operatorname{sen}x \neq -\cos x$

$\tan x \neq 1 \quad \wedge \quad \tan x \neq -1$

$\tan x \neq \{-1; 1\} \Rightarrow x \neq \left\{(2n + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$

Luego:

Dominio f $= \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\} \cup \left\{(2n + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$

Dominio f $= \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$

Por lo tanto, los puntos de discontinuidad de f: $\left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$

17. Sea f una función definida por:

$f = \{(x; y) / y = \csc^2 x + 1\}$ y su rango:

Ranf $= [2; 3]$, determinar su dominio ($\forall\ k \in \mathbb{Z}$).

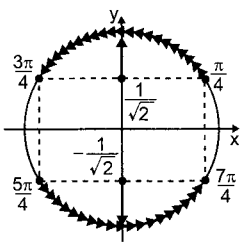
Resolución:

$y = \csc^2 x + 1 \wedge$ rango $= [2; 3]$

$\Rightarrow 2 \leq \csc^2 x + 1 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \csc^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \geq \text{sen}^2 x \geq \frac{1}{2}$

$1 \geq \text{sen}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \vee -1 \leq \text{sen}x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Gráficamente:



Notemos que: $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

En general: $x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$

$\therefore$ dominio $f := \left[k\pi + \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]; k \in \mathbb{Z}$

18. Determinar el rango de la siguiente función:
$f(x) = |\sec x|^2 + 2\sec|x|$

Resolución:

Cálculo del rango: $|\sec x|^2 = \sec^2 x$

como: $\sec(-x) = \sec x \Rightarrow \sec|x| = \sec x$

Ahora completaremos cuadrados:

$f(x) = \sec^2 x + 2\sec x + 1 - 1 = (\sec x + 1)^2 - 1$

Conocemos que:

$\sec x \leq -1 \quad \wedge \quad \sec x \geq 1$

$\sec x + 1 \leq 0 \quad \wedge \quad \sec x + 1 \geq 2$

$(\sec x + 1)^2 \geq 0 \quad \wedge \quad (\sec x + 1)^2 \geq 4$

$(\sec x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sec x + 1)^2 - 1 \geq -1$

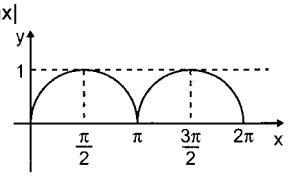
$\therefore$ Rango $f = [-1; +\infty\rangle$

19. Sean las funciones f y g definidas mediante:
$f(x) = |\text{sen}(x)| \wedge g(x) = |\sec(x) + 1|$;
$0 < x < 2\pi$. ¿En cuántos puntos se cortan las gráficas de f y g en dicho intervalo?

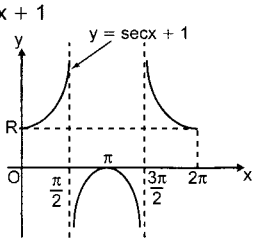
Resolución:

Grafiquemos ambas funciones:

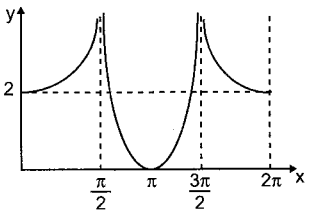
• $y = |\text{sen}x|$



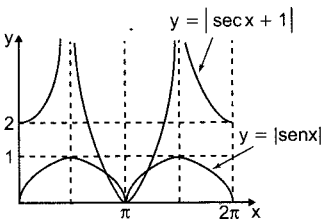
• $y = \sec x + 1$



$y = |\sec x + 1|$



Graficamos ambas funciones en el mismo plano.



Notamos del gráfico que ambas curvas en el tramo de $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ se interceptan en 3 puntos.

20. Si $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ determinar el conjunto de valores de x para el cual no exista la función f definida por:
$f(x) = \sqrt{\sqrt{3}\csc x \sec x - 4}$

Resolución:

Cálculo del dominio:

$\sqrt{\sqrt{3}\csc x \sec x - 4} \geq 0$

$\sqrt{3}\sec x \csc x - 4 \geq 0$

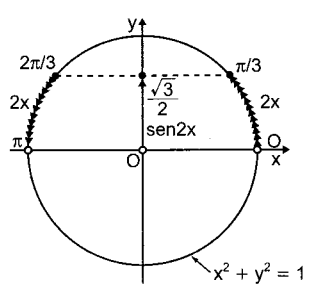
$\frac{\sqrt{3}}{\text{sen}x\cos x} \geq 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 2\text{sen}x\cos x$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \text{sen}2x \vee \text{sen}2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ahora, como: $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle \Rightarrow 2x \in \langle 0; \pi\rangle$

Luego: $0 < \text{sen}2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Representamos los valores de sen2x.



Del gráfico: $2x \in \langle 0; \pi/3] \cup [2\pi/3; \pi]$

$x \in \langle 0; \pi/6] \cup [\pi/3; \pi/2]$

Dominio $f = \langle 0; \pi/6] \cup [\pi/3; \pi/2\rangle$

Los valores de x en el tramo de $x \in \langle 0; \pi/2\rangle$ para que f no exista será: $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\rangle$

21. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $f(x) = \text{exsec}(x)$ es creciente en $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

II. $g(x) = \text{cov}(x) - \text{vers}(x)$ es negativa en $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

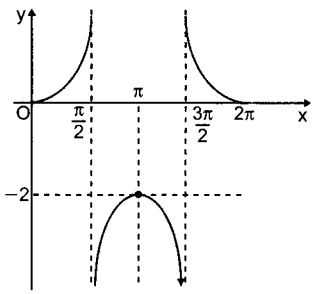
III. $h(x) = \text{sen}|x|$ es una función con periodo π

Resolución:

I. $f(x) = \text{exsec}(x)$; $x \in \langle \pi; 3\pi/2 \rangle$

$f(x) = \sec x - 1$

Grafiquemos:



Notar que cuando: $x \in \langle \pi; 3\pi/2 \rangle$ la función f es decreciente.

II. $g(x) = \text{cov}(x) - \text{vers}(x)$; $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$g(x) = (1 - \text{sen}x) - (1 - \cos x)$

$g(x) = \cos x - \text{sen}x$

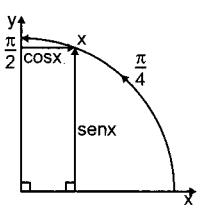
ahora cuando: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

$\text{sen}x > \cos x$

$\Rightarrow \text{sen}x - \cos x > 0$

$\cos x - \text{sen}x < 0$

$\therefore$ Cuando: $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$; $g(x) < 0$



III. $h(x) = \text{sen}|x|$

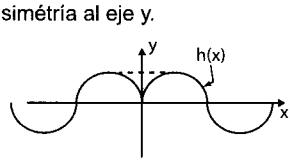
Graficaremos h

Notemos que: $h(-x) = \text{sen}|-x| = \text{sen}|x|$

$\Rightarrow h(-x) = h(x)$

Por lo tanto, la gráfica de h es simétrico al eje y.

Graficamos h, cuando x sea positivo, y la gráfica de h cuando x sea negativo lo obtendremos por la simétría al eje y.



Del gráfico: h(x) no es periódica.

Finalmente el valor de verdad de cada proposición dada será:

I. F II. V III. F

22. Sea la función f definida por $f(x) = |\text{sen}(x) - \cos(x)|$. Analizar el valor de la verdad de las siguientes proposiciones:

I. f es máximo sólo en $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. El periodo de f es 2π.

III. f es creciente en $\left\langle -\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \right\rangle$; $n \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$f(x) = |\text{sen}x - \cos x|$

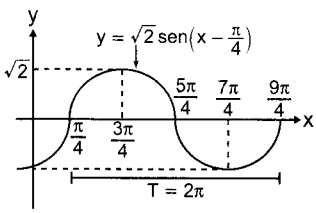
$f(x) = \sqrt{2}\left|\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

Graficamos primeramente: $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

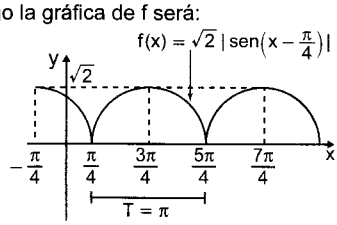
tenemos: Amplitud $= \sqrt{2}$

Periodo $= 2\pi$

Desfasaje $= \frac{\pi}{4}$



Luego la gráfica de f será:



Del gráfico:

I. F es máximo cuando: $x = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}$; $k \in \mathbb{Z}$

II. El periodo de f es: $T = \pi$ el mínimo

III. En $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \right\rangle$; $n \in \mathbb{Z}$

f es creciente y decreciente

El valor de verdad de cada proporción será:

I. F II.V III. F

23. Al graficar: $f(x) = \text{sen}4x \;\wedge\; g(x) = \cos\frac{x}{2}$

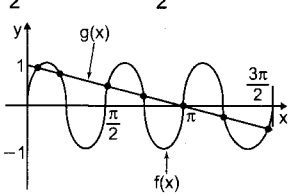
¿En cuántos puntos se interceptan en el intervalo: $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$?

Resolución:

Graficamos ambas funciones:

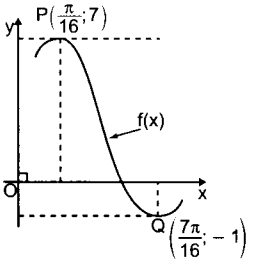
$f(x) = \text{sen}4x$

$g(x) = \cos\frac{x}{2}$; para $x \in [0; \frac{3\pi}{2}\rangle$



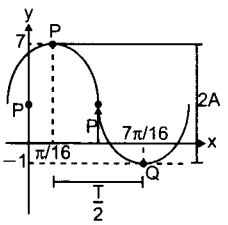
Del gráfico, f y g se interceptan en 7 puntos cuando $x \in [0; 3\pi/2\rangle$

24. Determinar la regla de correspondencia de la función f mostrada, si P y Q son puntos máximo y mínimo respectivamente.



Resolución:

$G = A\text{sen}(Bx + C) + D$



Del gráfico: $2A = 7 + 1 \Rightarrow A = 4$

$D = \dfrac{7 + (-1)}{2} \Rightarrow D = 3$

$\dfrac{T}{2} = \dfrac{7\pi}{16} - \dfrac{\pi}{16} \Rightarrow \dfrac{T}{2} = \dfrac{6\pi}{16} \Rightarrow T = \dfrac{3\pi}{4}$

Pero el periodo T es igual a: $\dfrac{2\pi}{B}$

$\Rightarrow \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{B} \Rightarrow B = \dfrac{8}{3}$

La regla de correspondencia será:

$y = 4\text{sen}\left(\dfrac{8x}{3} + C\right) + 3$

Para el cálculo de C evaluamos las coordenadas de $P\left(\dfrac{\pi}{16};7\right)$

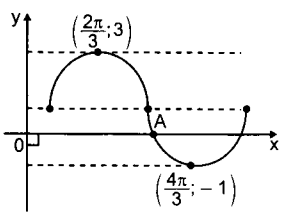
$7 = 4\text{sen}\left[\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{\pi}{16}\right) + C\right] + 3$

$4 = 4\text{sen}\underbrace{\left(\dfrac{\pi}{6} + C\right)}_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{3}$

Por lo tanto la regla de correspondencia de f será:

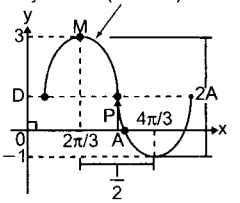
$f(x) = y = 4\text{sen}\left(\dfrac{8x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$

25. En el sinusoide de la función mostrada, hallar la abscisa del punto A.



Resolución:

$y = A\text{sen}(BX + C) + D$



Del gráfico:

$2A = 3 + 1 \Rightarrow A = 2$

$D = \dfrac{3 + (-1)}{2} \Rightarrow D = 1$

Para el periodo T: $\dfrac{T}{2} = \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \dfrac{4\pi}{3}$

Pero conocemos que: $T = \dfrac{2\pi}{B}$

$\Rightarrow \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{B} \Rightarrow B = \dfrac{3}{2}$

La regla de correspondencia queda como:

$y = 2\text{sen}\left(\dfrac{3x}{2} + C\right) + 1$

Para el cálculo de C evaluamos las coordenadas de: $M\left(\dfrac{2\pi}{3};3\right)$.

Así: $3 = 2\text{sen}\left[\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + C\right] + 1$

$2 = 2\text{sen}(\pi + c) \Rightarrow C = -\dfrac{\pi}{2}$

Finalmente la regla de correspondencia será:

$y = 2\text{sen}\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

Cálculo de las coordenadas del punto A

Notar que en A: $y = 0$

$\Rightarrow 0 = 2\text{sen}\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

$-\dfrac{1}{2} = \text{sen}\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\dfrac{1}{2} = -\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3x}{2}\right)$

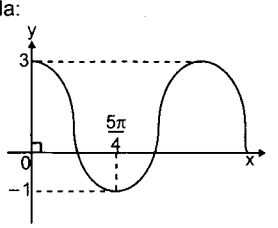
$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{3x}{2} \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{9}$

Pero la abscisa de A es mayor que $\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow x_A = \dfrac{2\pi}{9} + T = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{14\pi}{9}$

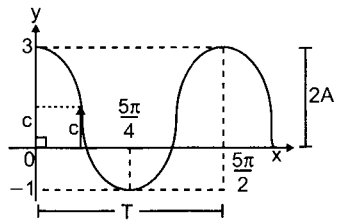
$\therefore$ Coordenada de A: $\left(\dfrac{14\pi}{9};0\right)$

26. Determinar la regla de correspondencia de la gráfica mostrada:



Resolución:

$g = A\cos(Bx) + D$



Del gráfico:

$2A = 3 + 1 \Rightarrow A = 2$

$C = \dfrac{3 + (-1)}{2} \Rightarrow C = 1$

Periodo: $T = \dfrac{5\pi}{2}$; pero: $T = \dfrac{2\pi}{B}$

$\Rightarrow \dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{5\pi}{2} \Rightarrow B = \dfrac{4}{5}$

luego la regla de correspondencia de la curva será:

$y = 2\cos\dfrac{4x}{5} + 1$

$y = 2\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4x}{5}\right) + 1$

$y = -2\text{sen}\left(\dfrac{4x}{5} - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

$\therefore\ y = 1 - 2\text{sen}\left(\dfrac{4x}{5} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

27. Calcular el periodo de la función definida por: $f(x) = 2^{|\tan x|} + 3^{|\tan 2x|} + 4^{|\tan 3x|}$

Resolución:

Sea f periódica de periodo T entonces debe verificarse que: $f(x) = f(x + T)$

$\Rightarrow f(x + T) = 2^{|\tan(x+T)|} + 3^{|\tan(2x + 2T)|} + 4^{|\tan(3x + 3T)|}$

Para: $T = \pi$

$f(x + \pi) = 2^{|\tan(x + \pi)|} + 3^{|\tan(2x + 2\pi)|} + 4^{|\tan(3x + 3\pi)|}$

$f(x + \pi) = 2^{|\tan x|} + 3^{|\tan 2x|} + 4^{|\tan 3x|}$

$f(x + \pi) = f(x)$ Por lo tanto el periodo mínimo: π

28. Hallar el periodo mínimo de la función f definida por:

$f(x) = \text{sen}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\text{sen}\dfrac{x}{2}\right)$

Resolución:

Sea f periódica de periodo T, entonces debe verificarse que: $f(x) = f(x + T)$

$f(x + T) = \text{sen}\left[\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{T}{2}\right)\right] + \cos\left[\text{sen}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{T}{2}\right)\right]$

Si: $\dfrac{T}{2} = 2\pi$

$f(x + 4\pi) = \text{sen}\left[\cos\left(\dfrac{x}{2} + 2\pi\right)\right] + \cos\left[\text{sen}\left(\dfrac{x}{2} + 2\pi\right)\right]$

$f(x + 4\pi) = \text{sen}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\text{sen}\dfrac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x + 4\pi) = f(x)$

$\therefore$ Periodo mínimo: 4π

29. Hallar el periodo mínimo de la función f definida por: $f(x) = |\tan(x/2)| + |\cot(x/2)|$

Resolución:

$f(x) = \left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + \left|\cot\dfrac{x}{2}\right|$

sea f periódica de periodo T, entonces debe verificarse que:

$f(x) = f(x + T)$

$\Rightarrow f(x + T) = \left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{T}{2}\right)\right| + \left|\cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{T}{2}\right)\right|$

Si:

$f(x + \pi) = \left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$

$f(x + \pi) = \left|-\cot\dfrac{x}{2}\right| + \left|-\tan\dfrac{x}{2}\right|$

$f(x + \pi) = \left|\cot\dfrac{x}{2}\right| + \left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

$f(x + \pi) = f(x)$

Por lo tanto el período mínimo: $f = \pi$

30. Para la función f definida por: $f(x) = |\cot x|(3|\cot x| + 1)$, $x \in \left\langle\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\rangle$, determinar el rango.

Resolución:

$f(x) = |\cot x|(3|\cot x| + 1);\ x \in \left\langle\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\rangle$

Cálculo del rango de f:

$f(x) = 3[|\cot x|^2 + 1/3|\cot x|]$

Completamos cuadrados

$f(x) = 3\left(|\cot x|^2 + \dfrac{1}{3}|\cot x| + \dfrac{1}{36}\right) - \dfrac{1}{12}$

$f(x) = 3\left(|\cot x| + \dfrac{1}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{12}$

Ahora por condición:

$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

En este tramo la cotangente es continua y decreciente.

$\cot\dfrac{\pi}{4} > \cot x > \cot\dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow 1 > \cot x > -1 \Rightarrow 1 > |\cot x| \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{7}{6} > |\cot x| + \dfrac{1}{6} \geq \dfrac{1}{6}$

$(\ )^2 \Rightarrow \dfrac{49}{36} > \left|(\cot x) + \dfrac{1}{6}\right|^2 \geq \dfrac{1}{36}$

$\times 3 \Rightarrow \dfrac{49}{12} > 3\left|(\cot x) + \dfrac{1}{6}\right|^2 \geq \dfrac{1}{12}$

$-\dfrac{1}{12} \Rightarrow 4 > 3\left(|\cot x| + \dfrac{1}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{12} \geq 0$

Rango $f = [0; 4\rangle \Rightarrow 0 \leq f(x) < 4$

$\therefore$ Rango $f = [0; 4\rangle$

31. Determine el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f definida por:

$f(x) = \dfrac{\tan(\pi x) + \cot(\pi x)}{|\tan(\pi x)| - |\cot(\pi x)|}$

Resolución:

$f(x) = \dfrac{\tan(\pi x) + \cot(\pi x)}{|\tan(\pi x)| - |\cot(\pi x)|}$

$\tan(\pi x)$ y $\cot(\pi x)$ arrojan los puntos de discontinuidad:

$\pi x = n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$x = n(\frac{1}{2})$ ...(α)

El denominador de f(x) arroja los puntos de discontinuidad:

$|\tan(\pi x)| - |\cot(\pi x) = 0$ sen

$\frac{|\text{sen}(\pi x)|}{|\cos(\pi x)|} = \frac{|\cos(\pi x)|}{|\text{sen}(\pi x)|}$

$\underbrace{\cos^2\pi x = \text{sen}^2(\pi x)}_{\cos 2\pi x} = 0$

$2\pi x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$x = (2n+1)\frac{1}{4}$ ...(β)

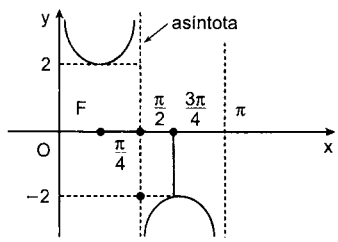
La unión de (α) y (β) nos da todos los puntos de discontinuidad de f:

$x = n(\frac{1}{2}) \vee x = (2n+1)\frac{1}{4}$

$x = (2n)(\frac{1}{4}) \vee x = (2n+1)\frac{1}{4}$

Lo que se resume en: $x = k(\frac{1}{4}) = \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

32. Sea f la función definida por $f(x) = 2\sec(Ax + B)$, $(A > 0)$ cuya gráfica se muestra a continuación, calcular $\frac{A}{B}$

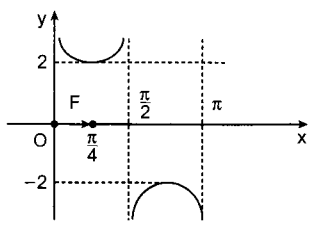


Resolución:

$f(x) = 2\sec(Ax + B), A > 0$

El desfasamiento F de la función está dado por:

$F = -\frac{B}{A}$ ...(I)



Según la gráfica el desfasamiento

F es: $F = \frac{\pi}{4}$ ...(II)

(I) = (II): $-\frac{B}{A} = \frac{\pi}{4}$ $\therefore \frac{A}{B} = -\frac{4}{\pi}$

33. Los periodos de las funciones f y g, son T_1 y T_2 respectivamente, siendo:

$f(x) = \cos(\sec x) \wedge g(x) = \text{sen}\frac{x}{\pi} - \cos\frac{x}{\pi}$

Calcular: $N = \frac{1}{\pi}T_1 + \frac{1}{\pi^2}T_2$

Resolución:

Nos piden: $N = \frac{1}{\pi}T_1 + \frac{1}{\pi^2}T_2$

Hallando T_1; aplicando definición: $f(x + T_1) = f(x)$

$\cos(\sec(x + T_1)) = \cos(\sec x)$

$\cos\left(\frac{1}{\cos x\cos T_1 - \text{sen}x\,\text{sen}T_1}\right) = \cos\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

para que se cumpla la igualdad se tendrá:

$\left.\begin{array}{l}\cos T_1 = \pm 1 \\ \text{sen}T_1 = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} T_1 = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ T_1 = \{\pi, 2\pi, 3\pi...\}\end{array}$

$\Rightarrow T_1 = \pi$

Hallando T_2:

$g(x) = \underbrace{\text{sen}\frac{x}{\pi}}_{g_1(x)} - \underbrace{\cos\frac{x}{\pi}}_{g_2(x)}$

Encontraremos los periodos comunes a:

$g_1(x) \wedge g_2(x)$

$Tg_1 = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{\pi}\right)} = 2\pi^2; Tg_2 = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{\pi}\right)} = 2\pi^2 \Rightarrow T_2 = 2\pi^2$

$\therefore N = \frac{1}{\pi}T_1 + \frac{1}{\pi^2}T_2 = \frac{1}{\pi}(\pi) + \frac{1}{\pi^2}(2\pi^2) = 3$

34. Sea la función f definida por $f(x) = \cot^2 4x$, hallar el periodo de f.

Resolución:

$f(x) = \cot^2 \underset{\underset{B}{\uparrow}}{4}x$

El periodo de funciones de la forma:

$f(x) = A\text{ft}^{2n}(Bx + C) + D$ está dado por: $T = \frac{\pi}{|B|}$

Luego: $T_f = \frac{\pi}{|B|}$ $\therefore T_f = \frac{\pi}{4}$

35. Si $f(x) = \frac{\tan x - |\tan x|}{\tan x + |\tan x|}$, es la regla de correspondencia de f, halle su rango.

Resolución:

$f(x) = \frac{\tan x - |\tan x|}{\tan x + |\tan x|}$

Analicemos dos casos:

I. Si $\tan x < 0$

$f(x) = \frac{\tan x - (-\tan x)}{\tan x + (-\tan x)} = \frac{2\tan x}{0}$

f no está determinada.

II. Si $\tan x > 0$

$f(x) = \frac{\tan x - \tan x}{\tan x + \tan x} \Rightarrow f(x) = 0$

$\therefore \text{Ran}f = \{0\}$

36. Dada la función f, definida por:

$f(x) = \text{sen}\left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)\right] + 2$. Halle el rango de f

Resolución:

Domf = $\mathbb{R}$

Para $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$ ...(I)

Para $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

$f(x) = \text{sen}\left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{x^2+x^{1/2}}\right)\right] + 2$

como: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+x^{1/2}} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{x^2+x^{1/2}}\right) \leq \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 0 < \text{sen}\left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{x^2+x^{1/2}}\right)\right] \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2 < \underbrace{\text{sen}\left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{x^2+x^{1/2}}\right)\right] + 2}_{f(x)} \leq \frac{5}{2}$ ...(II)

De: (I) (II): $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ $\therefore$ Ranf = [2; 5/2]

37. Hallar el rango de la función f definida como

$f(x) = \frac{\cos x - 2}{1 + |\cos x - 2|}$, si $x \in \mathbb{R}$

Resolución:

Si $x \in \mathbb{R}$, se cumple: $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Rightarrow -3 \leq \cos x - 2 \leq -1$ ...(I)

$\Rightarrow |\cos x - 2| = -(\cos x - 2)$, pues $\cos x - 2 < 0$

Entonces:

$f(x) = \frac{\cos x - 2}{1 - \cos x + 2} = \frac{\cos x - 2}{3 - \cos x} = \frac{-(3 - \cos x) + 1}{3 - \cos x}$

$f(x) = -1 + \frac{1}{3 - \cos x}$

Ahora se calcula el rango para esta función redefinida a partir de la condición (I):

$3 \geq 2 - \cos x \geq 1 \Rightarrow 4 \geq 3 - \cos x \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \cos x} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq -1 + \frac{1}{3 - \cos x} \leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}$ $\therefore$ Ranf = $\left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right]$

38. Dada la función f, definida por:

$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = |\cos^2 x - 1| + 2\cos x - 1$

Halle el rango de f.

Resolución:

Si $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = |\cos^2 x - 1| + 2\cos x - 1$

Haciendo un cambio de variable:

$\mu = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \mu + \frac{\pi}{2}$ ... en (I)

Se tiene: $f(\mu) = \left|\cos^2\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right| + 2\cos\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$f(\mu) = |\text{sen}^2\mu - 1| - 2\text{sen}\mu - 1$ ...(II)

Como: $0 \leq \text{sen}^2\mu \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \text{sen}^2\mu - 1 \leq 0$

$\Rightarrow |\text{sen}^2\mu - 1| = -\text{sen}^2\mu + 1$ ... en (II)

$f(\mu) = -\text{sen}^2\mu + 1 - 2\text{sen}\mu - 1 = -(\text{sen}^2\mu + 2\text{sen}\mu)$

Completando cuadrados tenemos:

$f(\mu) = -[(\text{sen}\mu + 1)^2 - 1]$

$f(\mu) = -(\text{sen}\mu + 1)^2 + 1$

se sabe que: $0 \leq \text{sen}\mu + 1 \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq (\text{sen}\mu + 1)^2 \leq 4$

$-4 \leq -(\text{sen}\mu + 1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow -3 \leq \underbrace{-(\text{sen}\mu + 1)^2 + 1}_{f(x)} \leq 1$

$\therefore$ Ranf = [−3; 1]

39. Hallar el dominio, rango, gráfica y periodo mínimo para la función g, definida como: $g(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$

Resolución:

Analizando el denominador, entonces para que la función g, se encuentre definida se debe cumplir que: $\cos x \neq 0$

$\Rightarrow x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Domf = $\mathbb{R} - \left\{x / x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Para hallar Ranf, analizamos por cuadrantes:

- Si $x \in$ IC o IVC $\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow |\cos x| = \cos x$

  $g(x) = \frac{\cos x}{\cos x} = 1$

- Si $x \in$ IIC o IIIC $\Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$

  $g(x) = \frac{\cos x}{-\cos x} = -1$

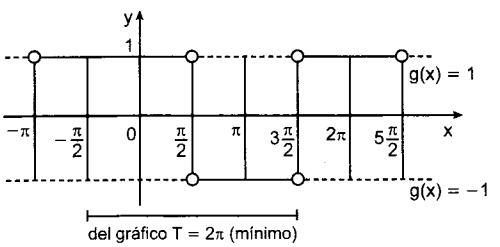
Luego analizando en los ángulos cuadrantales:

si $x = 2k\pi \Rightarrow \cos x = \cos(2k\pi) = 1 \Rightarrow g(x) = 1$

si $x = (2k+1)\pi \Rightarrow \cos x = \cos[(2k+1)\pi] = -1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{-1}{|-1|} = -1$ $\therefore$ Ranf = {−1; 1}

Gráfica:



40. Si ⟨a; b⟩ es el rango de la función $f(x) = \frac{2\cos x - 3}{1 + \cos x}$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, hallar a + b.

Resolución:

$f(x) = \frac{2\cos x - 3}{\cos x + 1} = \frac{2(\cos x + 1) - 5}{(\cos x + 1)} = 2 - \frac{5}{\cos x + 1}$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow 1 < \cos x + 1 < 2$

$\Rightarrow \frac{5}{2} < \frac{5}{\cos x + 1} < 5$

$2-\frac{5}{2} > 2-\frac{5}{\cos x+1} > 2-5$

Por lo tanto $-3 < f(x) < -\frac{1}{2}$; así, $a=-3$ y $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=-\frac{7}{2}$

41. Hallar el rango de f, definida por:
$f(x) = \text{sen}^2x - 4\text{sen}x$ para todo x real.

Resolución:

$f(x) = (\text{sen}x-2)^2-4$

Como $-1 \le \text{sen}x \le 1 \Rightarrow -3 \le \text{sen}x - 2 \le -1$

$\Rightarrow 1 \le (\text{sen}x-2)^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le \underbrace{(\text{sen}x-2)^2-4}_{f(x)} \le 5$

$\therefore\ \text{Ran}f = [-3, 5]$

42. Si el rango de la función $f(x) = \text{sen}x + \cos x$ es $\langle 0, 1]$, hallar su dominio sabiendo que este dominio está contenido en $\langle 0; \pi]$.

Resolución:

Observamos que $f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}(x+45)$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{2}\,\text{sen}(x+45) \le 1$

$\Rightarrow 0 < \text{sen}(x+45) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 0 < x+\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4} \le x+\frac{\pi}{4} < \pi$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x \le 0 \vee \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{4}$

$\therefore\ \text{Dom}f = \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

43. Si f y g son funciones definidas por $f(x) = 32\sec^6(5x)$, $g(x) = 3\pi\csc^3(8x-\pi)$: cuyos periodos son T_1 y T_2 respectivamente; entonces al calcular el periodo mínimo de $f(x)+g(x)$ se obtiene:

Resolución:

El periodo T_1 de $f(x) = 32\sec^6(5x)$ es $T_1 = \frac{\pi}{5}$

El periodo T_2 de $g(x) = 3\pi\csc^3(8x-\pi)$ es

$T_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Luego el periodo mínimo T de $y = f(x)+g(x)$ es el mínimo común múltiplo de los periodos de f y g, es decir, de T_1 y T_2: $T = \pi$

El periodo de funciones de la forma:
$f(x) = A\text{ft}^k(Bx+C)+D$, donde ft = sen, cos, sec, csc, es: $T = \frac{\pi}{|B|}$, si k: par

$T = \frac{2\pi}{|B|}$, si k: impar

44. Establecer la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Las funciones F y G definidas por $F(x) = \text{vers}(x)$ y $G(x) = \text{cov}(x)$, tienen el mismo dominio y el mismo rango.

II. Las funciones f y g, definidas por $f(x) = \text{exsec}(x)$ y $g(x) = \text{cov}(x)$ son funciones pares en sus dominios respectivos.

III. La suma del valor mínimo y el valor máximo de la función f, definida por $f(x) = \text{vers}(x) + \text{cov}(x)$, es igual a 4.

Resolución:

I. $F(x) = \text{vers}x = 1-\cos x$
$G(x) = \text{cov}x = 1-\text{sen}x$
Por teoría se sabe que:
$\text{Dom}F = \mathbb{R}$ $\quad$ $\text{Dom}G = \mathbb{R}$
$\text{Ran}F = [0; 2]$ $\quad$ $\text{Ran}G = [0; 2]$
$\Rightarrow$ I es verdadero

II. $f(x) = \text{exsec}(x) = \sec x - 1$
f es par, pues: $\forall\, x \in \text{Dom}f$: $-x \in \text{Dom}f$
y además $f(-x) = f(x)$
$g(x) = \text{cov}(x) = 1-\text{sen}x$
g no es par, porque: $g(-x) = 1-\text{sen}(-x)$
$g(-x) = 1+\text{sen}x \ne g(x)$
$\Rightarrow$ II es falso

III. $f(x) = \text{vers}(x) + \text{cov}(x)$
$f(x) = 1-\cos x + 1 - \text{sen}x = 2-(\text{sen}x+\cos x)$
Sabemos que:
$-\sqrt{2} \le \text{sen}x + \cos x \le \sqrt{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{2} \ge -(\text{sen}x+\cos x) \ge -\sqrt{2}$
$\underbrace{2+\sqrt{2}}_{\text{máx.}} \ge \underbrace{2-(\text{sen}x+\cos x)}_{f(x)} \ge \underbrace{2-\sqrt{2}}_{\text{mín.}}$
$f_{\text{mín.}} + f_{\text{máx.}} = 4$
$\Rightarrow$ III. es verdadero

$\therefore$ VFV

45. Analizar las siguientes proposiciones indicando la verdad o falsedad.

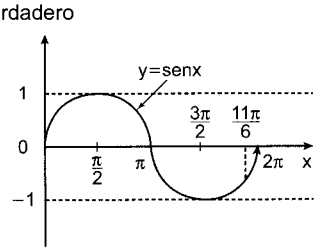
I. La función senx es creciente en $\left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

II. El periodo de la función cosx es π

III. La función cosx es decreciente en $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

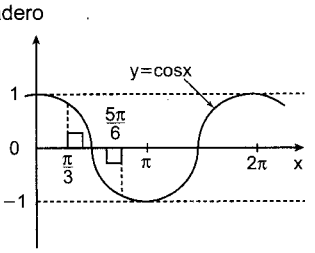
Resolución:

I. Verdadero



II. Falso, ya que el periodo de la función coseno es 2π.

III. Verdadero



46. Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de cada proposición, si la función f está definida por $f(x) = 7\csc[\pi x + 1]$, $x \in \mathbb{R}$.

I. $f_{máx.} = 7$

II. Su periodo mínimo es 2

III. Las asíntotas tiene por ecuación

$x = k - \frac{1}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$f(x) = 7\csc[\pi x + 1]$

I. Se sabe que:

$\csc[\pi x + 1] \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

$\Rightarrow \underbrace{7\csc[\pi x + 1]}_{f(x)} \in \langle -\infty; -7] \cup [7; +\infty\rangle$

Atención, f no tiene máximo valor. A lo mucho podemos hablar de máximo relativo que es -7.

$\Rightarrow$ I es falso

II. El periodo mínimo de f es:

$T = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow T = 2$

$\Rightarrow$ II es verdadero

III. Como las asíntotas pasan por los puntos de discontinuidad de f, en consecuencia, basta con resolver: $\pi x + 1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = k - \frac{1}{\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

que constituye un conjunto de asíntotas verticales.

$\Rightarrow$ III es verdadero

$\therefore$ FVV

47. Halle todos los valores de x donde intersecta al eje x la gráfica de la función f:

$$f(x) = \frac{1}{\text{versx}} - \frac{1}{\text{covx}} \quad x \in \mathbb{Z}$$

Resolución:

Los valores de las abscisas x donde la gráfica de f intersecta al eje x se hallan resolviendo la ecuación: $f(x) = 0$

$\frac{1}{\text{versx}} - \frac{1}{\text{covx}} = 0$

$\text{versx} = \text{covx}$

$1 - \cos x = 1 - \text{sen}x$

$\text{sen}x - \cos x = 0$

$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

48. Sean las funciones f y g definidas por $f(x) = |x\sec x|$ y $g(x) = \text{sen}\sqrt{x^2 - 1}$, halle Domg + Ranf.

Resolución:

- $f(x) = |\sec x - 1|$

  se sabe que $\forall x \in D_f$:

  $\sec x \leq -1 \ \vee \ \sec x \geq 1$

  (-1): $\sec x - 1 \leq -2 \ \vee \ \sec x - 1 \geq 0$

  Atención: $\underbrace{|\sec x - 1|}_{f(x)} \geq 0$

  $\Rightarrow \text{Ranf} = [0; +\infty\rangle$ ...(I)

- $g(x) = \text{sen}\sqrt{x^2 - 1}$

  g está definida siempre que:

  $x^2 - 1 \geq 0$

  $x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$

  Dicho de otra forma:

  $x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1$

  $\Rightarrow \text{Domg} = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$ ...(II)

De (I) y (II): $\text{Domg} \cap \text{Ranf} = [1; +\infty\rangle$

49. Sea la función trigonométrica

$f(x) = \left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|$

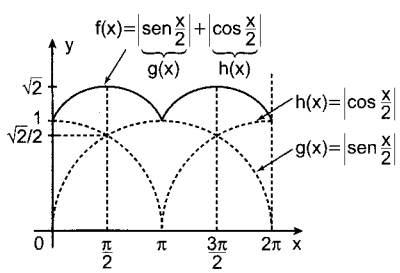
su periodo y rango serán respectivamente.

Resolución:

En f:

$$f(x) = \underbrace{\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right|}_{g(x)} + \underbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}_{h(x)}$$

Graficando g y h, luego por suma de funciones obtenemos la gráfica de f.



Se observa:

$T = \pi$ y $\text{Ranf} \in [1; \sqrt{2}]$

50. Si $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ determine el dominio de la función f cuya regla de correspondencia es:

$f(x) = \sqrt{1 - \tan^2 x} + \sqrt{\text{cov}(x) - 1} + \sqrt{\text{vers}(x) + 1}$

Resolución:

f equivale a: $f(x) = \sqrt{1 - \tan^2 x} + \sqrt{-\text{sen}} + \sqrt{2 - \cos x}$

f está definida a condición de que:

$1 - \tan^2 x \geq 0 \ \wedge \ -\text{sen}x \geq 0$

(no hay necesidad de considerar $2 - \cos x \geq 0$, pues esta se cumple siempre $\forall x \in \mathbb{R}$)

$1 \geq \tan^2 x \ \wedge \ \text{sen}x \leq 0$

$1 \geq |\tan x| \geq 0 \ \wedge \ \text{sen}x \leq 0$

Por dato $x \in \left\langle \frac{\pi}{x}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ y como $\text{sen}x \leq 0$ se concluye que: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right]$

Luego: $1 \geq |\tan x| \geq 0 \ \wedge \ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$$1 \geq -\tan x \geq 0 \ \wedge \ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

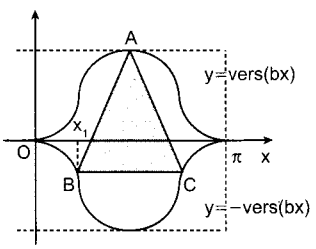
$$-1 \leq \tan x \leq 0 \ \wedge \ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan x \leq \tan 0$$

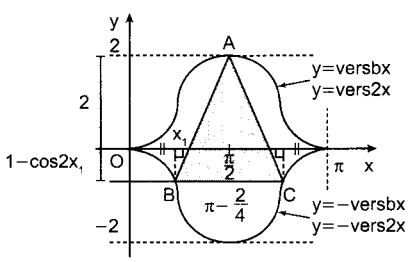
Dado que la función tangente es creciente en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right]$ concluimos: $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0$

$\therefore$ Domf $= \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$

51. En el gráfico mostrado, el área de la región triangular sombreada es $7\pi/12$, siendo $\overline{BC}$ paralelo al eje x. Calcule $N = \operatorname{sen}x_1 \operatorname{sen}2x_1 \cos 4x_1$.



Resolución:



El periodo de y = vers(bx) está dado por: $T = \frac{2\pi}{b}$

Según la gráfica dicho periodo es: $T = \pi$

Luego: $\frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$

El punto más alto A tiene por ordenada:

$y = \text{vers}2\frac{\pi}{2} = \text{vers}\pi$

$y = 1 - \cos\pi = 1 - (-1) \Rightarrow y = 2$

El área de la región sombreada es:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(\pi - 2x_1)(2 + 1 - \cos 2x_1)}{2} = \frac{7\pi}{12}$$

$$(\pi - 2x_1)(3 - \cos 2x_1) = \frac{7\pi}{6}$$

de donde obtenemos: $x_1 = \frac{\pi}{3}$

Nos piden:

$N = \operatorname{sen}x_1 \operatorname{sen}2x_1 \cos 4x_1$

$$N = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \cos\frac{4\pi}{3}$$

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore N = -\frac{3}{8}$$

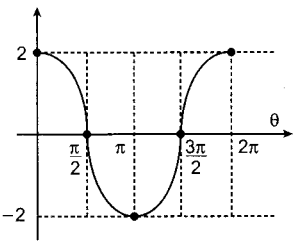
52. Determine el dominio y rango de la función f, definida por $f(\theta) = \dfrac{\cos\theta\tan\theta + \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$ sabiendo que θ está en $[0; 2\pi]$

Resolución:

$$f(\theta) = \frac{\cos\theta\tan\theta}{\tan\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$$

$\tan\theta \neq 0 \Rightarrow \theta \neq 0; \pi; 2\pi$

Por definición: $\theta \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$



$$\text{Domf} = \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$$

Ranf $= \langle -2; 2\rangle - \{0\}$

53. Halle el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f, cuya regla de correspondencia es $f(x) = \dfrac{\text{vers}(2\pi x)}{\text{cov}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Resolución:

f equivale a: $f(x) = \dfrac{\text{vers}(2\pi x)}{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0}$

Los puntos de discontinuidad D de f se logran resolviendo la ecuación:

$$1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4k + 1$$

$\therefore D = \{4k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$

54. Para la función f:

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}x - \cos x}{\operatorname{sen}x + \cos x}$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, halle su rango.

Resolución:

f equivale a:

$$f(x) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos x}} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

$$f(x) = \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}}$$

$$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

Si: $-\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}$, entonces restando $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$:

$-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} \leq 0$

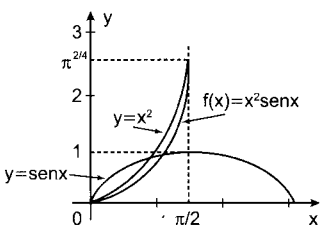
Como la función tangente es creciente en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right]$ se cumple:

$\underbrace{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{f(x)} \leq \underbrace{\tan 0}_{\leq 0}$ $\therefore$ Ranf = $\langle -\infty; 0]$

55. Halle el rango de la función f definida por $f(x) = x^2 \text{sen}x$, $0 \leq x \leq \pi/2$

Resolución:

Cuando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ las funciones $y = x^2$, $y = \text{sen}x$, son unilaterales y crecientes como se muestra en la gráfica.



Por lo tanto podemos efectuar la multiplicación de (I) y (II)

$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$ ...(I)

$0 \leq \text{sen}x \leq 1$ ...(II)

(I) × (II): $0 \leq x^2 \text{sen}x \leq \frac{\pi^2}{4}$ $\therefore$ $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi^2}{4}$

56. Determine el rango de la función f definida por $f(x) = \cos x - x^2$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

Resolución:

$f(x) = \cos x - x^2$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

Notemos que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ la función f es par. Luego, para hallar su rango bastaría con tomar $x \in [0; +\infty\rangle$. Pero, el problema se tiene que: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ en consecuencia, para hallar el rango de f basta con evaluar en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, porque $f\left(\left\langle -\frac{\pi}{3}; 0\right\rangle\right) \subset f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Ahora analicemos cada sumando de f para $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

I. Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos 0 \geq \cos x \geq \cos\frac{\pi}{2}$

$1 \geq \cos x \geq 0$ ...(I)

II. Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$

$\Rightarrow 0 \geq -x^2 \geq \frac{\pi^2}{4}$ ...(II)

(I) + (II): $1 \geq \underbrace{\cos x - x^2}_{f(x)} \geq -\frac{\pi^2}{4}$

$\therefore$ Ranf = $\left[-\frac{\pi^2}{4}; 1\right]$

57. Determine el número de puntos de discontinuidad en $[0; \pi]$ de la función f.

si: $f(x) = \frac{\text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

Resolución:

Los puntos de discontinuidad se hallan resolviendo:

$\underbrace{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}_{2\cos 3x \cos 2x} = 0$, $x \in [0; \pi]$

$2\cos 3x\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0$, $x \in [0; \pi]$

I. $\cos 3x = 0$, $x \in [0; \pi]$

$3x = \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$ $\Rightarrow$ 3 puntos

II. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $x \in [0; \pi]$

$2x = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ 2 puntos

Por lo tanto, total de puntos de discontinuidad: 5

58. Indique la verdad o falsedad de las proposiciones, si f es una función definida por $f(x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} + \pi$, $x \in \mathbb{R}$

I. El periodo de f es π

II. f es una función par en su dominio

III. f es creciente en el intervalo $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

Resolución:

$f(x) = \underbrace{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}}_{\cos^2 x} + \pi$, $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = |\cos x| + \pi$

$f(x) = |\cos 1(x)| + \pi$

I. El periodo de f es: $T = \frac{\pi}{1}$ $\Rightarrow$ $T = \pi$

II. f es una función par en $\mathbb{R}$, pues

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = |\cos(-x)| + \pi$
  $f(-x) = |\cos x| + \pi$
  $f(-x) = f(x)$

III. Tenemos $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

En el IIIC el coseno es creciente, Luego:

$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow -1 < \cos x_1 < \cos x_2 < 0$

Observar: $1 > |\cos x_1| > |\cos x_2| > 0$

$$\underbrace{|\cos x_1|\ \pi}_{f(x_1)} > \underbrace{|\cos x_2| + \pi}_{f(x_2)}$$

Hemos demostrado que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

En otras palabras: f es decreciente en $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

$\therefore$ VVF

59. Si f es una función definida por lo siguiente: $f(x) = |\cos(x)| + |\text{sen}(2x)|$, $x \in \mathbb{R}$, hallar el periodo mínimo de la función f.

Resolución:

$f(x) = \underbrace{|\cos x|}_{g(x)} + \underbrace{|\text{sen}2x|}_{h(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

El periodo mínimo de f es el mínimo común múltiplo de los periodos de g y h:

- $T_g = \frac{\pi}{1} = \pi \Rightarrow \pi, 2\pi, \ldots$
- $T_h = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi, \frac{3\pi}{2}$

$\therefore T_f = \pi$

60. Se tiene f que es una función definida por $f(x) = \text{sen}(x + \pi) - \cos(2x)$; $x \in [0; 3\pi]$, halle el número de puntos de intersección de la gráfica de f en el eje.

Resolución:

Las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x se obtienen resolviendo la ecuación:

$f(x) = 0$, $x \in [0; 3\pi]$

$\text{sen}(x + \pi) - \cos 2x = 0$, $x \in [0; 3\pi]$

$-\text{sen}x - (1 - 2\text{sen}^2x) = 0$

$2\text{sen}^2x - \text{sen}x - 1 = 0$

$2\text{sen}x \quad 1 \Rightarrow \text{sen}x = -\frac{1}{2}$

$\text{sen}x \quad -1 \Rightarrow \text{sen}x = 1$

Tenemos dos casos:

- $\text{sen}x = -\frac{1}{2}$; $x \in [0; 3\pi]$

  $x = \pi + \frac{\pi}{6}$; $x = 2\pi - \frac{\pi}{6}$
- $\text{sen}x = 1$, $x \in [0; 3\pi]$

  $x = \frac{\pi}{2}$; $x = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto, el número de puntos de intersección: 4

61. Sea f una función cuya regla de correspondencia está dada por $f(x) = 2\text{sen}^2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, si $0 \le ||x| - \pi| < \frac{\pi}{2}$. Halle el rango de f.

Resolución:

Se sabe que: $\text{sen}(\pm x) = \pm \text{sen}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

y como $|x| = \pm x$, entonces: $\text{sen}|x| = \pm \text{sen}x$

Elevando al cuadrado se obtiene:

$\text{sen}^2|x| = \text{sen}^2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Luego, la función f equivale a:

$f(x) = 2\text{sen}^2|x| + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Observemos que: $\text{sen}^2\theta = \text{sen}^2(\theta - \pi) = \text{sen}^2|\theta - \pi|$

$\Rightarrow f(x) = 2\text{sen}^2|\underbrace{|x| - \pi|}_{\alpha} + 1$

$f(x) = 2\text{sen}^2\alpha + 1$

Dato: $0 \le |\underbrace{|x| - \pi|}_{\alpha} < \frac{\pi}{2}$

es obvio que: $0 \le \text{sen}\alpha < 1$

$0 \le \text{sen}^2\alpha < 1$

$0 \le 2\text{sen}^2\alpha < 2$

$1 \le \underbrace{2\text{sen}^2\alpha + 1}_{f(x)} < 3$

$\therefore$ Ranf $= [1; 3\rangle$

62. Si $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right]$, halle el rango de la función f definida por: $f(x) = 7\text{sen}x + 3\cos 2$, $x \in \mathbb{R}$

Resolución:

$f(x) = 7\text{sen}x + 3\cos 2x$, $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right]$

Analicemos cada sumando:

- Si $\pi < x \le \frac{3\pi}{2}$

  $\Rightarrow -1 \le \text{sen}x < 0$

  $-7 \le 7\text{sen}x < 0$ ...(I)
- Si $\pi < x \le \frac{3\pi}{2}$

  $\Rightarrow -2\pi < 2x \le 3\pi$

  $\Rightarrow -1 \times \cos 2x < 1$

  $-3 \le 3\cos 2x < 3$ ...(II)

(I) + (II):

$-10 \le \underbrace{7\text{sen}x + 3\cos 2x}_{f(x)} < 3$

$\therefore$ Ranf $= [-10; 3\rangle$

63. Dada la función f, definida por:

$$f(x) = \sqrt{\cot x - 1} + \sqrt{1 - \cot x} + 2|\text{sen}x|$$

halle el rango de f.

Resolución:

$f(x) = \sqrt{\cot x - 1} + \sqrt{1 - \cot x} + 2|\text{sen}x|$

f está definida siempre que:

$\cot x - 1 \ge 0 \ \wedge\ 1 - \cot x \ge 0$

$\cot x \ge 1 \ \wedge\ 1 \ge \cot x$

De donde: $\cot x = 1$ ...(I)

Notemos que: $\csc^2x = 1 + \cot^2x$

$\csc^2x = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow |\csc x| = \sqrt{2} \Rightarrow |\text{sen}x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ...(II)

Reemplacemos (I) y (II) en f(x):

$f(x) = \sqrt{0} + \sqrt{0} + 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}$

$\therefore$ Ranf $= \{\sqrt{2}\}$

64. Halle el rango de la función f definida por:

$$f(x) = \frac{|\sec x| - \sec^2x}{|\sec x| - 1}$$

Resolución:

f equivale a: $f(x) = \dfrac{|\sec| - |\sec x|^2}{|\sec x| - 1}$, $|\sec x| \neq 1$

$$f(x) = \frac{-|\sec x|(|\sec x| - 1)}{|\sec x| - 1}$$

$$f(x) = -|\sec x|,\ |\sec x| \neq 1$$

En general se cumple que: $|\sec x| \geq 1$

Pero como $|\sec x| \neq 1$, entonces:

$$|\sec x| > 1 \Rightarrow \underbrace{-|\sec x|}_{f(x)} < -1$$

$\therefore$ Ranf = $\langle -\infty; -1\rangle$

65. Determine el rango de la función f, si su regla de correspondencia es: $f(x) = \dfrac{\cot\frac{x}{2}\sec x}{\csc x + 2\csc 2x}$

Resolución:

$$f(x) = \frac{\cot\frac{x}{2}\sec x}{\csc x + 2\csc 2x};\ x \in D_f$$

$$f(x) = \frac{(\csc x + \cot x)\sec x}{\csc x + 2\csc 2x}$$

$$f(x) = \frac{\csc x\sec x + \cot x\sec x}{\csc x + 2\csc 2x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\csc x + 2\csc 2x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{2}{2\operatorname{sen}x\cos x} + \frac{1}{\operatorname{sen}x}}{\csc x + 2\csc 2x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{2}{\operatorname{sen}2x} + \csc x}{\csc x + 2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}2x}\right)};\ x \in D_f$$

$f(x) = 1,\ \forall\, x \in$ Domf $\quad\therefore$ Ranf = $\{1\}$

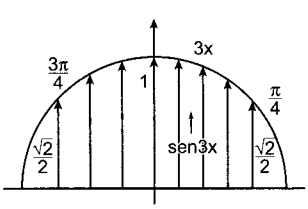
66. Sea f la función definida por $f(x) = \csc(3x)$; si Domf = $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right]$, calcular Ranf.

Resolución:

$f(x) = \csc(3x),\ x \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right]$

Si $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq 3x \leq \frac{3\pi}{4}$

Analicemos en la C. T.:



$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \operatorname{sen}3x \leq 1$$

Invirtiendo se obtiene: $\dfrac{2}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{1}{\operatorname{sen}3x} \geq 1$

$$\sqrt{2} \geq \underbrace{\csc 3x}_{f(x)} \geq 1$$

$\therefore$ Ranf = $[1; \sqrt{2}]$

67. Halle el dominio de la función f definida por: $f(x) = \tan(2x) + \cot(2x) + \sec(4x)$.
Dar como respuesta el complemento del dominio de f.

Resolución:

$f(x) = \tan(2x) + \cot(2x) + \sec(4x)$

f está definida siempre que:

$2x \neq n\frac{\pi}{2} \ \wedge\ 4x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$x \neq n\frac{\pi}{4} \ \wedge\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{8}$

$x \neq (2n)\frac{\pi}{8} \ \wedge\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{8}$

Lo que se resume en $x \neq K\frac{\pi}{8};\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Domf $= \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{8}\right\};\ k \in \mathbb{Z} \quad\therefore$ Domf$_f^c = \left\{\frac{k\pi}{8}\right\};\ k \in \mathbb{Z}$

68. Determine los puntos de discontinuidad de la función definida por $f(x) = \dfrac{2005}{|\sec x| - |\csc x|}$

Resolución:

$$f(x) = \frac{2005}{|\sec x| - |\csc x|} = 0$$

- $|\sec x|$ arroja los puntos de discontinuidad:
  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ...(α)
- $|\csc x|$ arroja los puntos de discontinuidad:
  $x = n\pi$ ...(β)
- El denominador de f nos da los siguientes puntos de discontinuidad:
  $|\sec x| - |\csc x| = 0$
  $|\sec x| = |\csc x|$
  Lo que equivale a decir
  $|\cos x| = |\operatorname{sen}x|$
  $\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$
  $\underbrace{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}_{\cos 2x} = 0$
  $2x = (2m+1)\pi/2$
  $x = (2m+1)\pi/4$ ...(γ)

Todos los puntos de discontinuidad se obtienen haciendo (α) $\cup$ (β) $\cup$ (θ)

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \ \vee\ x = n\pi \quad \vee\ x = (2m+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\underbrace{x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \ \vee\ x = (2n)\frac{\pi}{2}} \ \vee\ x = (2m+1)\frac{\pi}{4}$$

$$x = m\frac{\pi}{2} \quad \vee\ x = (2m+1)\frac{\pi}{4}$$

$$x = (2m)\frac{\pi}{4} \quad \vee\ x = (2m+1)\frac{\pi}{4}$$

Lo cual se resume en: $x = k\frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

69. Halle el rango de la función f definida por: $f(x) = (\text{senx} - \text{cscx})(\text{cosx} - \text{secx})$

Resolución:

f equivale a:

$$f(x) = \left(\text{senx} - \frac{1}{\text{senx}}\right)\left(\text{cosx} - \frac{1}{\text{cosx}}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{\text{sen}^2x - 1}{\text{senx}}\right)\left(\frac{\cos^2x - 1}{\text{cosx}}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{1 - \text{sen}^2x}{\text{senx}}\right)\left(\frac{1 - \cos^2x}{\text{cosx}}\right) = \frac{\cos^2x}{\text{senx}}\left(\frac{\text{sen}^2x}{\text{cosx}}\right)$$

Notemos que f está definida a condición de que $\text{senx} \neq 0 \wedge \text{cosx} \neq 0$

es decir, siempre que: $x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Continuemos simplificando:

$f(x) = \text{cosxsenx},\ x \neq \frac{k\pi}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}2x,\ 2x \neq k\pi$

Se sabe que:

$-1 \leq \text{sen}2x \leq 1$, pero $\underbrace{2x \neq k\pi}_{\text{equivale a decir: sen}2x \neq 0}$

$\Rightarrow -1 \leq \text{sen}2x \leq 1,\ \text{sen}2x \neq 0$

$(\div 2)$: $-\frac{1}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\text{sen}2x}_{f(x)} \leq \frac{1}{2},\ \underbrace{\frac{1}{2}\text{sen}2x}_{f(x)} \neq 0$

$\therefore$ Ranf $= \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] - \{0\}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

Si $x \in \left\langle \pi, \frac{5\pi}{4} \right\rangle$, determine el rango de la función

$$f(x) = \sqrt{1 + 2|\text{senx}|\text{cosx}}$$

A) $\left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ B) $\langle 0,1 \rangle$ C) $\langle 0, \sqrt{2} \rangle$

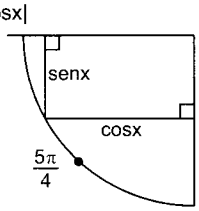
D) $\langle 0, \sqrt{3} \rangle$ E) $\langle 0, \sqrt{2} + 1 \rangle$

Resolución:

Dado: $\pi < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow |\text{senx}| = -\text{senx}$

$f(x) = \sqrt{1 - 2\text{senxcosx}}$

$f(x) = |\text{senx} - \text{cosx}|$



$f(x) = \text{senx} - \text{cosx}$

$f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Como: $\frac{3\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \pi$

$0 < \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 < \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$

$\therefore$ Ranf $= \langle 0; 1 \rangle$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Determine el período de la función:

$$f(x) = |\cos^4x - \text{sen}^4x|$$

A) $\pi/16$ B) $\pi/8$ C) $\pi/4$

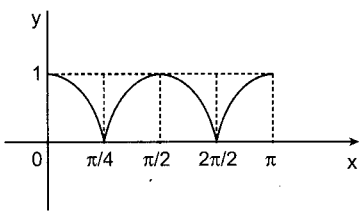
D) $\pi/2$ E) $3\pi/8$

Resolución:

$f_{(x)} = |\underbrace{(\cos^2x + \text{sen}^2x)}_{1}(\cos^2x - \text{sen}^2x)|$

$f_{(x)} = |\cos2x|$

Graficando:



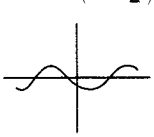
$\therefore$ Período: $T = \frac{\pi}{2}$

Clave: D

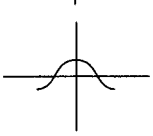
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

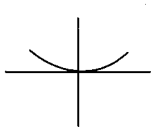
¿Cuál de los gráficos mostrados representa mejor a la función?

$y = \text{cosx} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

A) 

B)

C) 

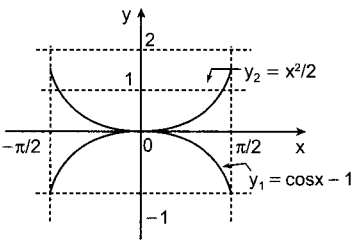
D) 

E)

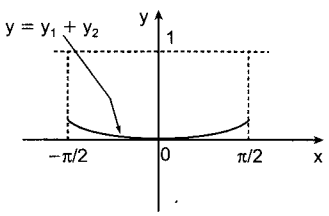
Resolución:

Sea: $y = \underbrace{\cos x - 1}_{y_1} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{y_2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Graficando



Sumando funciones:



Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

Sean f(x) = sen(x/2), g(x) = sen(2x), para

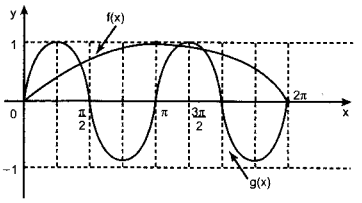
$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

Entonces podemos afirmar que:

A) $f(x) > g(x)$ B) $f(x) \geq g(x)$
C) $f(x) < g(x)$ D) $f(x) \leq g(x)$
E) $f(x) \leq g(x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y $g(x) < f(x)$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Resolución:

f(x) = sen(x/2); T = 4π
g(x) = sen2x; T = π



Como: $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Se obtiene: $f(x) \geq g(x)$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

En la función: $y(t) = 2\cos 2t + 4\sqrt{2}\,\text{sen}2t$; la amplitud y el período son respectivamente:

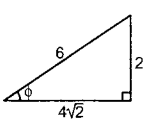
A) $4\sqrt{2}$ y π B) $4\sqrt{2}$ y 2π C) 6 y π
D) 6 y 2π E) $2 + 4\sqrt{2}$ y π

Resolución:

$y(t) = 2\cos 2t + 4\sqrt{2}\,\text{sen}2t$

$y(t) = 6\left(\frac{2}{6}\cos 2t + \frac{4\sqrt{2}}{6}\text{sen}2t\right)$

Como:



$y(t) = 6\text{sen}(2t + \phi)$

∴ Amplitud = 6

∴ Período $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dada la función: $y = f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

señalar lo correcto:

A) $f(1) > f(2)$
B) Su máximo valor es $\sqrt{2}$
C) Su mínimo valor es 0
D) En $\left\langle \frac{\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$ es continua
E) En $\langle \pi ; 2\pi \rangle$ es inyectiva.

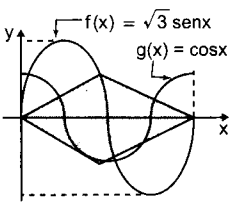
2. Dada la función: $y = f(x) = x[\operatorname{sen} x]$
Señalar lo correcto:
I. $f(3) > f(4)$
II. En $\langle 0; \pi \rangle$ es continua
III. En $\langle -\pi ; 0 \rangle$ es decreciente

A) solo I B) solo II C) II y III
D) todas E) I y III

3. Señalar Verdadero (V) o Falso (F), según corresponda en:
I. El periodo principal de:
$y = f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{1+\cos 2x}$ es π
II. El periodo principal de:
$y = g(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(|\operatorname{sen} 2x|)}{1-\cos 4x}$ es $\dfrac{\pi}{2}$
III. El periodo principal de:
$y = h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{1-\operatorname{sen} 4x}$ es $\dfrac{\pi}{4}$

A) VVF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FVF

4. Señalar el área máxima de la región sombreada:



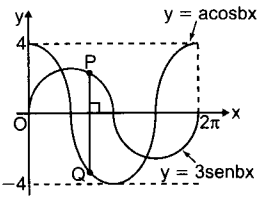
A) π B) 2π C) $2\pi/3$
D) $3\pi/2$ E) 4π

5. Hallar el rango de: $f(x) = |\cot x| \operatorname{sen} x$

A) $\langle -1; 1 \rangle$ B) $[-1; 1]$
C) $\langle -1; 1]$ D) $[-1 ; 1]$
E) $\mathbb{R} - \langle -1 ; 1 \rangle$

6. Señalar el máximo valor que adopta el segmento PQ.

A) 3
B) 4
C) 5
D) $2\sqrt{10}$
E) $2\sqrt{7}$

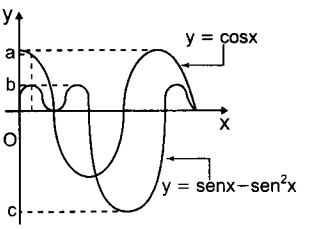


7. Se define la función:
$F(x) = \sqrt{\cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 x} + \sqrt{\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 x}$
Hallar el rango de F

A) $\left[\sqrt{2+\frac{\sqrt{7}}{2}}; \sqrt{2+2\sqrt{2}}\right]$ B) $[\sqrt{2-\sqrt{2}}; \sqrt{2+\sqrt{2}}]$
C) $[0; 2]$ D) $[1; 2]$
E) $[\sqrt{2}; 2]$

8. Del gráfico, calcular: abc

A) $-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$
B) $-\dfrac{1}{2}$
C) $-\dfrac{1}{4}$
D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
E) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$



9. La gráfica de: $f(x) = 3\operatorname{sen} x$, intersecta a la de:
$g(x) = \operatorname{sen} 2x(\sqrt{1+\cot^2 x} + \sqrt{1+\tan^2 x})$
en los puntos A y B, mientras que la de:
$h(x) = 3\cos x$ intersecta a $g(x)$ en C y D.
Calcular la suma de abscisas de estos puntos en $\langle 0; 2\pi \rangle$

A) 2π B) 3π C) 4π D) $5\pi/2$ E) $3\pi/2$

10. Señalar el rango de la función:
$f(x) = \dfrac{\tan x}{\csc 10° \csc 70°} + \dfrac{2\cot x}{\csc 50°}$

A) $[-1; 1]$ B) $\mathbb{R} - \langle -2; 2 \rangle$ C) $\mathbb{R}$
D) $-2 ; 2$ E) $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

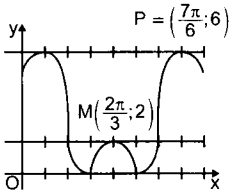
11. Hallar el rango de la función f cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \dfrac{\cot^2 x - \cot x + 2}{2\cot^2 x - 3}$

A) $\left[\frac{\sqrt{43}}{12}; +\infty\right\rangle$
B) $\left\langle -\infty; \frac{-\sqrt{43}-1}{12}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{43}}{12}; +\infty\right\rangle$
C) $\left\langle -\infty; \frac{-\sqrt{43}-1}{12}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{43}-1}{12}; +\infty\right\rangle - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
D) $\left\langle -\infty; \frac{-\sqrt{3}}{12}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{12}; +\infty\right\rangle$
E) $\left[\frac{\sqrt{43}}{6}; +\infty\right\rangle$

12. Determinar el mayor valor que toma la función:
$f(x) = \cos 2x + 3\operatorname{sen}2x + 2$

A) $2 + \sqrt{10}$ B) 6 C) $3 + \sqrt{10}$
D) $1 + \sqrt{10}$ E) 5

13. Hallar la regla de correspondencia de la gráfica mostrada.



A) $y = 4\left|\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\right|$

B) $y = 4\left|\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\right|$

C) $y = 4\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + 2\right|$

D) $y = 4\left|\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right|$

E) $y = 4\left|\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right|$

14. Hallar el valor de: $S = f_{máx} - f_{min}$
si: $f(x) = 2\cos x(\cos x - \operatorname{sen}x) - 1$; $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8}\right]$

A) $-2\sqrt{2}$ B) -1 C) 2
D) $2\sqrt{2}$ E) 1

15. Siendo T_1 y T_2 los periodos de f(x) y g(x) respectivamente, donde:
$f(x) = \tan 2x - 4\tan 3x \wedge g(x) = \operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen}2x)$
Calcular. $T_2 - T_1$

A) $\pi/2$ B) 0 C) $-\pi$
D) $-\pi/2$ E) $\pi/4$

16. Hallar el período de R(x) cuya regla de correspondencia es:
$R(x) = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}5x...\operatorname{sen}2003x$

A) $\pi/2003$ B) $2\pi/2003$ C) π
D) 2π E) $\pi/2002$

17. Si: $P(x_1; y_1)$; $Q(x_2; y_2)$ son los puntos que pertenecen a la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x}{|x|} + \cos\left(\frac{x^2}{|x|}\right)$
tal que y_1 e y_2 son mínimos en los intervalos $\langle -2\pi; 0\rangle \wedge \langle 0; 2\pi\rangle$ respectivamente, hallar la distancia del punto P al punto Q.

A) 4π B) $\sqrt{2\pi^2 + 1}$ C) $\sqrt{\pi^2 + 1}$
D) $2\pi - 1$ E) $2\sqrt{\pi^2 + 1}$

18. Hallar las coordenadas del punto w a partir del gráfico adjunto

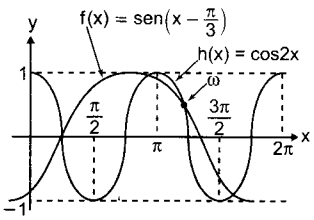
A) $\left(\frac{1}{2}; \frac{7\pi}{6}\right)$

B) $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

C) $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D) $\left(\frac{29\pi}{18}; \frac{1}{2}\right)$

E) $\left(\frac{11\pi}{12}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



19. Hallar el rango de la función f, cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \operatorname{vers}2x\operatorname{cov}2x$

A) $[0; \sqrt{2}]$ B) $\left[\frac{3}{8}; \frac{3 + \sqrt{2}}{8}\right]$ C) $\left[\frac{3}{8}; \frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right]$
D) $\left[0; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right]$ E) $\left[\sqrt{2}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right]$

20. Determinar el rango de la siguiente función:

$$P(x) = \frac{\operatorname{sen}^5 x + \cos^5 x}{\operatorname{sen}x + \cos x}$$

A) $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$ B) $\left\langle\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$ C) $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right\rangle$
D) $\left\langle\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right\rangle$ E) $\left[0; \frac{5}{4}\right]$

21. Determinar los puntos de discontinuidad y el rango de la función N, definida por la regla de correspondencia: $N(x) = \frac{\operatorname{sen}^6|x| + \cos^6|x|}{\cos^4 2|x| - \operatorname{sen}^4 2|x|}; k \in \mathbb{Z}$

A) $x = (4k + 1)\frac{\pi}{16}$; $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\langle -\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right\rangle$

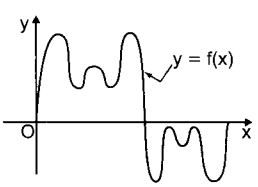
B) $x = (4k + 3)\frac{\pi}{8}$; $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\langle 0; \frac{1}{8}\right\rangle$

C) $x = (k - 1)\frac{\pi}{8}$; $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\rangle$

D) $x = \frac{k\pi}{16}$; $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\langle -\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right\rangle$

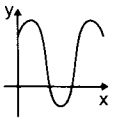
E) $x = (2k - 1)\frac{\pi}{8}$; $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\langle -\frac{1}{4}; 1\right\rangle$

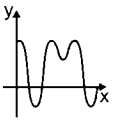
22. En la gráfica mostrada determinar: f(x)

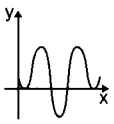


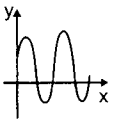
A) $f(x) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}5x$
B) $f(x) = \operatorname{sen}x + 3\operatorname{sen}3x + 5\operatorname{sen}5x$
C) $f(x) = \operatorname{sen}x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}5x$
D) $f(x) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\frac{x}{3} + \operatorname{sen}\frac{x}{5}$
E) $f(x) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x$

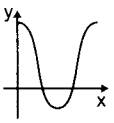
23. Graficar: $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$

A) 

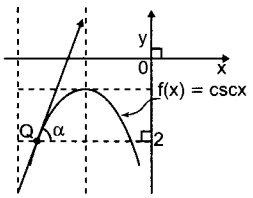
B) 

C) 

D) 

E) 

24. Del gráfico adjunto, Q es punto de tangencia, hallar α.

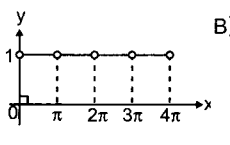


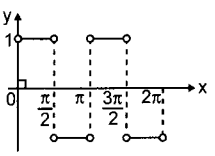
A) $\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ B) $\arctan(2\sqrt{3})$

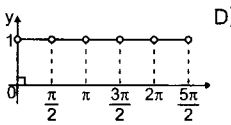
C) $\text{arcos}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ D) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

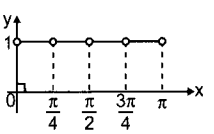
E) $\frac{\pi}{3}$

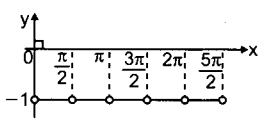
25. Graficar la siguiente función cuya regla de correspondencia es: $P(x) = \dfrac{\csc x + 2\csc 2x}{\sec x \cot \frac{x}{2}}$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

26. Dada la función:

$$y = h(x) = \frac{\text{sen}x|\text{sen}x| + \cos x|\cos x|}{\cos 2x}$$

Señalar verdadero (v) o falso (F), según corresponda:

I. Ran(h): $\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

II. Su periodo es 2π

III. En $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$ es continua

IV. La gráfica de $g(x) = 2\cos x$, intersecta a la gráfica de h en 4 puntos; en $\langle 0; 2\pi\rangle$

A) VVVF B) VVFF C) VVFV
D) FVFV E) VVVV

27. Dadas las funciones:
$f(x) = \text{sen}2x|\text{sen}x| + \cos 2x|\cos x|$
$g(x) = \text{sen}x$
Se afirma:

I. En $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, sus gráficas se intersectan en 1 punto.

II. En $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, sus gráficas se intersectan en 1 punto.

III. En $\left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$, sus gráficas se intersectan en 2 puntos.

IV. El período principal de f es π.

¿Cuántas son verdaderas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) Todas E) Ninguna

28. Sea:
$f(x) = \sqrt[4]{\text{sen}x - \cos x}$
$g(x) = \sqrt[3]{\log(\text{sen}x) + \log(\cos x)}$
Hallar el dominio de la función h definida por:
$h(x) = (f \,.\, g)(x)$ en el recorrido de $\left\langle 0; \frac{13\pi}{4} \right\rangle$

A) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right]$

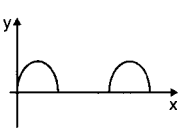
C) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right\rangle$ D) $\left[\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right\rangle \cup \left[\frac{9\pi}{4}; 3\pi\right\rangle$

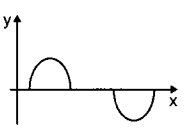
E) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right] \cup \left\langle \frac{5\pi}{2}; \frac{13\pi}{4}\right\rangle$

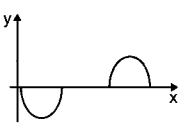
29. Calcular la suma de los valores mínimo, de las funciones f y g, si:
$f(x) = \cos^2 x + \cos|x| \wedge g(x) = \text{sen}^2 x - \text{sen}|x|$

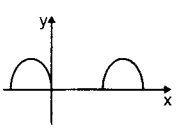
A) -1 B) $-1/2$ C) $-1/4$ D) $-1/3$ E) $-1/6$

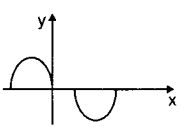
30. Dada la función: $g(x) = \text{sen}x\,(\cos x + |\cos x|)$ señalar su gráfico.

A) 

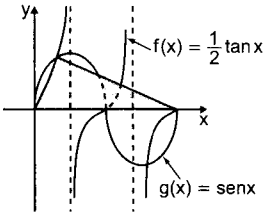
B) 

C) 

D) 

E) 

31. Del gráfico, hallar el área de la región sombreada:



A) $\sqrt{3}\pi$ B) $2\sqrt{3}\pi$ C) $\sqrt{3}/2\pi$
D) 3π E) 4π

32. Calcular el área de la región triangular determinada por la intersección de la onda senoidal de la ecuación: $y = 2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

con el eje positivo de x (los dos primeros puntos) y el eje de ordenadas.

A) $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{4}$ B) $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{6}$ C) $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{8}$

D) $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{9}$ E) $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{10}$

33. Con respecto a la función:

$$f(x) = \sqrt{(1 - \text{sen}x)(1 - \cos x)}$$

¿qué alternativa es correcta?

A) En $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ es decreciente.

B) En $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\rangle$ es creciente.

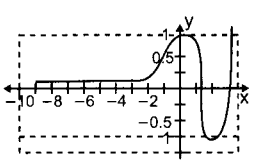
C) En $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ es creciente

D) En $x \in \left\langle -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\rangle$ es decreciente

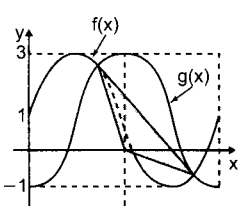
E) Es función par.

34. Acerca de la función: $g(x) = \text{sen}(2^x)$
Señalar la proposición correcta:
I. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$
II. $\text{Ran}(g) = [-1; 1]$
III. Su gráfica es:

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) todas



35. Del gráfico, calcular el área de la región sombreada: (f(x) y g(x) son senoides)



A) $\frac{\pi}{32}(\sqrt{2}+1)$ B) $\frac{\pi}{64}(4+\sqrt{2})$ C) $\frac{\pi}{16}(2+\sqrt{2})$

D) $\frac{\pi}{32}(2+\sqrt{2})$ E) $\frac{\pi}{16}(1+\sqrt{2})$

36. Dada la función:
$g(x) = \text{sen}2x\cos x$
señalar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:
I. $\text{Ran}(g) = [-1; 1]$
II. Su periodo principal es 2π
III. En $\left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\rangle$ es inyectiva.

A) VFV B) VVV C) VFF
D) FFV E) VVF

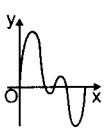
37. Acerca de la función:
$f(x) = \text{sen}^5x + \text{sen}^4x$
podemos afirmar que:
I. $\text{Ran}(f) = [0 ; 2]$
II. Es decreciente en $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$
III. $f(x) > 0 ; \forall x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$
IV. Es creciente en $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$
Señalar cuáles son verdaderas:

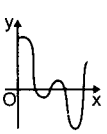
A) todas B) I, II y III C) I y II
D) III y IV E) sólo IV

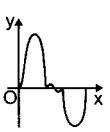
38. Dadas las funciones:
$f(x) = \text{sen}\frac{3}{2}x + \cos x + \tan\frac{x}{2}$
$g(x) = 3\tan^5 2x + 1$
$h(x) = |\cos 2x| + |\text{sen}2x|$
Hallar la suma de sus periodos

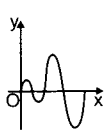
A) $\frac{17\pi}{4}$ B) $19\pi/4$ C) 6π
D) $23\pi/4$ E) 5π

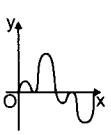
39. Graficar aproximadamente: $h(x) = \text{sen}x + \text{sen}2x$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

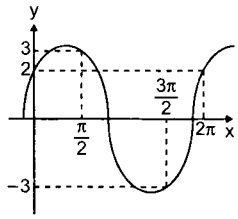
40. Se define la función:

$$F(x) = \frac{\cot^2 x + \cot x + 4}{\cot x + 1}$$

Hallar: Ran(F)

A) $\langle -\infty; -5] \cup [3; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; -3] \cup [5; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; 3] \cup [5; +\infty\rangle$ D) $\langle 3; 5\rangle$
E) $\langle -3; 5\rangle$

41. Determinar la correspondencia del siguiente gráfico en el intervalo $[0; 2\pi]$

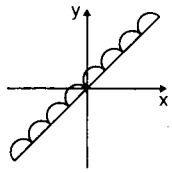


A) senx + 2cosx B) 4cosx + 3senx
C) 2(senx + cosx) D) 3senx + 2cosx
E) 3(senx + cosx)

42. Si: $f(x) = \cos(\pi\cos x)$ es de periodo T_1 y $g(x) = \text{sen}^4 x$ es de periodo T_2, calcular el valor de $T_1 + T_2$

A) $\pi/2$ B) π C) $3\pi/2$
D) 2π E) $5\pi/2$

43. Determinar la correspondencia del siguiente gráfico, si: y= f(x) es una función donde solo intervienen x y senx.



A) y = |x| + senx B) y = x + senx
C) y = − x + |senx| D) y = x + |senx|
E) y = |x| + |senx|

44. Si R es el rango de la función f y

$$f(x) = \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x - \frac{\text{sen}7x}{2\text{sen}x}$$

señalar la expresión correcta:

A) $\mathbb{R} \subset \langle 0, 1\rangle$ B) $\mathbb{R} \subset \langle -1; 0\rangle$
C) $\mathbb{R} \subset \left[0; \frac{1}{2}\right]$ D) $\langle -1; 1\rangle \subset \mathbb{R}$
E) $\langle 0; 1\rangle \subset \mathbb{R}$

45. Si: P = (x; 1 − a) es un punto que pertenece a la gráfica de la función seno,
hallar: S = senx (1 − senx)(cscx)

A) 1 − a B) a/2 C) 1/a
D) a E) a − 1

46. Dada la función: $F(x) = \dfrac{\tan|x - |x||}{\tan x}$

señalar la proposición correcta:

I. Dominio f = $\mathbb{R} - \{(2n + 1)\pi/2; n \in \mathbb{Z}\}$
II. Rango f = $\langle -\infty; -2\rangle \cup [0; +\infty\rangle$
III. F es una función par.

A) I B) I y II C) II
D) I, II y III E) I y III

47. Acerca de la función f:

$f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\cos 2x + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,\text{sen}2x$

Analizar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Si $x \in \left\langle \frac{3\pi}{8}; \frac{13\pi}{24}\right\rangle$, f es creciente

II. Si $x \in \left\langle \frac{5\pi}{24}; \frac{\pi}{3}\right\rangle$, f es decreciente

III. El rango de f es $\left[\sqrt{2 - \sqrt{3}}; 2\right]$

A) VVF B) FVF C) VVV
D) FFF E) FFV

48. Acerca de la función:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} + \frac{\text{sen}x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$$

Señalar la proposición Incorrecta:

I. Dom(f) = $\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$

II. Si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{2}$

III. Es decreciente: $\forall\, x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$

IV. Es creciente: $\forall\, x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

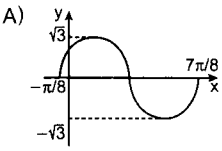
A) solo I B) solo II C) solo III
D) solo IV E) todas

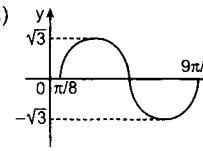
49. Hallar el rango de la función f definida por:
f(x) = |tanx| + |senx|; si: $|x| < \pi/3$

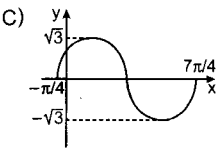
A) $\left\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ B) $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ C) $\left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

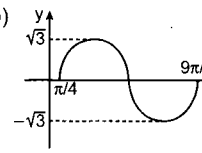
D) $\langle 0; 3\sqrt{3}]$ E) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

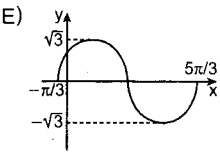
50. Graficar: $F(x) = \text{sen}\left(2X + \frac{\pi}{12}\right) + \text{sen}\left[2x + \frac{5\pi}{12}\right]$

A)


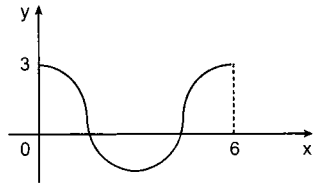
B)


C)


D)


E)


51. Hallar la ecuación de la curva: $F(x) = A\cos Bx$



A) $y = 3\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ B) $y = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$
C) $y = 3\cos(3\pi x)$ D) $y = 3\cos(6\pi x)$
E) $y = 3\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)$

52. Determinar el número de puntos de intersección de las gráficas de las funciones F(x) y G(x) en $\langle 0; \pi\rangle$
$F(x) = 2\tan x + \tan^2 x\tan 2x$
$G(x) = \csc 2x + \cot 2x$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

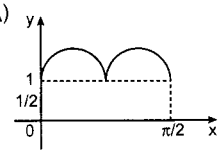
53. Si: $F(x) = |\text{sen}x|$ y $G(x) = \text{sen}|x|$
I. Ambas funciones son periódicas
II. $\text{Ran}F(x) \subset \text{Ran}G(x)$
III. $\text{Dom}F(x) = \text{Dom}G(x)$

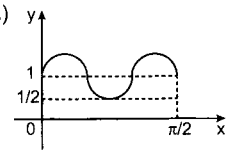
A) VVV B) FVV C) VFV
D) FVF E) VVF

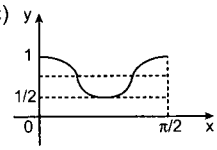
54. Dada la función: $y = A\cot Bx$, $B > 0$
calcular $A - B$, si su punto de la curva es $\left(\frac{3\pi}{32}; 1\right)$ y su periodo es $\pi/8$.

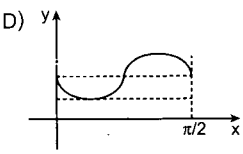
A) −8 B) −7 C) −9
D) −6 E) −5

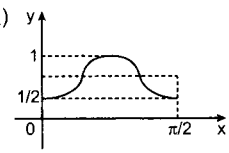
55. Graficar:
$G(x) = \text{sen}^4x + \cos^4x$, $0 \le x \le \pi/2$

A)


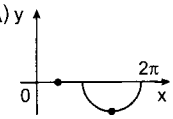
B)


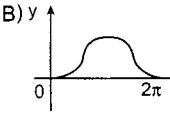
C)


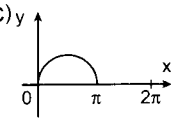
D)


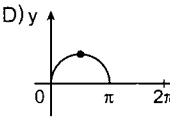
E)


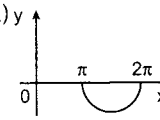
56. Graficar $F(x) = \frac{\text{sen}2x}{2\cos x} - |\text{sen}x|$, $0 \le x \le 2\pi$

A)


B)


C)


D)


E)


57. Marcar lo incorrecto: (T = periodo)

A) $y = \text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ ...$T = \frac{\pi}{2}$

B) $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ ...$T = \frac{2\pi}{3}$

C) $y = 1 + \tan\frac{(6x + \pi)}{8}$ ...$T = \frac{4\pi}{3}$

D) $y = \cot\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$ ...$T = 2\pi$

E) $y = 3\sec\left(\frac{\pi x - 1}{2}\right)$ ...$T = 2$

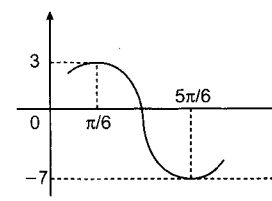
58. Calcular el periodo de la función:
$F(x) = \cos\frac{x}{4}\cos\frac{3x}{20} - \cos\frac{4x}{5}\cos\frac{7x}{10}$

A) $\pi/3$ B) 6π C) 12π
D) $3\pi/5$ E) 20π

59. Halle el dominio de la función:
$F(x) = 2 - 3\tan x\csc x$, $k \in \mathbb{Z}$

A) $R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ B) $R - \{k\pi\}$ C) $R - \{2k\pi\}$
D) $R - \{k\pi\}$ E) $R\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$

60. Hallar la ecuación de la sinusoide:



A) $y = 5\text{sen}\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

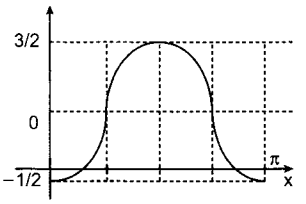
B) $y = 5\text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

C) $y = 5\text{sen}\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 2$

D) $y = 5\text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

E) $y = 5\text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) - 2$

61. Determinar la ecuación de la sinusoide:



A) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$

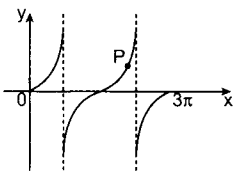
B) $y = 2\text{sen}^2x + \frac{1}{2}$

C) $y = 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

D) $y = 2\cos^2x + \frac{1}{2}$

E) $y = 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

62. Hallar la ecuación de la tangentoide, cuya gráfica es:



Si las coordenadas de P son $(2\pi; 3)$

A) $y = \sqrt{3}\tan\frac{x}{3}$ B) $y = \sqrt{3}\tan\frac{2x}{3}$ C) $y = 3\tan\frac{x}{3}$

D) $y = 3\tan\frac{2x}{3}$ E) $y = 3\tan\sqrt{3}\tan\frac{4x}{3}$

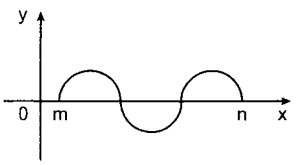
63. Determine el rango de la función:

$$F(x) = \text{sen}x\cot x + \cos x\tan x$$

A) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ B) $[-2; 2]$ C) $[-1; 1]$

D) $]-2; 2[$ E) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}] - \{-1; 1\}$

64. Hallar el periodo de F, sabiendo que es una función senoidal



A) $\frac{n-m}{3}$ B) $\frac{2(n-m)}{3}$ C) $\frac{n+m}{3}$

D) $\frac{2(n+m)}{3}$ E) $\frac{n-m}{4}$

65. Hallar el dominio de la función:

$$y = \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan 2x\tan x} \text{ n y } k \in \mathbb{Z}$$

A) $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2}; \frac{(2k-1)\pi}{4}\right\}$

B) $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{3}\right\}$

C) $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{6}; \frac{(2k+1)\pi}{8}\right\}$

D) $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{6}; \frac{(2k-1)\pi}{4}\right\}$

E) $\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{3}; \frac{(2k-1)\pi}{4}\right\}$

66. Hallar el rango de la función:
$F(x) = \tan^2x(1 - \text{sen}^6x) + \cot^2x(1 - \cos^6x)$

A) $\left\langle -2; \frac{7}{4}\right]$ B) $\left\langle -3; \frac{5}{4}\right]$ C) $\left\langle -4; \frac{9}{4}\right]$

D) $\left\langle -3; \frac{3}{4}\right\rangle$ E) $\left[\frac{7}{4}; 3\right\rangle$

67. Hallar el dominio de la función:

$$G(x) = \frac{1 - \cot x + \sec x\csc x}{1 - \tan x + \sec x\csc x}$$

A) $R - \left\{\frac{n\pi}{4}; k\pi \pm \frac{3\pi}{4}\right\}$ B) $R - \left\{\frac{n\pi}{2}; k\pi \pm \frac{3\pi}{2}\right\}$

C) $R - \left\{\frac{n\pi}{2}; k\pi \pm \frac{3\pi}{4}\right\}$ D) $R - \left\{\frac{n\pi}{2}; k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}$

E) $R - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}; k\pi \pm \frac{3\pi}{4}\right\}$

68. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

( ) el dominio de la función $y = \tan x$ es:
$R - \left\{\frac{2k + 1\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

( ) el dominio de la función $y = \csc x$ es:
$R - ([k + 1)p), k \in \mathbb{Z}$

( ) el dominio de la función $y = \text{sen}x$ es:
$\langle -\infty; 1] \cup [-1; +\infty\rangle$

A) VVF B) VVV C) FVF D) FFF E) VFV

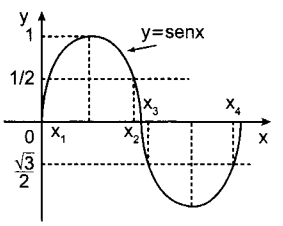
69. Hallar el rango de la función:

$$y = \text{sen}3x\cos x - \text{sen}x\cos x$$

A) $\left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right]$ B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ C) $[-1; 1]$

D) $\left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$

70. De la figura adjunta, calcular:



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

71. Los puntos $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$, $(\pi; 4)$, $\left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$

Pertenecen a la función: $F(x) = A\text{Sen}x + B\cos x + C$

Calcular: $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

A) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$ B) $(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$
C) $(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{6})$ D) $(1-\sqrt{6})(1+\sqrt{3})$
E) $(1+\sqrt{6})(1+\sqrt{3})$

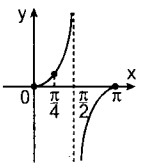
72. Hallar el rango de la función:
$F(x) = (2\cos x + 1)(2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1)(2\cos 4x - 1)$
Sabiendo que $x \in \left[\frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{12}\right]$

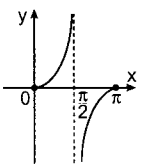
A) [3; 5] B) [−3; 5] C) [−2; 0]
D) [−1; 3] E) [0; 2]

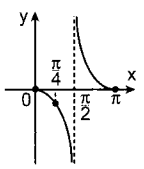
73. De las funciones que se indican, ¿cuáles son iguales?
$F(x) = \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
$G(x) = 2(\csc 2x + \cot 2x)$
$H(x) = \cot x(2 + \tan x) - 1$
$P(x) = \tan x(2 + \cot x) - 1$

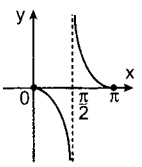
A) F(x) = G(x) B) G(x) = H(x)
C) P(x) = H(x) D) G(x) = P(x)
E) F(x) = H(x)

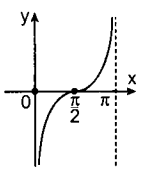
74. Graficar: $G(x) = \dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$, $0 < x < \pi$

A)


B)


C)


D)


E)


75. Halle el rango de la función:
$F(x) = \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x$

A) [−2; 0] B) [−1; 2] C) [−2; 2]
D) [−1; 1/4] E) [−2; 1/2]

76. Halle el rango de la función: $F(x) = \dfrac{3+\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x - 1}$

A) ⟨−∞; −4] B) ⟨−∞; −3] C) ⟨−∞; −2]
D) ⟨−∞; −1] E) ⟨−∞; −1/2]

77. Determine el rango de la función:
$$G(x) = \frac{|\operatorname{sen} x| - |\cos x|}{|\tan x||\cot x|}$$
Si: $\pi/2 < x < \pi$

A) [−1; 0] B)]0; 1[C) [−1; 1]
D) [0; 1] E)]−1; 1[

78. Hallar el rango de la función: F: $y = 3 + 5\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$
si su dominio es igual al rango de la función:
G: $y = 2\operatorname{sen}^4(3x) - 1$

A) $\left[-\frac{1}{2}; 5\right]$ B) [−1; 4] C) $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$
D) [−1; 2] E) [0; 2]

79. Simplifique la expresión:
$$M = \frac{\operatorname{sen}(3a+b) + (\operatorname{sen}(a+3b)}{\operatorname{sen}2a + \operatorname{sen}2b}$$

A) 2sen(a − b) B) 2sen(a + b) C) cos(a + b)
D) 2cos(a − b) E) 2cos(a + b)

80. Simplifique la expresión
$$M = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos 7\theta + \operatorname{sen}2\theta\cos 4\theta}{\operatorname{sen}2\theta\cos 4\theta - \operatorname{sen}\theta\cos 3\theta}$$

A) 2cos2θ − 1 B) 2cos2θ + 1 C) tan2θ
D) 2cos2θ E) 2sen2θ

81. Calcule el valor de:
$$W = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{9\pi}{7} + \cos^2\frac{17\pi}{7}$$

A) 3/4 B) 5/4 C) 7/4 D) 3/2 E) 5/2

CLAVES

1. E	12. A	23. B	34. E	45. D	56. A	67. C	78. C
2. E	13. A	24. B	35. D	46. C	57. E	68. B	79. E
3. E	14. E	25. C	36. B	47. B	58. E	69. B	80. B
4. B	15. B	26. E	37. B	48. D	59. A	70. C	81. B
5. A	16. C	27. C	38. B	49. C	60. A	71. C	
6. C	17. E	28. A	39. A	50. A	61. C	72. E	
7. E	18. B	29. B	40. A	51. A	62. B	73. B	
8. E	19. D	30. B	41. D	52. B	63. E	74. C	
9. B	20. A	31. C	42. D	53. B	64. B	75. C	
10. E	21. E	32. D	43. D	54. C	65. A	76. A	
11. C	22. C	33. D	44. B	55. C	66. E	77. E	

Funciones trigonométricas inversas

capítulo 09

Niels Henrik Abel (Noruega, 5 de agosto de 1802-Noruega, 6 de abril de 1829) fue un matemático noruego. En 1815 ingresó en la escuela de la Catedral de Cristianía en donde tres años después probaría sus aptitudes para las matemáticas con sus brillantes soluciones a los problemas originales propuestos por Bernt Holmboe. Gracias a una pequeña beca del Estado, Abel pudo ingresar a la Universidad de Cristianía en 1821. Su primera mayor aportación fue la prueba de la imposibilidad de resolución algebraica de la ecuación quíntica mediante radicales. Luego, propulsó el desarrollo de la teoría de integrales elípticas estudiando sus funciones inversas.

Por su parte, Legendre desarrolló una gran cantidad de fórmulas, algunas de las cuales recordaban en cierto sentido las relaciones entre las funciones trigonométricas inversas. Sin embargo, quedaba para Gauss y dos de sus contemporáneos más jóvenes el mérito de aprovechar de una manera completa las ventajas de un punto de vista que facilita enormemente el estudio de las integrales elípticas. Sin embargo, entre los años 1827 y 1828 fue redescubierta esta notable propiedad por uno de los matemáticos más brillantes de todos los tiempos, Niels Abel, en una memoria publicada en el Journal de Crelle. El joven Abel murió cuando solo tenía 26 años, dejando tras sí varios resultados muy profundos en álgebra y teoría de funciones.

Fuente: Wikipedia

CONCEPTOS PRELIMINARES

Relaciones

Se denomina relación a todo conjunto de pares ordenados.

Ejemplo:

A = {(1; 2), (5; 4), (7; 8), (9; 10)}

"El conjunto A se dice que es una relación".

Se llama dominio de una relación al conjunto de todas las primeras componentes.

Se llama rango de una relación al conjunto de todas las segundas componentes.

Ejemplo:

si: B = {(2; 4), (3; 9), (4; 16), (5; 25)}
Dominio: Dom(B) = {2; 3; 4; 5}
Rango: Ran(B) = {4; 9; 16; 25}

Relaciones inversas

Toda relación tiene una relación inversa. La relación inversa es el conjunto de pares ordenados que se obtiene al intercambiar los componentes de cada par ordenado de la relación.

Dada una relación A, su relación inversa se representa por A^* o A^{-1}.

Ejemplos:

1. Si: A = {(1; 6), (2; 7), (3; 8), (4; 9), (5; 10)}
   entonces su relación inversa será:
   A = {(6; 1), (7; 2), (8; 3), (9; 4), (10; 5)}
   Podemos observar que:
   Dom(A) = {1; 2; 3; 4; 5}
   Ran(A) = {6; 7; 8; 9; 10}
   Dom(A*) = {6; 7; 8; 9; 10}
   Ran(A*) = {1; 2; 3; 4; 5}
   Podemos percatarnos que Dom(A) = Ran(A*) y Ran(A) = Dom(A*); esto es lógico dado que la relación inversa se obtiene intercambiando las componentes de cada par ordenado de la relación.

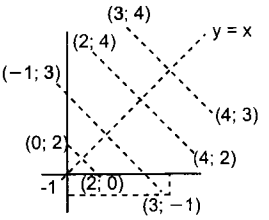
   Conclusión:
   Dada una relación R, se cumple que:
   Dom(R*) = Ran(R)
   Ran(R*) = Dom(R)

2. Dada la relación: A = {(1;2), (1; 3), (2; 4), (2; 5)}
   entonces:
   A* = {(2; 1), (3; 1), (4; 2), (5; 2)}
   Dom(A) = {1; 2} Dom(A*) = {2; 3; 4; 5}
   Ran(A) = {2; 3; 4; 5} Ran(A*) = {1; 2}

3. Si: B = {(x; y)/y = x^2}
   entonces: B* = {(x; y)/ x = y^2}
   Dom(B) = $\mathbb{R}$ Dom(B*) = [0; +∞⟩
   Ran(B) = [0; +∞⟩ Ran(B*) = $\mathbb{R}$

Gráfica de una relación inversa

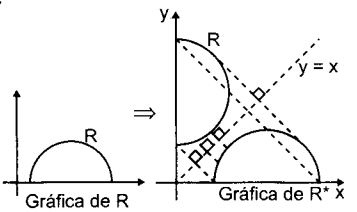
Si: A = {(−1; 3), (0; 2), (2; 4), (4; 3)}
entonces: A* = {(3; −1), (2; 0), (4; 2), (3; 4)}
Si graficamos ambos conjuntos en un mismo plano se obtiene:



En la figura adjunta, la gráfica de A* son todos los puntos señalados por un aspa, los otros son la gráfica de A.
Observa que todos los puntos de A* son simétricos respecto a la recta y = x de los puntos de A.

Conclusión:
Dada la gráfica de una relación R, para determinar la gráfica de su relación inversa R* se debe trazar la recta y = x, luego hacer una reflexión de todos los puntos de R, usando la recta y = x como eje de simetría.

Ejemplo:



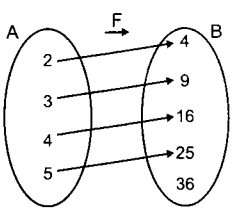
FUNCIONES INVERSAS

En el capítulo 8 ya se hizo un breve análisis sobre lo que es una función, qué se entiende por dominio, rango y cómo se gráfica.
Por ejemplo:
F = {(−5; 3), (−2; 3), (−1; 5), (2; 7)} es una relación pero como no se repite la primera componente se le llama función.
Su dominio es {− 5; −2; −1; 2} y su rango {3; 5; 7}.
Ahora debemos analizar las funciones inversas, pero primero se analizarán dos tipos de funciones:
función suryectiva o sobreyectiva, función inyectiva o univalente.

FUNCIÓN SURYECTIVA O SOBREYECTIVA

Dada una función F, cuyo conjunto de partida es A y conjunto de llegada es B, o sea: F: A → B se dice que F es una función suryectiva si todo elemento de B es imagen de un elemento de A. En otras palabras F es suryectiva si el rango de F es igual a B.

Ejemplo:

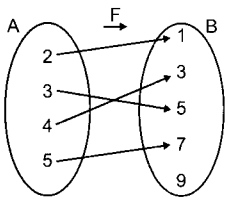


En este caso observamos que en B, 36 no es imagen de ningún elemento de A por lo tanto: F no es suryectiva.
El rango de F es {4; 9; 16; 25}
El conjunto de llegada B es {4; 9; 16; 25; 36}.
Estos conjuntos no son iguales entonces no es suryectiva.

FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

Dada una función F se dice que es inyectiva cuando cada elemento de su rango es imagen de solo un elemento de su dominio.

Por ejemplo:



Observamos en este caso que F es una función inyectiva, dado que la correspondencia entre cada uno de sus elementos es de uno a uno. Por esta razón también se le llama Univalente.

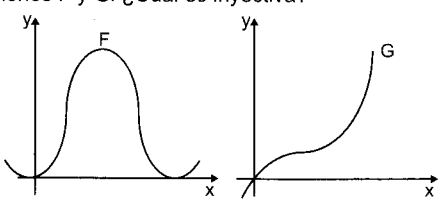
Dom(F) = {2; 3; 4; 5}

Ran(F) = {1; 3; 5; 7}

Si se conoce la gráfica de una función F, para determinar si ésta es inyectiva se traza una recta horizontal por cualquier parte de su rango y si la intersecta solo en un punto se dice que es inyectiva en caso contrario no lo será.

Ejemplo:

En las figuras adjuntas se muestran los gráficos de dos funciones F y G. ¿Cuál es inyectiva?



Respuesta:

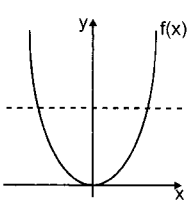
Si se traza una recta horizontal observará que intersecta a F en dos puntos o más, entonces F no es una función inyectiva.

En cambio si traza la recta horizontal en el segundo gráfico observará que intersecta a G en solo un punto, por lo tanto G es una función inyectiva.

Una función puede no ser inyectiva para todo su dominio, pero puede serlo en parte de él.

Por ejemplo: La función $F(x) = x^2$, Dominio: $\mathbb{R}$.

Esta función no es inyectiva en todo su dominio, su gráfico es:



¿Qué se debe hacer para que sea inyectiva?

Se debe redefinir el dominio de la función.

En el mismo ejemplo, se da la función $F(x) = x^2$ y escogemos de dominio: $\mathbb{R}_0^+$ (incluido el cero). En este caso la función es inyectiva (también puede elegirse el dominio $\mathbb{R}_0^-$).

En este caso la gráfica es:

Observar que si traza una recta horizontal solo intersecta a la curva en un punto. En este caso F(x) es inyectiva.

¿Las funciones periódicas son inyectivas o univalentes en todo su dominio?

La respuesta es no.

Porque, si la función es periódica existen infinitos valores del dominio que tienen la misma imagen.

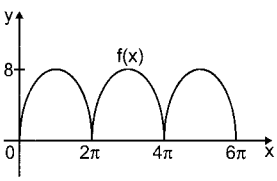
Analíticamente se sabe que si T es ei período de una función F(x), entonces:

Si : $F(x_1) = a$ .....un punto será: $(x_1; a)$

también $F(x_1 + T) = a$ .....otro punto será: $(x_1 + T; a)$

también $F(x_1 + 2T) = a$ .....otro punto será: $(x_1 + 2T; a)$

y así sucesivamente.



Gráficamente, en la figura adjunta f(x) es periódica, su período es 2π, si trazamos una recta horizontal intersecta a la curva en más de un punto por lo tanto no es "inyectiva".

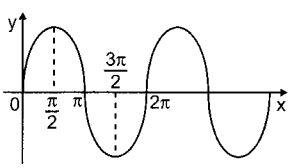
¿La funciones trigonométricas son inyectivas o univalentes en todo su dominio?

La respuesta es no, dado que son funciones periódicas y ya sabemos que **ninguna función periódica es inyectiva en todo su dominio.**

¿Qué se debe hacer para que las funciones trigonométricas sean inyectivas?

Se debe redefinir su dominio.

Por ejemplo: la función y = senx su dominio es $\mathbb{R}$



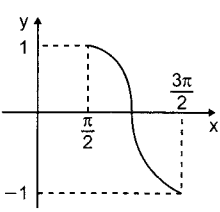
Observamos que no es inyectiva en todo su dominio.

Entonces para que sea inyectiva se escoge un intervalo adecuado del dominio, tal que para todo elemento de este le corresponda un solo valor del rango. Se puede escoger: $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Entonces se define la función así:

y = senx; dominio: $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Su gráfica será:



Observar que si se traza una recta horizontal por cualquier parte de su rango, intersecta a la curva en un solo punto.

Nota

Se pueden escoger otros intervalos para el dominio. Por ejemplo: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ o $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ etc. Lo importante es escoger un intervalo donde la función solo crece o solo decrece.

FUNCIÓN INVERSA

Dada una función:

$$F = \{(x; y)/\ y = f(x)\ ,\ x \in \text{Dom } f\}$$

Al intercambiar los elementos de cada par ordenado de esta función se obtiene un nuevo conjunto que puede ser función o simplemente una relación.

Ejemplo:

$$A = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8)\}$$

En este caso el conjunto A es una función, si se intercambian los elementos de cada par ordenado se obtiene otro conjunto que lo llamaremos A*.

$$A^* = \{(2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4)\}$$

Observamos que este nuevo conjunto también es función (observar en este caso que A es una función inyectiva).

En cambio si tenemos el conjunto:

$$B = \{(2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)\}$$

Este conjunto es una función. Si intercambiamos los elementos de cada par ordenado obtenemos otro conjunto.

$$B^* = \{(4; 2), (1; -1), (0; 0), (1; 1), (4; 2), (9; 3)\}$$

En este caso B* no es una función por lo tanto solo es una relación. (Observar en este caso que B no es una función inyectiva).

En el primer ejemplo se dice que A* es la función inversa de A y en el segundo caso B* es la relación inversa de B.

¿La inversa de una función es otra función?

Respuesta:

No necesariamente(como ejemplo tiene A y B; A* y B*).

¿En qué caso la inversa de una función F es función?

Respuesta:

Cuando la función F es inyectiva. (Como ejemplo tiene A y A*)

Conclusión:

Se llama función inversa al conjunto que se obtiene al intercambiar los elementos de cada par ordenado de una función si solo si ésta es inyectiva.

Si F es una función inyectiva, entonces la función inversa se denota por F* y se cumple que:

$$\text{Dom}(F^*) = \text{Ran}(F) \text{ y } \text{Ran}(F^*) = \text{Dom}(F)$$

En forma analítica se dice así:

Sea F una función univalente, tal que:

$$F = \{(x, f(x)/x \in \text{Dom } f\}$$

Su función inversa: $F^* = \{(f(x)\ ;\ x)/x \in \text{Dom } f\}$

Aplicaciones:

1. $F = \{(x; y)/y = 2x, x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow F^* = \{(y\ ;\ x)/y = 2x, x \in \mathbb{R}\}$
   Es lo mismo escribir:
   $F^* = \{(x; y)/x = 2y, x \in \mathbb{R}\}$
   o también: $F^* = \{(x; y)/y = x/2,\ \ x \in \mathbb{R}\}$

2. Sea: $G = \{(x; y)/y = x^2, x \in [0; +\infty\rangle\}$
   En este caso primero observa que la función G es univalente, su dominio es $[0; +\infty\rangle$ y de acuerdo a su regla de correspondencia $y = x^2$ su rango es $[0; +\infty\rangle$
   Para obtener la función inversa cambiamos (y por x) y (x por y) es decir: $x = y^2$. Ahora despejamos y entonces: $y = \pm\sqrt{x}$ pero como y (el rango) $\in [0; +\infty\rangle$.
   Entonces: solo queda: $y = \sqrt{x}$, por lo tanto:
   $G^* = \{(x; y)/y = \sqrt{x}, x \in [0; +\infty\rangle\}$

3. Hallar si existe la función inversa de:
   $y = f(x) = 5 + \sqrt{x^2 - 1}; x \leq -\sqrt{10}$
   En este caso observar que el domino es $\langle -\infty; \sqrt{10}]$, para que exista función inversa debemos probar que es univalente, entonces partimos de $f(x_1) = f(x_2)$; y llegar a demostrar que $x_1 = x_2$, (obviamente $x_1; x_2 \in \text{Dom } f$).
   $5 + \sqrt{x_1^2 - 1} = 5 + \sqrt{x_2^2 - 1} \Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 1} = \sqrt{x_2^2 - 1}$
   $x_2^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$ como x_1 y $x_2 \in \text{Dom}(f)$
   y en este caso Dom(f): $\langle -\infty; \sqrt{10}]$
   entonces se cumple que: $x_1 = x_2$.
   Por lo tanto, la función es inyectiva.
   Ahora determinamos el rango de f:
   $x \leq -\sqrt{10} \Rightarrow x^2 \geq 10 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq 3$
   $5 + \sqrt{x^2 - 1} \geq 8 \Rightarrow y = f(x) \geq 8 \Rightarrow \text{Ran}(f) = [8; +\infty\rangle$
   Para hallar la función inversa cambiamos las variables: $x = 5 + \sqrt{y^2 - 1}$
   Despejamos y: $x - 5 = \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow (x - 5)^2 = y^2 - 1$
   $\Rightarrow y^2 = 1 + (x - 5)^2$ como se han intercambiado las variables entonces $y \leq -\sqrt{10}$
   Por lo tanto: $y = -\sqrt{1 + (x - 5)^2}$, donde $x \geq 8$
   $f^* = \{(x; y)/\ y = -\sqrt{1 + (x - 5)^2}, x \geq 8\}$

Nota

Observar que:
Dom(f) = $\langle -\infty; -\sqrt{10}]$ y Ran(f) = $[8; +\infty\rangle$
y: Dom(f*) = $[8; +\infty\rangle$ y Ran(f*) = $\langle -\infty; -\sqrt{10}$

4. Dada la función: $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}, x \in \left\langle \dfrac{7}{2}; \dfrac{9}{2} \right\rangle$
   hallar f*, si es que existe.
   Debemos probar si "f" es univalente o inyectiva.
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1 + 3}{x_1 - 1} = \dfrac{2x_2 + 3}{x_2 - 1}$
   $(2x_1 + 3)(x_2 - 1) = (2x_2 + 3)(x_1 - 1)$
   $2x_1x_2 + 3x_2 - 2x_1 - 3 = 2x_2x_1 + 3x_1 - 2x_2 - 3$
   $\Rightarrow 5x_2 = 5x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$
   por lo tanto "f" es inyectiva.
   Ahora determinamos el rango de "f":
   $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1} = \dfrac{2(x - 1) + 5}{x - 1} \Rightarrow f(x) = 2 + \dfrac{5}{x - 1}$
   dato:
   $x \in \left\langle \dfrac{7}{2}; \dfrac{9}{2} \right\rangle \Rightarrow \dfrac{7}{2} < x < \dfrac{9}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{2} < x - 1 < \dfrac{7}{2}$
   $\Rightarrow \dfrac{2}{5} > \dfrac{1}{x - 1} > \dfrac{2}{7} \Rightarrow 2 > \dfrac{5}{x - 1} > \dfrac{10}{7}$
   $\Rightarrow 4 > 2 + \dfrac{5}{x - 1} > \dfrac{24}{7}$
   $\Rightarrow 4 > f(x) > \dfrac{24}{7} \Rightarrow f(x) \in \left\langle \dfrac{24}{7}; 4 \right\rangle$ (Rango de f)

Para hallar f* intercambiamos las variables:

$x = \dfrac{2y+3}{y-1} \Rightarrow xy - x = 2y + 3 \Rightarrow xy - 2y = x + 3$

$\Rightarrow y(x-2) = x + 3 \Rightarrow y = \dfrac{x+3}{x-2}$

$f^* = \left\{\dfrac{(x;y)}{y} = \dfrac{x+3}{x-2}, x \in \left\langle \dfrac{24}{7}; 4 \right\rangle\right\}$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

De igual manera que en el caso de las relaciones inversas, dada la gráfica de una función F, la gráfica de su función inversa F* se obtiene mediante una reflexión de cada punto de F tomando como eje de simetría la recta y = x.

Por ejemplo:

En la figura (1) se tiene la gráfica de la función "f": y = 10x, y en la figura (2), se tiene la gráfica de f*

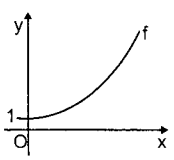


Figura (1)

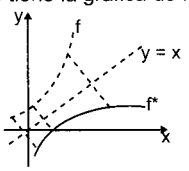


Figura (2)

Propiedades fundamentales de las funciones inversas

Dada una función univalente F, tal que:

$F = \{(x; y)/y = f(x), x \in Dom(F)\} \Rightarrow y = f(x)$

$\Rightarrow F^* = \{(y; x)/y = f(x), x \in Dom(F)\} \Rightarrow x = f^*(y)$

Las propiedades son: (I) $\boxed{F^*[F(x)] = x; \forall x \in Dom(F)}$

(II) $\boxed{F[F^*(y)] = y; \forall x \in Ran(F)}$

Por ejemplo: Si $f(x) = 10x, x \in \mathbb{R}$

su función inversa es: $f^*(x) = \log x, x \in [0; +\infty\rangle$

Se cumple que:

Caso (II): $f[f^*(x)] = x \Rightarrow 10^{\log x} = x, \forall x \in [0; +\infty\rangle$ [Ran(f)].

Caso (I): $f^*[f(x)] = x \Rightarrow \log(10^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ [Dom(f)]

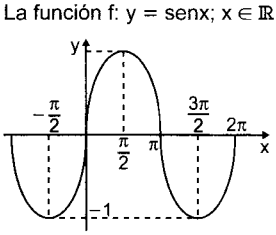
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Los puntos anteriormente tratado son la base sobre la cual nos tenemos que apoyar para poder entender el estudio de las funciones trigonométricas inversas.

Sabemos que las funciones trigonométricas son funciones periódicas por lo tanto no son inyectivas y como consecuencia no tienen función inversa. Pero también se ha dicho que si se restringe o se elige un intervalo adecuado para el dominio, de tal manera que su rango no varíe, podemos en este caso hablar de función inversa.

Por ejemplo:

La función f: y = senx; $x \in \mathbb{R}$



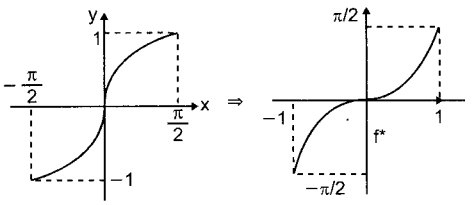
En este caso redefinimos el dominio de la siguiente manera:

$\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

En este intervalo la función "f":

y = senx, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ es inyectiva, y su función inversa es f*: x = seny , $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Su gráfica será:



De la misma forma que en el ejemplo anterior se restringen los dominios de cada una de las funciones trigonométricas básicas, tal como se muestra en los cuadros adjuntos:

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
y = senx	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	[−1; 1]
y = cosx	[0; π]	[−1; 1]
y = tanx	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$	⟨−∞; +∞⟩
y = cotx	⟨0; π⟩	⟨−∞; +∞⟩
y = secx	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$	⟨−∞; −1] ∪ [1; +∞⟩
y = cscx	$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$	⟨−∞; −1] ∪ [1; +∞⟩

Nota

El dominio elegido en cada caso es el más usual, esto significa que se pueden elegir otros dominios.

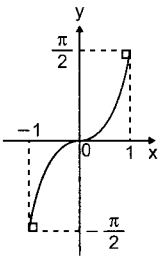
La denominación y notación de las funciones trigonométricas inversas es:

	NOTACIÓN	
• Función seno inverso o función arco seno	arcsen	sen^{-1}
• Función coseno inverso o función arco coseno	arccos	cos^{-1}
• Función tangente inversa o función arco tangente	arctan	tan^{-1}
• Función cotangente inversa o función arco cotangente	arccot	cot^{-1}
• Función secante inversa o función arco secante	arcsec	sec^{-1}
• Función cosecante inversa o función arco cosecante	arccsc	csc^{-1}

GRÁFICA, DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

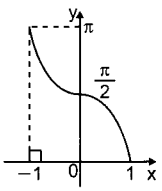
Función seno inverso

f{x; y)/ y = arcsenx}



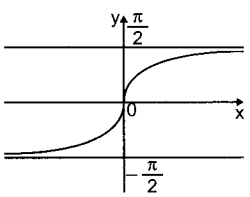
- Dominio: $[-1; 1]$
- Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- Función impar
  $\arcsen(-x) = -\arcsen x$
- Función creciente

Función coseno inverso



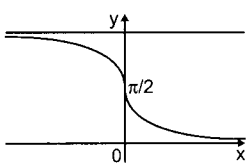
$\{(x; y)/y = \arccos x\}$
- Dominio: $[-1; 1]$
- Rango: $[0; \pi]$
- Función decreciente
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Función tangente inversa



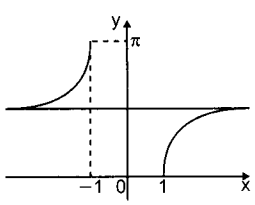
$\{(x; y)/y = \arctan x\}$
- Dominio: $\langle -\infty; +\infty\rangle$
- Rango: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
- Función impar
  $\arctan(-x) = -\arctan x$
- Función creciente

Función cotangente inversa



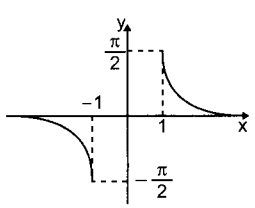
$\{(x; y)/y = \operatorname{arccot} x\}$
- Dominio: $\langle -\infty; +\infty\rangle$
- Rango: $\langle 0; \pi\rangle$
- Función decreciente
- $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

Función secante inversa



$\{(x; y)/y = \operatorname{arcsec} x\}$
- Dominio: $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
- Rango: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$

Función cosecante inversa



$\{(x; y)/y = \operatorname{arccsc} x\}$
- Dominio: $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
- Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Función impar
  $\operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc} x$

Observaciones:

1.° Primero debemos aprender a interpretar la notación expuesta:

$\alpha = \arcsen(1/3)$ ... se lee:
"α es el arco cuyo seno es 1/3"

$\beta = \arctan 5$...se lee:
"β es el arco cuya tangente es 5".

2.° Si $\alpha = \arcsen(1/3)$, entonces se cumple que:
$\operatorname{sen}\alpha = 1/3$ y además $\alpha \in$ IC

Si $\beta = \arctan 5$, entonces se cumple que:
$\tan\beta = 5$ y además $\beta \in$ IC

Si $\theta = \arccos(-1/4)$ entonces se cumple que:
$\cos\theta = -1/4$ y además $\theta \in$ IIC

3.° Cuando se quiere calcular o evaluar la función trigonométrica inversa para algún valor específico se debe tener en cuenta su rango.
Por ejemplo, sabemos que:
$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ esto se debe a que el rango del arco tangente es $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Sabemos que:

$\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$, pero $\operatorname{arccot}(1) \neq \frac{5\pi}{4}$

Porque el rango del arco cotangente es $\langle 0; \pi\rangle$.

Lo correcto es: $\operatorname{arccot}(1) = \frac{3\pi}{4}$

Sabemos que:

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pero $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ porque el rango del arco seno es:

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Lo correcto es: $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Algunos valores importantes:

$\arcsen\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$	$\arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$
$\arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{\pi}{10}$	$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
$\arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$	$\arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{\pi}{5}$
$\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
$\arcsen\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{3\pi}{10}$	$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
$\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{2\pi}{5}$

$\arctan(2-\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}$	$\operatorname{arccot}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}$
$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{arccot}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$
$\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arccot}(1)=\frac{\pi}{4}$
$\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$
$\arctan(\sqrt{2}+1)=\frac{3\pi}{8}$	$\operatorname{arccot}(\sqrt{2}-1)=\frac{3\pi}{8}$
$\arctan(2+\sqrt{3})=\frac{5\pi}{12}$	$\operatorname{arccot}(2-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{12}$

$\operatorname{arcsec}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=\frac{\pi}{12}$	$\operatorname{arccsc}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\frac{\pi}{12}$
$\operatorname{arcsec}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{arccsc}(\sqrt{5}+1)=\frac{\pi}{10}$
$\operatorname{arcsec}(\sqrt{5}-1)=\frac{\pi}{5}$	$\operatorname{arccsc}(2)=\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{arcsec}(\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arccsc}(\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$
$\operatorname{arcsec}(2)=\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{arccsc}(\sqrt{5}-1)=\frac{3\pi}{10}$
$\operatorname{arcsec}(\sqrt{5}+1)=\frac{2\pi}{5}$	$\operatorname{arccsc}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

4.° Un mismo valor se puede expresar de diferentes maneras, por ejemplo:

- $\frac{\pi}{6}=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\frac{\pi}{6}=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\frac{\pi}{6}=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arcsec}(\sqrt{2})$
- $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arccot}(1)$
- $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\frac{\pi}{2}=\operatorname{arcsen}(1)$
- $\frac{\pi}{2}=\arccos(0)$
- $\frac{\pi}{2}=\operatorname{arccsc}(1)$

5.° Para el caso de números negativos (del dominio) se cumplen las siguientes igualdades:

$\operatorname{arcsen}(-x)=-\operatorname{arcsen}x$
$\arctan(-x)=-\arctan x$
$\operatorname{arccsc}(-x)=-\operatorname{arccsc}x$
$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$
$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot}x$
$\operatorname{arcsec}(-x)=\pi-\operatorname{arcsec}x$

Ejemplos:

- $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}$
- $\arctan(-2)=-\arctan 2$
- $\operatorname{arccot}(-\sqrt{2})=\pi-\operatorname{arccot}\sqrt{2}$
- $\operatorname{arccsc}(-3)=-\operatorname{arccsc}3$
- $\operatorname{arcsec}(-7)=\pi-\operatorname{arcsec}7$

Verificar cada uno de los valores que ese indican en el siguiente cuadro:

$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}$	$\operatorname{arccot}(-2-\sqrt{3})=\frac{11\pi}{12}$
$\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{3\pi}{5}$	$\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{arccot}(-1)=\frac{3\pi}{4}$
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{arccot}(1-\sqrt{2})=\frac{5\pi}{8}$
$\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{4\pi}{5}$	$\operatorname{arccot}(\sqrt{3}-2)=\frac{7\pi}{12}$

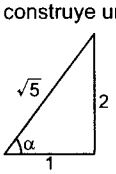
$\operatorname{arcsec}(\sqrt{2}-\sqrt{6})=\frac{11\pi}{12}$
$\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{arcsec}(1-\sqrt{5})=\frac{4\pi}{5}$
$\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})=\frac{3\pi}{4}$
$\operatorname{arcsec}(-2)=\frac{2\pi}{3}$
$\operatorname{arcsec}(-\sqrt{5}-1)=\frac{3\pi}{5}$

Aplicaciones:

1. Si: $\alpha=\arctan 2$, calcular: $\cos 3\alpha$

Resolución:

Como $\alpha=\arctan 2 \Rightarrow \tan\alpha=2$ con este valor se construye un triángulo rectángulo.



$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3-3\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$
$$\cos 3\alpha=-\frac{11\sqrt{5}}{25}$$

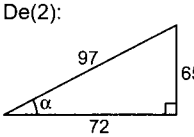
2. Si: $\operatorname{arccota}=\operatorname{arcsen}\left(\frac{65}{97}\right)$ y $\operatorname{arcsen}b=\operatorname{arccot}\left(\frac{56}{33}\right)$ calcular "a" y "b".

Resolución:

Sea: $\alpha=\operatorname{arccota}=\operatorname{arcsen}\left(\frac{65}{97}\right)$

$$\begin{cases}\alpha=\operatorname{arccota}\Rightarrow\cot\alpha=a & \ldots(1)\\ \alpha=\operatorname{arcsen}\left(\frac{65}{97}\right)\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{65}{97} & \ldots(2)\end{cases}$$

De(2):



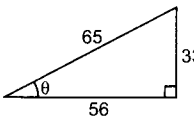
En (1):

$a=\cot\alpha\Rightarrow a=\frac{72}{65}$

Sea: $\theta=\operatorname{arcsen}b=\operatorname{arccot}\left(\frac{56}{33}\right)$

$$\begin{cases}\theta=\operatorname{arcsen}b\Rightarrow b=\operatorname{sen}\theta & \ldots(3)\\ \theta=\operatorname{arccot}\left(\frac{56}{33}\right)\Rightarrow\cot\theta=\frac{56}{33} & \ldots(4)\end{cases}$$

De (4):



En (3):

$b = \text{sen}\theta \Rightarrow b = \frac{33}{65}$

3. Calcular el valor de α, θ y ϕ.

$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\text{arctan}(-1) - \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\phi = \text{arccsc}(-2) + \text{arcsen}(1) - \text{arccos}(-1) + \text{arccot}(-1) + \text{arccos}(0)$

$\alpha = \text{arccsc}(\tan^2 60° - \sec^2 45°) + \text{arcsen}(\cos 0° + \cos 180°)$

Resolución:

$\alpha = \text{arccsc}[(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2] + \text{arcsen}[1 + (-1)]$

$\alpha = \text{arccsc}(1) + \text{arcsen}(0) = \frac{\pi}{2} + 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\text{arctan}(-1) - \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2\pi$

$\phi = \text{arccsc}(-2) + \text{arcsen}(1) - \text{arccos}(-1) + \text{arccot}(-1) + \text{arccos}(0)$

$\phi = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{7\pi}{12}$

4. Calcular: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \text{arccot}3\right)$

Resolución:

$M = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \text{arccot}3\right)$; sabemos que:

$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

entonces: $M = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan(\text{arccot}3)}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan(\text{arccot}3)}$

Pero: $\text{arccot}(3) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

$M = \frac{1 - \tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1 + \tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow M = \frac{1}{2}$

5. Calcular: $M = \cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arcsen}\frac{15}{17}\right)$

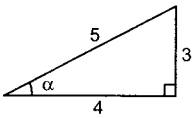
Resolución:

Sea: $M = \cos\left(\underbrace{\text{arcsen}\frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\text{arcsen}\frac{15}{17}}_{\phi}\right)$

$M = \cos(\alpha + \phi) = \cos\alpha\cos\phi - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\phi$ ...(I)

$\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

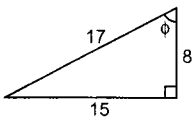
$\Rightarrow$



$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\phi = \text{arcsen}\left(\frac{15}{17}\right) \Rightarrow \text{sen}\phi = \frac{15}{17}$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \cos\phi = \frac{8}{17}$

Reemplazamos en (1):

$M = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{17}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{15}{17}\right) = \frac{32}{85} - \frac{45}{85} \Rightarrow M = -\frac{13}{85}$

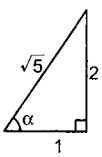
6. Calcular: sen(2arctan2).

Resolución:

Sea: $L = \text{sen}(2\underbrace{\arctan 2}_{\alpha})$

$L = \text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$ ....(I)

$\alpha = \arctan 2 \Rightarrow \tan\alpha = 2 \Rightarrow$



$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Reemplazando en (I):

$L = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow L = \frac{4}{5}$

7. Calcular:

$M = \csc\{\text{arccos}[\text{sen}(\text{arccot}\sqrt{3})]\}$, y

$N = \cos\{\arctan[\text{sen}(\arctan 3)]\}$.

Resolución:

$M = \csc\{\text{arccos}[\text{sen}(\underbrace{\text{arccot}\sqrt{3}}_{\pi/6})]\}$

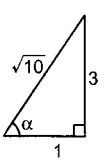
$M = \csc\left[\text{arccos}\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$M = \csc\left[\underbrace{\text{arccos}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\pi/3}\right] = \csc\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$N = \cos\{\arctan[\text{sen}(\underbrace{\arctan 3}_{\alpha})]\}$

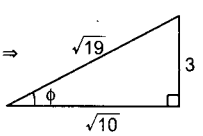
$N = \cos[\arctan(\text{sen}\alpha)]$;

$\alpha = \arctan(3) \Rightarrow \tan\alpha = 3 \Rightarrow$



$N = \cos\left(\underbrace{\arctan\frac{3}{\sqrt{10}}}_{\phi}\right) \Rightarrow N = \cos\phi$ ...(I)

$\phi = \arctan\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow$



En (I): $N = \cos\phi = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$

8. Calcular el valor de "m" y "n", si:
$\arctan(m) + 3\arctan(1) = \text{arcsec}(2)$ y
$\arccos(n) + \text{arcsen}(1) = \pi$

Resolución:

$\arctan(m) + 3\arctan(1) = \text{arcsec}(2)$

$\arctan(m) + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arctan(m) = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = \frac{-5\pi}{12}$

$\arctan(m) = -\frac{5\pi}{12} \Rightarrow m = \tan\left(\frac{-5\pi}{12}\right) = -\tan\frac{5\pi}{12}$

$\Rightarrow m = -(2+\sqrt{3})$

$\arccos(n) + \text{arcsen}(1) = \pi$

$\arccos(n) + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \arccos(n) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\arccos(n) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow n = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow n = 0$

9. Calcular el valor de:
$\theta = \arccos(-1)^n - \text{arcsen}(-1)^n - \text{arccot}(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}$

Resolución:

En estos casos se analizan dos posibilidades.

- Si "n" es par, entonces $(-1)^n = 1$, luego:
  $\theta = \arccos(1) - \text{arcsen}(1) - \text{arccot}(1)$
  $\Rightarrow \theta = 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$
- Si "n" es impar, entonces $(-1)^n = -1$, luego:
  $\theta = \arccos(-1) - \text{arcsen}(-1) - \text{arccot}(-1)$
  $\Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Observamos que:

$$\begin{cases} \text{Si "n" es par, entonces:} & \theta = -\frac{3\pi}{4} \\ \text{Si "n" es impar, entonces:} & \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

entonces: $\theta = \frac{(-1)^{n+1}3\pi}{4};\ \forall n \in \mathbb{Z}$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1.° De las propiedades de funciones inversas sabemos que:

$$\boxed{F[F^*(x)] = x \Leftrightarrow x \in \text{Ran}(F)}$$

Entonces:

$\text{sen}(\text{arcsen}x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in [-1; 1]$
$\cos(\arccos x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in [-1; 1]$
$\tan(\arctan x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \mathbb{R}$
$\cot(\text{arccot}x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \mathbb{R}$
$\sec(\text{arcsec}x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
$\csc(\text{arccsc}x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

Ejemplos:

$\text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)\right] = -\frac{1}{5}$

$\tan(\arctan 7) = 7$ $\qquad$ $\cot(\text{arccot}50) = 50$

$\sec(\text{arcsec}\sqrt{13}) = \sqrt{13}$ $\qquad$ $\csc[\text{arccsc}(-6)] = -6$

¿Será $\cos(\arccos\sqrt{2}) = \sqrt{2}$?

La respuesta es no, porque $\sqrt{2} \notin [-1; 1]$

2.° De las propiedades de funciones inversas sabemos que:

$$\boxed{F^*[F(x)] = x \Leftrightarrow x \in \text{Dom}(F)}$$

Entonces:

$\text{arcsen}(\text{sen}x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos(\cos x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in [0; \pi]$
$\arctan(\tan x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
$\text{arccot}(\cot x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \langle 0; \pi\rangle$
$\text{arcsec}(\sec x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$
$\text{arccsc}(\csc x) = x$	$\Leftrightarrow$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplos:

$\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

$\arctan\left(\tan -\frac{\pi}{9}\right) = -\frac{\pi}{9}$ $\qquad$ $\text{arccot}\left(\cot\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$

$\sec\left(\sec\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{5\pi}{12}$ $\qquad$ $\csc\left(\csc -\frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{3\pi}{8}$

- ¿Será $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$?
  La respuesta es no, porque $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- ¿Será $\arccos\left(\cos -\frac{\pi}{9}\right) = -\frac{\pi}{9}$?
  La respuesta es no, porque $-\frac{\pi}{9} \notin [0; \pi]$
- ¿Será $\text{arccot}(\cot 2) = 2$?
  La respuesta es sí, porque $2 \in \langle 0; \pi\rangle$

En los dos primeros casos lo que se hace es reducir al primer cuadrante o aplicar alguna propiedad estudiada en los capítulos anteriores.

- En el primer caso: $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$
  se analiza: $\text{sen}\frac{2\pi}{3}$
  Ángulo de referencias:
  $\alpha_r = \pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{sen}\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\frac{\pi}{3}$
  Luego: $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$
- En el segundo caso: $\arccos\left(\cos -\frac{\pi}{9}\right)$
  sabemos que:
  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \Rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$
  Luego: $\arccos\left(\cos -\frac{\pi}{9}\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{9}$

Calcular:

- $\text{arcsec}\left(\sec\frac{8\pi}{7}\right)$
- $\arctan(\tan 2)$
- $\text{arcsen}(\text{sen}4)$

Resolución:

- $\operatorname{arcsec}\left(\sec\frac{8\pi}{7}\right)$

  No se anula el arcsec con la sec, porque:

  $\frac{8\pi}{7} \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

  $\Rightarrow \sec\frac{8\pi}{7} = -\sec(a_r) \Rightarrow \frac{8\pi}{7} \in \text{IIIC}$

  $\Rightarrow \alpha_r = \frac{8\pi}{7} - \pi = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sec\frac{8\pi}{7} = -\sec\frac{\pi}{7}$

  Luego:

  $\operatorname{arcsec}\left(\sec\frac{8\pi}{7}\right) = \operatorname{arcsec}\left(-\sec\frac{\pi}{7}\right)$

  $\Rightarrow \pi - \operatorname{arcsec}\left(\sec\frac{\pi}{7}\right) = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$

- $\arctan(\tan 2) \Rightarrow$ En este caso $2 \notin \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

  Observar que: $2 \in \text{IIC} \Rightarrow \alpha_r = \pi - 2$

  $\Rightarrow \tan 2 = -\tan(\pi - 2)$

  Luego:

  $\arctan(\tan 2) = \arctan[-\tan(\pi - 2)] = -\arctan[\tan(\pi - 2)]$

  $\arctan(\tan 2) = -(\pi - 2) = 2 - \pi$

- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 4) \Rightarrow$ En este caso, $4 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

  Observar que:

  $4 \in \text{IIIC} \Rightarrow \alpha_r = 4 - \pi \Rightarrow \operatorname{sen} 4 = -\operatorname{sen}(4 - \pi)$

  luego: $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 4) = \operatorname{arcsen}[-\operatorname{sen}(4 - \pi)]$

  $= -\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(4 - \pi)] = -(4 - \pi) = \pi - 4$

3.°

$$\operatorname{arcsen}x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in [-1; 1] - \{0\}$$

$$\arccos x = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in [-1; 1] - \{0\}$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in \langle 0; +\infty\rangle$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) - \pi \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; 0\rangle$$

$$\operatorname{arccot}x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in \langle 0; +\infty\rangle$$

$$\operatorname{arccot}x = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; 0\rangle$$

$$\operatorname{arcsec}x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

$$\operatorname{arccsc}x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

Ejemplos:

$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{arccsc}(5)$

$\arctan(-5) = \operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{5}\right) - \pi$

$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{arcsec}(3)$

$\operatorname{arccot}(-2) = \pi + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\operatorname{arccot}(7) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

$\operatorname{arcsec}(-9) = \arccos\left(-\frac{1}{9}\right)$

$\arctan(8) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{8}\right)$

$\operatorname{arccsc}(-2) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

4.°

$$\operatorname{arcsen}x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot}x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcsec}x + \operatorname{arccsc}x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

Ejemplos:

$\operatorname{arcsen}(0{,}9) + \arccos(0{,}9) = \frac{\pi}{2}$

$\arctan(-5) + \operatorname{arccot}(-5) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcsec}(3) + \operatorname{arccsc}(3) = \frac{\pi}{2}$

$\arctan(7) + \operatorname{arccot}(7) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcsec}(-9) + \operatorname{arccsc}(-9) = \frac{\pi}{2}$

Nota

Las propiedades enunciadas están ligadas con el dominio que se ha elegido para las funciones trigonométricas, si estos dominios varían entonces algunas de estas propiedades también varían.

Observación

Un caso que se presenta con frecuencia es una suma o diferencia de arco tangente, la fórmula que se aplica es la siguiente:

$\arctan(m) + \arctan(n) = \arctan\left(\frac{m+n}{1-mn}\right) + K\pi$

El valor de K depende de "m" y "n"

Si: $mn < 1 \Rightarrow K = 0$

Si: $mn > 1$ y $m > 0 \Rightarrow K = 1$

Si: $mn > 1$ y $m < 0 \Rightarrow K = -1$

Aplicaciones:

1. Calcular: $\arctan(4) + \arctan(3)$.

   Resolución:

   Sea:

   $\alpha = \arctan 4 + \arctan 3 \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{4+3}{1-4\times 3}\right) + K\pi$

   Donde:

   $K = 1$; porque: $mn = (4)(3) > 1 \ \wedge \ m = 4 > 0$

   $\therefore \alpha = \arctan\left(-\frac{7}{11}\right) + \pi \ \vee \ \alpha = \pi - \arctan\left(\frac{7}{11}\right)$

2. Calcular: $\arctan(5) + \arctan\left(\frac{1}{10}\right)$

   Resolución:

   Sea:

   $\theta = \arctan 5 + \arctan\frac{1}{10} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{5+\frac{1}{10}}{1-5\times\frac{1}{10}}\right) + K\pi$

   Como:

   $(5)\left(\frac{1}{10}\right) < 1 \Rightarrow K = 0 \quad \therefore \theta = \arctan\left(\frac{51}{5}\right)$

3. Calcular: arctan(4) − arctan(3)

Resolución:

Sea: $\phi = \arctan(4) + \arctan(-3)$

$\phi = \arctan\left[\dfrac{4+(-3)}{1-4(-3)}\right] + K\pi;$

Como: $mn = (4)(-3) = -12 < 1 \Rightarrow K = 0$

$\therefore\ \phi = \arctan(1/13)$

4. Calcular: $\arctan\left(-\frac{1}{8}\right) - \arctan(9)$.

Resolución:

Sea: $\phi = \arctan\left(-\frac{1}{8}\right) + \arctan(-9)$

$$\phi = \arctan\left[\frac{\left(-\frac{1}{8}\right)+(-9)}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)(-9)}\right] + k\pi$$

como $mn = \left(-\frac{1}{8}\right)(-9) > 1 \ \wedge\ m = -\frac{1}{8} < 0$

$\boxed{\Rightarrow K = -1}$ $\quad\therefore\ \phi = \arctan(73) - \pi$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS COMPUESTAS

Así como en el capítulo 8 se hace un análisis de las funciones trigonométricas básicas y las funciones trigonométricas compuestas, de igual manera analizaremos ahora las funciones trigonométricas inversas compuestas.

Multiplicación de la función por una constante

Función básica	Función compuesta
$y = f^*(x)$	$y = Af^*(x)$

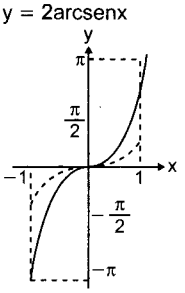
1.° Es este caso el rango de la función aumenta, si $A > 1$ o disminuye, si $0 < A < 1$. (No olvidar $A \in \mathbb{R}$)

Ejemplos:

Función	Dominio	Rango
• $y = 2\text{arcsen}x$	$[-1; 1]$	$[-\pi; \pi]$
• $y = 3\text{arccos}x$	$[-1; 1]$	$[0; 3\pi]$
• $y = \frac{1}{2}\text{arctan}x$	$\mathbb{R}$	$\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\rangle$
• $y = \frac{3}{5}\text{arcsec}x$	$\mathbb{R}-\langle -1; 1\rangle$	$\left[0; \frac{3\pi}{10}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{10}; \frac{3\pi}{5}\right]$

Gráficamente: la curva se alarga (si $A > 1$) y se acorta (si $0 < A < 1$).

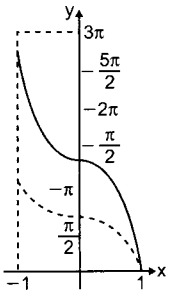
• $y = 2\text{arcsen}x$



Con línea punteada se muestra $y = \text{arcsen}x$

Con línea continua $y = 2\text{arcsen}x$

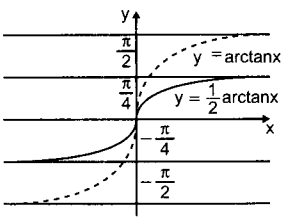
• $y = 3\text{arccos}x$



Con línea punteada se muestra $y = \text{arccos}x$

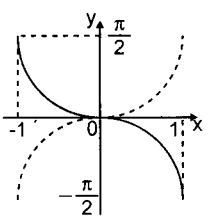
Con línea continua $y = 3\text{arccos}x$

• $y = \frac{1}{2}\text{arctan}x$

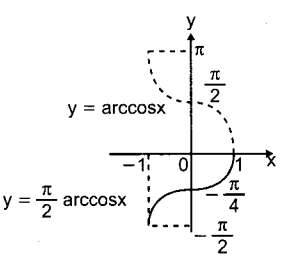


2.° En el caso que A sea negativo, la gráfica se invierte y se amplía o contrae el rango.

• $y = -\text{arcsen}x \Rightarrow \text{Rango}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



• $y = -\frac{1}{2}\text{arccos}x \Rightarrow \text{Rango}: \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$



Multiplicación del argumento por una constante

Función básica	Función compuesta
$y = f^*(x)$	$y = f^*(Bx)$

En este caso la constante B ($B \in \mathbb{R}^+$) expande o contrae el dominio de las funciones trigonométricas inversas básicas: arco seno, arco coseno, arco secante y arco cosecante.

Para la funciones arco tangente y arco cotangente el dominio no varía.
El rango no se altera en ningún caso.

Ejemplos:

- $y = \text{arcsen}2x$

$$\begin{cases} \text{En este caso } -1 \le 2x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \text{Entonces el dominio es: } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

- $y = \arccos 3x$

$$\begin{cases} \text{En este caso } -1 \le 3x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3} \\ \text{Entonces el dominio es: } \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right] \end{cases}$$

- $y = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{cases} \text{En este caso } \frac{x}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ \text{Entonces el dominio es: } \mathbb{R} \end{cases}$$

- $y = \text{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$

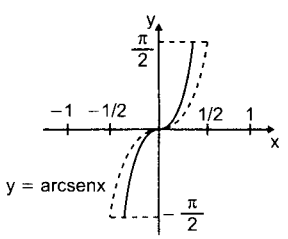
$$\begin{cases} \text{En este caso } \frac{x}{3} \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle \\ \text{Luego: } x \in \mathbb{R} - \langle -3; 3\rangle \\ \text{Entonces el dominio es: } \mathbb{R} - \langle -3; 3\rangle \end{cases}$$

Función	Dominio	Rango
• $y = \text{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right)$	$\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
• $y = \arccos\left(\frac{x}{5}\right)$	$[-5; 5]$	$[0; \pi]$
• $y = \arctan(5x)$	$\mathbb{R}$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
• $y = \text{arccot}\left(\frac{x}{3}\right)$	$\mathbb{R}$	$\langle 0; \pi\rangle$
• $y = \text{arcsec}(7x)$	$\mathbb{R} - \left\langle -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right\rangle$	$[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
• $y = \text{arccsc}\left(\frac{x}{9}\right)$	$\mathbb{R} - \langle -9; 9\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

Gráficamente, la curva se alarga ($0 < B < 1$) o se acorta ($B > 1$):

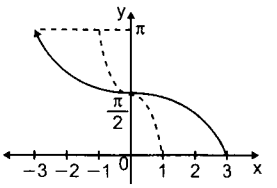
Ejemplo:

- $y = \text{arcsen}2x$



Dominio: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \wedge$ Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- $y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$



Dominio: $[-3; 3] \wedge$ Rango: $[0; \pi]$

Suma de una constante a la función

Función básica $y = f^*(x)$	Función compuesta $y = C + f^*(x)$

Cuando se suma una constante C ($C \neq 0$) a una función varía el rango de las funciones trigonométricas inversas básicas.

Ejemplos:

- $y = \frac{\pi}{3} + \text{arcsen}x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}x \le \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3} + \text{arcsen}x \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \le y \le \frac{5\pi}{6}$$

Entonces el rango es: $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

- $y = -\frac{\pi}{2} + \arccos x \Rightarrow 0 \le \arccos x \le \pi$

$$0 - \frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2} + \arccos x \le -\frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces el rango es: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- $y = \frac{2\pi}{5} + \arctan x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{5} + \arctan x < \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{10} < y < \frac{9\pi}{10}$$

Entonces el rango es: $\left\langle -\frac{\pi}{10}; \frac{9\pi}{10}\right\rangle$

- $y = \frac{\pi}{4} + \text{arcsec}x$

$$\Rightarrow 0 \le \text{arcsec}x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < \text{arcsec}x \le \pi$$

$$\frac{\pi}{4} + 0 \le \frac{\pi}{4} + \text{arcsec}x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \vee$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \text{arcsec}x + \le \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le y < \frac{3\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4} < y \le \frac{5\pi}{4}$$

Entonces el rango es: $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

Nota

En forma práctica en este caso (y también en los casos anteriores) solo se suma la constante a los extremos del (intervalo) dominio de la función.

Sabemos que: Ran(arcsecx) = $[0\ ;\ \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$$\Rightarrow \text{Ran}\left(\frac{\pi}{4} + \text{arcsec}\,x\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \text{Ran}\left(\frac{\pi}{4} + \text{arcsec}\,x\right) = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$$

- $y = \frac{\pi}{3} + \text{arccscx}$

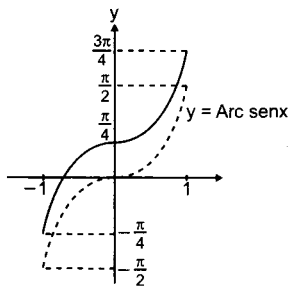
  Ran(arccscx) = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

  $\text{Ran}\left(\frac{\pi}{3} + \text{arccsc}\,x\right) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

  $\text{Ran}\left(\frac{\pi}{3} + \text{arccsc}\,x\right) = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

Gráficamente, al sumarle una constante C ($C \neq 0$) a la función f*(x) la gráfica de ésta se traslada C unidades hacia arriba, si C es positiva y C unidades hacia abajo, si C es negativa.

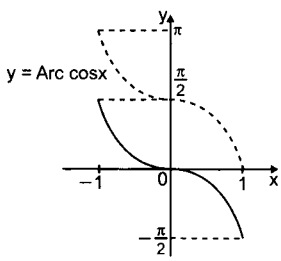
- $y = \frac{\pi}{4} + \text{arcsenx}$



Como $C = \frac{\pi}{4}$ (> 0) la curva se traslada hacia arriba $\frac{\pi}{4}$ unidades.

Dominio: $[-1; 1]$ $\wedge$ Rango: $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$

- $y = -\frac{\pi}{2} + \text{arccos}\,x$



Como $C = \frac{\pi}{2}$ (<0) la curva se traslada hacia abajo $\pi/2$ unidades.

Dominio: $[-1; 1]$ $\wedge$ Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Suma de una constante al argumento

Función básica	Función compuesta
y = f*(x)	y = f*(x − D)

Cuando se suma una constante D ($D \neq 0$) varía el dominio de las funciones arco seno, arco coseno, arco secante y arco cosecante.
El dominio de las funciones arco tangente y arco cotangente no varia.
El rango no se altera en ningún caso.

Ejemplos:

- $y = \text{arcsen}(x + 5) \Rightarrow -1 \leq x + 5 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq -4$
  entonces el dominio es: $[-6; -4]$

- $y = \text{arctan}(x + 7) \Rightarrow -\infty < x + 7 < +\infty$
  $\Rightarrow -\infty < x < +\infty$
  entonces el dominio es $\mathbb{R}$ se puede observar tiene el mismo dominio que la función y = arctanx

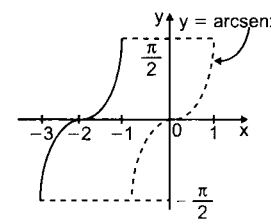
- $y = \text{arcsec}(x - 9) \Rightarrow x - 9 \leq -1 \wedge x - 9 \geq 1$
  $x \leq 8 \wedge x \geq 10$
  entonces, el dominio es: $\langle -\infty; 8] \cup [10; +\infty\rangle$
  o también: $\mathbb{R} - \langle 8; 10\rangle$

Función	Dominio	Rango
• $y = \text{arcsen}(x - 3)$	$[2; 4]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
• $y = \text{arccos}(x + 1)$	$[-2; 0]$	$[0; \pi]$
• $y = \text{arctan}(x + \sqrt{2})$	$\mathbb{R}$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
• $y = \text{arccot}(x - \pi)$	$\mathbb{R}$	$\langle 0; \pi\rangle$
• $y = \text{arcsec}(x - 7)$	$\mathbb{R} - \langle -8; -6\rangle$	$[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
• $y = \text{arccsc}(x - 10)$	$\mathbb{R} - \langle 9; 11\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

Gráficamente al sumarle una constante D ($D \neq 0$) al argumento de la función f* (x) la gráfica de ésta se traslada en forma horizontal, si D es positiva la traslación será D unidades a la derecha y si D es negativa la traslación será D unidades a la izquierda.

Ejemplo:

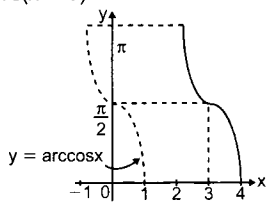
- $y = \text{arcsen}(x + 2)$



En este caso D = −2 ($D < 0$) la curva se traslada hacia la izquierda 2 unidades.

Dominio: $[-3; -1]$ $\wedge$ Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- $y = \arccos(x - 3)$



En este caso, $D = 3$ ($D > 0$) la curva se traslada hacia la derecha 3 unidades.
Dominio: $[2; 4] \wedge$ Rango: $[0, \pi]$

Resumen:
Dada un función: $y = C + A\,f^*(Bx - D)$
donde f^* representa alguna de las funciones trigonométricas inversas:
Gráficamente:

C: implica traslación vertical $\begin{cases} \text{Hacia arriba, si } C > 0 \\ \text{Hacia abajo, si } C < 0 \end{cases}$

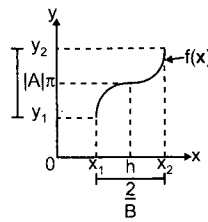
D: implica traslación horizontal $\begin{cases} \text{Hacia la derecha, si } D > 0 \\ \text{Hacia la izquierda, si } D < 0 \end{cases}$

A: implica contracción ($0 < A < 1$).
Expansión ($A > 1$) del rango de la función. Si $A < 0$ la gráfica se invierte.

B: implica contracción ($0 < B < 1$) o expansión ($B > 1$) del dominio de la función.
En caso que $B < 0$, se aplica las propiedades estudiadas anteriormente.

MÉTODO PRÁCTICO PARA HALLAR LA ECUACIÓN DE UNA CURVA

En la figura adjunta se muestra una curva cuya ecuación es:
$Y = A[\text{arcsen}B(x - h)] + k$, $B > 0$



Para determinar el valor de los parámetros A, B, "h" y "k" se procede de la siguiente manera:

$|A|\pi = y_2 - y_1$

$x_2 - x_1 = \dfrac{2}{B}$

$h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

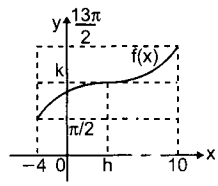
$k = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Si "f" es creciente $\Rightarrow A > 0$
Si "f" es decreciente $\Rightarrow A < 0$

Aplicando la propiedad: $\text{arcsen}x = (\pi/2) - \arccos x$, se puede dar otra forma a la ecuación dada.

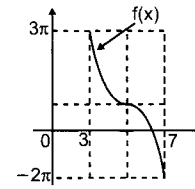
Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la siguiente curva:



Resolución:
Observa que:
$|A|\pi = \dfrac{13\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 6\pi \Rightarrow |A| = 6$
Como "f" es creciente:
$\Rightarrow A > 0 \Rightarrow A = 6$
$\dfrac{2}{B} = 10 - (-4) \Rightarrow \dfrac{2}{B} = 14 \Rightarrow B = \dfrac{1}{7}$
$h = \dfrac{-4 + 10}{2} = 3 \wedge k = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{13}{2}\pi}{2} = \dfrac{7}{2}\pi$
$y = 6\text{arcsen}\dfrac{1}{7}(x - 3) + \dfrac{7}{2}\pi$

2. En la figura adjunta la ecuación es de la forma: $y = A\arccos(Bx + D) + C$, hallar dicha ecuación.



Resolución:
Para determinar la ecuación de la curva primero planteamos nuestra ecuación.
$y = A[\text{arcsen}B(x - h)] + k$
$|A|\pi = 3\pi - (-2\pi) \Rightarrow |A|\pi = 5\pi \Rightarrow |A| = 5$
Como "f" es decreciente:
$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow A = -5$
$\dfrac{2}{B} = 7 - 3 \Rightarrow \dfrac{2}{B} = 4 \Rightarrow B = \dfrac{1}{2}$
$h = \dfrac{3 + 7}{2} = 5 \wedge k = \dfrac{-2\pi + 3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$
Ecuación:
$y = -5[\text{arcsen}(1/2)(x - 5)] + \dfrac{\pi}{2}$ ...(1)

Como en el dato se menciona al arco coseno, entonces aplica la propiedad:
$\text{arcsen}x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$
Reemplazamos en (1):
$y = -5\left[\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{2}(x - 5)\right] + \dfrac{\pi}{2}$
Luego: $y = 5\arccos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2}\right) - 2\pi$

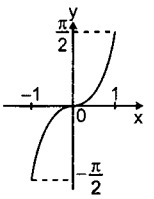
Aplicaciones:

1. Indicar el dominio, rango y graficar las siguientes funciones (observe la secuencia):
   - $y = \text{arcsen}x$
   - $y = \text{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$
   - $y = 2\text{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$
   - $y = \pi + 2\text{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$
   - $y = \pi + 2\text{arcsen}\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$

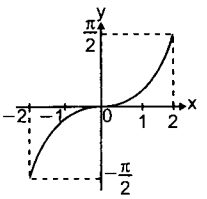
   Sugiero al lector analizar detenidamente cada una de las gráficas siguientes y que observe en cada caso que ocurre con el dominio, rango y la gráfica. Comparar los gráficos entre sí.

Resolución:

- $y = \text{arcsen}x$
  Dom: $[-1; 1]$
  Ran : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

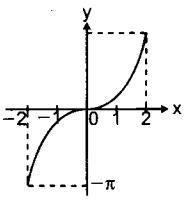


- $y = \text{arcsen}(x/2)$
  Dom: $[-2; 2]$
  Ran: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



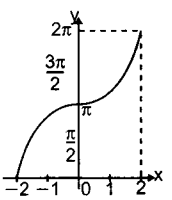
(Observar que el dominio se amplía)

- $y = 2\text{arcsen}(x/2)$
  Dom: $[-2; 2]$
  Ran: $[-\pi; \pi]$



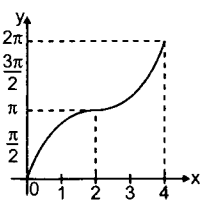
(Observar que el rango se amplía)

- $y = \pi + 2\text{arcsen}(x/2)$
  Dom: $[-2; 2]$
  Ran: $[0; 2\pi]$



(La gráfica anterior sube π unidades)

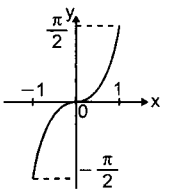
- $y = \pi + 2\text{arcsen}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$
  En este caso hay una traslación horizontal.
  $\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$
  Esto significa que la gráfica anterior se traslada horizontalmente 2 unidades a la derecha.
  Dominio:
  $-1 \le \frac{x}{2} - 1 \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow 0 \le x \le 4$
  Dom: $[0; 4]$
  Ran: $[0; 2\pi]$



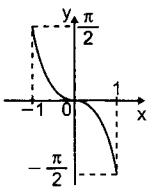
2. Graficar:
   - $y = \text{arcsen}(-x)$
   - $y = \text{arccos}(-x)$

Resolución:

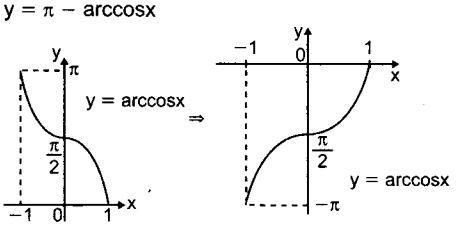
- De acuerdo a las propiedades de valores negativos sabemos que:
  $y = \text{arcsen}(-x)$ es igual a; $y = -\text{arcsen}x$
  Entonces primero graficamos:
  $y = \text{arcsen}x$ y luego multiplicamos por (-1) esto implica que la gráfica anterior se invierte.
  $y = \text{arcsen}x$



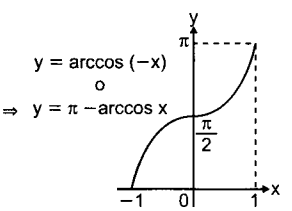
$y = \text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}x$



- Sabemos que:
  $y = \text{arccos}(-x)$ es igual a: $y = \pi - \text{arccos}x$.
  En este caso primero graficamos:
  $y = \text{arccos}x$, luego: $y = -\text{arccos}x$ y finalmente:
  $y = \pi - \text{arccos}x$



(Observa que la gráfica anterior se interviene)



(La gráfica anterior sube π unidades)

3. Analizar la función $y = \text{arcsen}(\text{sen}x)$ en cada uno de los siguientes casos:
   - $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
   - $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
   - $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$
   - $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

Resolución:

- Como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
  $\Rightarrow y = \text{arcsen}(\text{sen}x) = x$ (Propiedad)
- En este caso $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; por lo tanto no se puede aplicar la propiedad anterior. Entonces para

entender el procedimiento analizamos un ejemplo específico.

$y = \text{arcsen}\left[\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ observa que: $\frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Sabemos que:

$\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \text{sen}(\alpha_r) \Rightarrow \alpha_r = \pi - \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow y = \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

Ahora consideramos el ejercicio propuesto,

$y = \text{arcsen}(\text{sen}x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Sabemos que: $\text{sen}x = \text{sen}\alpha_r \Rightarrow \alpha_r = \pi - x$

Entonces, reemplazando se obtiene:

$y = \text{arcsen}[\text{sen}(\pi - x)] = \pi - x$

- En este caso: $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

  $\Rightarrow \text{sen}x = -\text{sen}\alpha_r \Rightarrow \alpha_r = x - \pi$

  $\Rightarrow \text{sen}x = -\text{sen}(x - \pi)$

  Luego:

  $y = \text{arcsen}[-\text{sen}(x - \pi)] = -\text{arcsen}[\text{sen}(x - \pi)]$

  $y = -(x - \pi) = \pi - x$

- En este caso $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

  $\Rightarrow \text{sen}x = -\text{sen}\alpha_r \Rightarrow \alpha_r = 2\pi - x$

  $\Rightarrow \text{sen}x = -\text{sen}(2\pi - x)$

  Luego:

  $y = \text{arcsen}[-\text{sen}(2\pi - x)] = -\text{arcsen}[\text{sen}(2\pi - x)]$

  $y = -(2\pi - x) = x - 2\pi$

4. Graficar: $y = \text{arcsen}(\text{sen}x)$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Resolución:

Haciendo el mismo análisis del ejemplo anterior se deduce:

Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = x$

Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = \pi - x$

Si $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = x - 2\pi$

Si $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = 3\pi - x$

Si $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = x - 4\pi$

Si $x \in \left[\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = 5\pi - x$

En general:

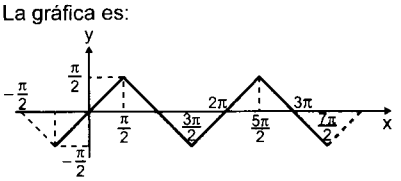
Si $x \in \left[(4n - 1)\frac{\pi}{2}; (4n + 1)\frac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = x - 2n\pi$

Si $x \in \left[(4n + 1)\frac{\pi}{2}; (4n + 3)\frac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \text{arcsen}(\text{sen}x) = (2n + 1)\pi - x$

La gráfica es:



Como se puede observar, esta función es periódica y su período mínimo es: 2π.

5. Graficar:

$y = \arctan(\tan x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R} - \left\{(2n + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \arctan(\tan x) = x$

$x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \arctan(\tan x) = \arctan[-\tan(\pi - x)] = x - \pi$

$x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \arctan(\tan x) = \arctan[\tan(x - \pi)] = x - \pi$

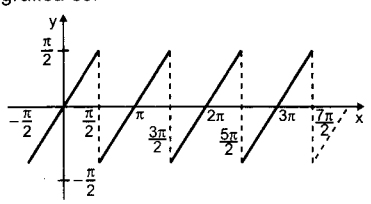
$x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \arctan(\tan x) = \arctan[-\tan(2\pi - x)] = x - 2\pi$

$x \in \left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \arctan(\tan x) = \arctan[\tan(x - 2\pi)] = x - 2\pi$

En general:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } x \in \left\langle (2n - 1)\frac{\pi}{2}; (2n + 1)\frac{\pi}{2}\right\rangle, n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \arctan(\tan x) = x - n\pi\end{array}}$$

Su gráfica es:



Como se puede observar esta función es periódica y su periodo mínimo es π

6. Demostrar que la inversa de la función:

$f(x) = -\text{sen}x$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ es la función

$g(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2}$; $x \in [-1, 1]$. Graficar $f^*(x)$.

Resolución:

Sea: $f(x)$: $y = -\text{sen}x \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y \in [-1; 1]$

$f^*(x)$: $x = -\text{sen}y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-1; 1]$

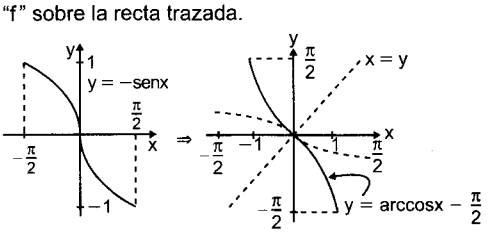
Entonces: $\arccos x = \arccos(-\text{sen}y)$

Pero: $-\text{sen}y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$; además: $\frac{\pi}{2} + y \in [0; \pi]$

entonces: $\arccos x = \arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right]$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} + y \Rightarrow y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$

La gráfica se puede hacer de diferentes formas, primero graficamos $y = -\text{sen}x$, luego trazamos la recta $y = x$, y finalmente hacemos una reflexión de "f" sobre la recta trazada.



7. Hallar el dominio de la función:
$f(x) = \text{arcsen}\sqrt{16 - x^2}$

Resolución:

Sea: $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{16 - x^2}$

$\Rightarrow 0 \leq 16 - x^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 15 \leq x^2 \leq 16$

$\therefore\ x \in [-4; -\sqrt{15}] \cup [\sqrt{15}; 4]$

8. Hallar la inversa de $f(x) = 1 - \cos x$, $x \in [0; \pi]$. Graficar.

Resolución:

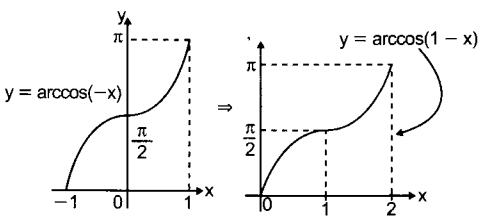
Sea: $f: y = 1 - \cos x$, $x \in [0; \pi] \Rightarrow y \in [0; 2]$

Su inversa: $x = 1 - \cos y$, $y \in [0; \pi] \Rightarrow x \in [0; 2]$

$\Rightarrow \cos y = 1 - x \Rightarrow \arccos(\cos y) = \arccos(1 - x)$

$\Rightarrow f^*: y = \arccos(1 - x)$

Para graficar f^* graficamos primero $\arccos(-x)$ y luego la gráfica de $\arccos(1 - x)$ será la traslación horizontal de la gráfica anterior en una unidad hacia la derecha.



9. Demostrar que:
Si: $2\arctan x = \arctan\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right) \Rightarrow x \in \langle -1; 1\rangle$

Resolución:

Sabemos que:

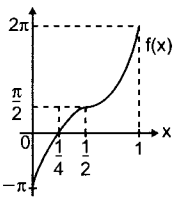
$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right) < \dfrac{\pi}{2}$; $x \neq 1$; $x \neq -1$

$-\dfrac{\pi}{2} < 2\arctan x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{4} < \arctan x < \dfrac{\pi}{4}$

Como la función arctanx es creciente:

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) < \tan(\arctan x) < \tan\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < x < 1$

10. En la figura adjunta:
$f(x) = P + Q\text{arcsen}(Bx - D)$
P, Q, B y $D \in \mathbb{R}$
Calcular el producto de dichas constantes.



Resolución:

De la figura se deduce:

$f(0) = -\pi$; $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \theta$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; $f(1) = 2\pi$

También sabemos que: $-\dfrac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}(Bx - D) \leq \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow P + Q(-\pi/2) = -\pi \ \wedge\ P + Q(\pi/2) = 2\pi$

$\Rightarrow P = \pi/2 \ \wedge\ Q = 3$

Además observamos que hay una traslación horizontal de $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ unidad a la derecha; esto significa que:

$Bx - D = 0 \Rightarrow x = \dfrac{D}{B} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2D = B$

Como $f(1) = 2\pi \Rightarrow P + Q\text{arcsen}(B - D) = 2\pi$

Reemplazando:

$\dfrac{\pi}{2} + 3\text{arcsen}(2D - D) = 2\pi \Rightarrow 3\text{arcsen}D = 2\pi - \dfrac{\pi}{2}$

$3\text{arcsen}D = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{arcsen}D = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow D = 1 \Rightarrow B = 2$

Luego: $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + 3\text{arcsen}(2x - 1)$

$\therefore\ (P)(Q)(B)(D) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)(3)(1)(2) = 3\pi$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si: $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) + \tan^{-1}(z) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, calcular el valor de:

$$T = \frac{x + y + z - xyz}{(x^2 + y^2 + z^2) + 3xyz}$$

Resolución:

$\underbrace{\arctan x}_{\alpha} + \underbrace{\arctan y}_{\theta} + \underbrace{\arctan z}_{\beta} = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = n\pi$

Donde:

$$\begin{cases} \alpha = \arctan x \Rightarrow \tan\alpha = x \\ \theta = \arctan y \Rightarrow \tan\theta = y \\ \beta = \arctan z \Rightarrow \tan\beta = z \end{cases}$$

Como: $\alpha + \beta + \theta = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\theta$

$\Rightarrow x + y + z = xyz$

$\therefore\ T = \dfrac{x + y + z - xyz}{(x^2 + y^2 + z^2) + 3xyz} \Rightarrow T = 0$

2. Si: $n \in \mathbb{R} - [-1; 1]$; simplificar:

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1 + n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1 - n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

Resolución:

Sea: $A = \arctan\left(\dfrac{1}{1 + n}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{1 - n}\right) + \arctan\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$

Pero: $\arctan\dfrac{2}{n^2} = \arctan\left[\dfrac{(n + 1) - (n - 1)}{1 + (n + 1)(n - 1)}\right]$

$\Rightarrow \arctan\left(\dfrac{2}{n^2}\right) = \arctan(n + 1) - \arctan(n - 1)$

$\Rightarrow \arctan\left(\dfrac{2}{n^2}\right) = \arctan(n + 1) + \arctan(1 - n)$

Reemplazamos en A:

$A = \text{arccot}(n + 1) + \text{arccot}(1 - n) + [\arctan(n + 1) + \arctan(1 - n)]$

$\therefore\ A = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$

3. Si: $\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c) = \frac{\pi}{2}$
Expresar en términos de a, b y c.

Resolución:

Sea: $\underbrace{\arctan a}_{\alpha} + \underbrace{\arctan b}_{\beta} + \underbrace{\arctan c}_{\theta} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$

Donde:

$\alpha = \arctan a \Rightarrow \tan\alpha = a$

$\beta = \arctan b \Rightarrow \tan\beta = b$

$\theta = \arctan c \Rightarrow \tan\theta = c$

Debido a que: $\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$, se cumple:

$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\theta + \tan\theta\tan\alpha = 1$

$\therefore\ ab + bc + ca = 1$

4. Ordenar de mayor a menor:

$S = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}2)$

$T = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}3)$

$V = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}4)$

Resolución:

Conocemos que:

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta) = \theta \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$S = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}2)$

$S = \operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(\pi - 2)] \Rightarrow S = \pi - 2$

$T = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}3)$

$T = \operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(\pi - 3)] \Rightarrow T = \pi - 3$

$V = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}4)$

$V = \operatorname{arcsen}[-\operatorname{sen}(4 - \pi)] \Rightarrow V = \pi - 4$

Luego: $S > T > V$

5. Calcular el valor de: $N = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$

Resolución:

$N = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$

Donde: $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) = \theta \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right) = \operatorname{sen}\theta$

$\frac{1}{3} = \operatorname{sen}\theta \wedge \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Luego: $N = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\theta$

$N = \frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3} \Rightarrow N = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$

6. Calcular aproximadamente el valor de:

$T = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$

Resolución:

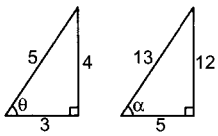
$T = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)\right] = \operatorname{sen}[\alpha + \theta]$

Donde: $\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right) = \alpha$

$\Rightarrow \operatorname{sen}[\operatorname{arcsen}(12/13)] = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$

$\operatorname{arcsen}\frac{4}{5} = \theta \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\right) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta = 4/5$



Luego: $T = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\operatorname{sen}\theta$

$T = \frac{12}{13}\times\frac{3}{5} + \frac{5}{13}\times\frac{4}{5} \Rightarrow T = \frac{56}{65}$

7. Calcular el valor de:

$S = \arccos\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Resolución:

$S = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$

Dato: $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow S = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ S = \frac{\pi}{2}$

8. Evaluar: $P = 5\operatorname{sen}(2\arctan 3)$

Resolución:

$P = 5\operatorname{sen}(2\arctan 3) = 5\operatorname{sen}2\theta$

Donde: $\arctan 3 = \theta \Rightarrow \tan\theta = 3$

$P = 5\left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}\right) \Rightarrow P = 5\times\frac{3}{5} \quad \therefore\ P = 3$

9. Si: $\tan\left(\frac{\pi}{3} + \arctan 2\sqrt{3}\right) = -\frac{3n}{5}$

calcular "n"

Resolución:

$\tan\left(\frac{\pi}{3} + \arctan 2\sqrt{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = -\frac{3}{5}n$

Donde: $\arctan(2\sqrt{3}) = \theta \Rightarrow \tan\theta = 2\sqrt{3}$

Desarrollamos la tangente compuesta:

$\frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\theta} = -\frac{3}{5}n$

$\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\times 2\sqrt{3}} = -\frac{3n}{5} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{-5} = -\frac{3n}{5}$

$\therefore\ n = \sqrt{3}$

10. Hallar el rango de la función "f" definida por:
$f(x) = 2\operatorname{arcsen}(4x - 1) + 5\arccos(3x + 1) + \pi$

Resolución:

Cálculo del dominio de "f"; para la función:

$y = 2\operatorname{arcsen}(4x - 1);\ (4x - 1) \in [-1; 1]$

$\Rightarrow -1 \le 4x - 1 \le 1 \Rightarrow 0 \le 4x \le 2$

$\Rightarrow 0 \le x \le 1/2 \Rightarrow x \in [0; 1/2]$ ...(1)

Para la función:

$y = 5\arccos(3x + 1); [3x + 1] \in [-1; 1]$

$\Rightarrow -1 \le 3x + 1 \le 1 \Rightarrow -2 \le 3x \le 0$

$\Rightarrow -2/3 \le x \le 0 \Rightarrow x \in [-2/3; 0]$ ...(2)

$\therefore$ Dominio de f: $\left[0; \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{2}{3}; 0\right]$

Dom(f) = {0}

Cálculo del rango de f.

Dado que x = 0 $\Rightarrow$ Ran(f) = {f(0)}

Donde: $f(0) = 2\underbrace{\text{arcsen}(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} + 5\underbrace{\arccos 1}_{0} + \pi$; f(0) = 0

$\therefore$ Ran(f) = {0}

11. Sea "f" una función definida por:

$f(x) = 2\text{arcsen}(2x - 1) + 3\text{arcsen}(3x + 1)$

Determinar el rango de la función y el dominio.

Resolución:

Cálculo del dominio de f.

Para la función:

$y = 2\text{arcsen}(2x - 1); (2x - 1) \in [-1; 1]$

$\Rightarrow -1 \le 2x - 1 \le 1 \Rightarrow 0 \le 2x \le 2$

$\Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow x \in [0; 1]$ ...(1)

Para la función:

$y = 3\text{arcsen}(3x + 1); (3x + 1) \in [-1; 1]$

$\Rightarrow -1 \le 3x + 1 \le 1 \Rightarrow -2 \le 3x \le 0$

$\Rightarrow -2/3 \le x \le 0 \Rightarrow x \in [-2/3; 0]$ ...(2)

$\therefore$ Dom(f) = [0; 1] $\cap$ [−2/3 ; 0] = {0}

Cálculo del rango de f:

Como: x = 0 $\Rightarrow$ Ran(f) = {f(0)}

Donde: $f(0) = 2\underbrace{\text{arcsen}(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} + 3\underbrace{\text{arcsen}(1)}_{\frac{\pi}{2}}$

$\therefore$ Ran(f) = $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

12. Calcular la diferencia entre el máximo y mínimo valor que puede tener la función:

$f(x) = (\text{arcsen}x)\left(\frac{\pi}{2} + \text{arcsen}x\right)$

Resolución:

$f(x) = (\text{arcsen}x)^2 + \frac{\pi}{2}(\text{arcsen}x)$

Completamos cuadrados:

$f(x) = (\text{arcsen}x)^2 + \frac{\pi}{2}(\text{arcsen}x) + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16}$

$f(x) = \left(\text{arcsen}x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Conocemos que: $\boxed{-\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}x \le \frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} \le \text{arcsen}x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow 0 \le \left(\text{arcsen}x + \frac{\pi}{4}\right)^2 \le \frac{9\pi^2}{16}$

$\Rightarrow \underset{f(x)_{min}}{\underset{\downarrow}{-\frac{\pi^2}{16}}} \le \underbrace{\left(\text{arcsen}x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16}}_{f(x)} \le \underset{f(x)_{max}}{\underset{\downarrow}{\frac{\pi^2}{2}}}$

$\therefore f(x)_{max} - f(x)_{min} = \frac{9\pi^2}{16}$

13. Hallar el dominio de la función "f", definida por:

$f(x) = \arccos\left(\frac{5x - 1}{3}\right)$

Resolución:

Cálculo del dominio de f

Tenemos: $\left(\frac{5x - 1}{3}\right) \in [-1; 1]$

$\Rightarrow -1 \le \frac{5x - 1}{3} \le 1 \Rightarrow -3 \le 5 \le -1 \le 3$

$\Rightarrow -2 \le 5x \le 4 \Rightarrow -\frac{2}{5} \le x \le \frac{4}{5}$

$\therefore$ Dom(f) = $\left[-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right]$

14. Hallar el dominio de la función "f", definida por:

$f(x) = 3\text{arcsen}(x + 2) + 2\arccos(x + 3)$

Resolución:

Cálculo del dominio de f

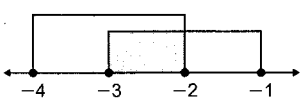
Para la función $y = 3\text{arcsen}(x + 2)$

$(x + 2) \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-3; -1]$ ...(1)

Para la función: $y = 2\arccos(x + 3)$

$(x + 3) \in [-1 ; 1] \Rightarrow x \in [-4; -2]$ ...(2)

$\Rightarrow$ Dom(f) = [−3; −1] $\cap$ [−4; −2]



$\therefore$ Dom(f) = [−3; −2]

15. Si: $f(x) = \text{sen}^{-1}(1/x)$, determinar el dominio de "f".

Resolución:

Sea: f(x) = arcsen(1/x) = arccsc(x)

Por definición: $x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

$\therefore$ Dom(f) = $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

16. Sea "f" una función definida por:

$f(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{5}\right) + \sqrt{x^2 - 2x}$

Determinar su dominio.

Resolución:

Cálculo del dominio de f.

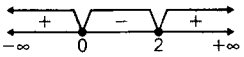
Para la función: $y = \text{arcsen}\left(\frac{x}{5}\right)$

$\left(\frac{x}{5}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-5; 5]$ ...(1)

Para la función: $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

$(x^2 - 2x) \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0$

Puntos críticos: {0; 2}

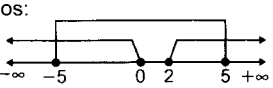


$x \in \langle -\infty; 0] \cup [2; +\infty\rangle$ ...(2)

Luego:

$\text{Dom}(f) = [-5; 5] \cap \{\langle -\infty; 0] \cup [2; +\infty\rangle\}$

Graficamos:



$\therefore$ Dom(f) = $[-5; 0] \cup [2; 5]$

17. Si "f" es la función definida por:

$f(x) = \left|\arccos x - \frac{\pi}{2}\right|$

Indicar cuántas proposiciones son verdaderas:

I. "f" es creciente en $\langle -1; 0\rangle$

II. El rango de "f" es $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

III. "f" es creciente en todo su dominio.

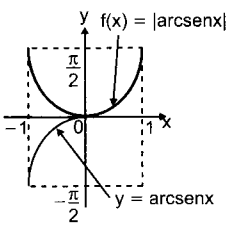
IV. La gráfica de "f" es simétrica respecto al eje Y.

Resolución:

$\arccos x - \frac{\pi}{2} = -\text{arcsen}x$

$f(x) = |-\text{arcsen}x| \Rightarrow f(x) = |\text{arcsen}x|$

Graficamos:



Luego de acuerdo al gráfico, las proposiciones serán:

I. "f" es creciente en $\langle -1; 0\rangle$: Falso

II. El rango de "f" es: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: Verdadero

III. "f" es creciente en todo su dominio. : Falso

IV. La gráfica de f es simétrica respecto al eje Y. : Verdadero

$\therefore$ Solo hay 2 verdaderos.

18. Determinar el dominio de "f", si:

$f(x) = \tan^{-1}\sqrt{2x - x^2}$

Resolución:

Sea: $f(x) = \arctan\sqrt{2x - x^2}$

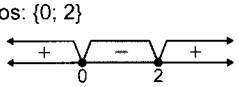
Cálculo del dominio de f

Tenemos:

$\sqrt{2x - x^2} \geq 0 \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0$

$x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow x(x - 2) \leq 0$

Puntos críticos: {0; 2}



$\therefore$ Dom(f) = [0; 2]

19. En qué intervalo del eje X, la función:

$f(x) = \sqrt{|\arctan x| - \left|\pi\sqrt{3}\frac{x}{9}\right|}$, está definida

Resolución:

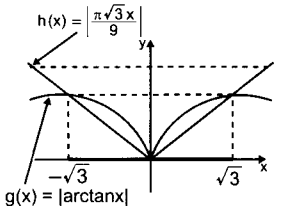
Cálculo del dominio de f.

tenemos que: $\sqrt{|\arctan x| - \left|\pi\sqrt{3}\frac{x}{9}\right|} \geq 0$

$|\arctan x| - \left|\frac{\pi\sqrt{3}x}{9}\right| \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{|\arctan x|}_{g(x)} \geq \underbrace{\left|\frac{\pi\sqrt{3}x}{9}\right|}_{h(x)} \Rightarrow g(x) \geq h(x)$

Resolvemos la inecuación, gráficamente.



Del gráfico: $g(x) \geq h(x)$ cuando: $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

$\therefore$ Dom(f) = $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

20. Hallar el dominio de la función "f", definida por:

$f(x) = \sqrt{\text{arcsen}x - \arctan x}$

Resolución:

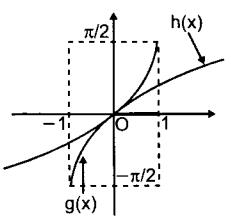
Cálculo del dominio de f

$\sqrt{\text{arcsen}x - \arctan x} \geq 0$

$\Rightarrow \text{arcsen}x - \arctan x \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\text{arcsen}x}_{g(x)} \geq \underbrace{\arctan x}_{h(x)}$

Resolvemos la inecuación gráficamente



Notemos que $g(x) \geq h(x)$ cuando: $x \in [0; 1]$

$\therefore$ Dom(f) = [0; 1]

21. Sea "f" la función definida por:

$f(x) = \arccos x - \sqrt{\arctan x - \text{arccot}x}$

Hallar el dominio de "f".

Resolución:

Dato:

$f(x) = \arccos x - \sqrt{\arctan x - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}$

$f(x) = \arccos x - \sqrt{2\arctan x - \frac{\pi}{2}}$

Cálculo del dominio de f

De la función:

$y = \arccos x$: $x \in [-1; 1]$ ...(1)

De la función: $y = \sqrt{2\arctan x - \frac{\pi}{2}}$

$2\arctan x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \Rightarrow \arctan x \geq \frac{\pi}{4}$

$\underbrace{\tan(\arctan x)}_{x} \geq \underbrace{\tan\frac{\pi}{4}}_{1} \Rightarrow x \in [1; +\infty\rangle$ ...(2)

De (1) ∧ (2): $\text{Dom}(f) = [-1; 1] \cap [1; +\infty\rangle$

$\therefore \text{Dom}(f) = \{1\}$

22. Determinar el rango de la función "f", definida por:

$f(x) = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}} + \arcsin x$

Resolución:

Cálculo del domino de f

De la función: $y = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$

$\arctan x - \frac{\pi}{4} \geq 0 \Rightarrow \arctan x \geq \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \underbrace{\tan(\arctan x)}_{x} \geq \underbrace{\tan\frac{\pi}{4}}_{f} \Rightarrow x \in [1; +\infty\rangle$ ...(1)

De la función: $y = \arcsin x \Rightarrow x \in [-1; 1]$ ...(2)

$\text{Dom}(f) = [1; +\infty\rangle \cap [-1; 1] \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{1\}$

Cálculo del rango de f

Como: $x = 1 \Rightarrow \text{Ran}(f) = \{f(1)\}$

$f(1) = \underbrace{\sqrt{\arctan 1 - \frac{\pi}{4}}}_{0} + \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \text{Ran}(f) = \{\pi/2\}$

23. Sea la función "f", definida por:

$f(x) = \sqrt{|\tan^{-1}(x)| - |\text{sen}^{-1}(x)|}$

En cuántos puntos la gráfica de "f" intersecta al eje de abcisas.

Resolución:

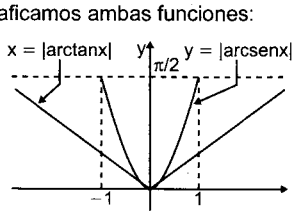
Sea: $f(x) = \sqrt{|\tan^{-1}(x)| - |\text{sen}^{-1}(x)|}$

cada vez que f intersecta el eje de abscisa. $f(x) = 0$

$\sqrt{|\arctan x| - |\arcsin x|} = 0$

$\Rightarrow |\arctan x| = |\arcsin x|$

Para determinar el número de raíces de esta ecuación graficamos ambas funciones:



Notemos que las curvas de ambas funciones solo se intersectan cuando $x = 0$

Luego la ecuación $|\arctan x| = |\arcsin x|$ solo admite una solución que es: $x = 0$

Finalmente la ojiva de f(x) solo corta al eje de absisa en el punto (0; 0)

24. Hallar el rango de la función "f", definida por:

$f(x) = \arccos x + \text{arccot} x$.

Resolución:

Cálculo del dominio de f.

Para la función:

$g = \arccos x$: $x \in [-1; 1]$

$y = \text{arccot} x$: $x \in \mathbb{R}$

$\therefore \text{Dom}(f) = [-1; 1] \cap \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom}(f) = [-1; 1]$

Calculo del rango de f.

Conocemos que:

$y = \arccos x$: (f decreciente)

$y = \text{arccot} x$: (f decreciente)

$\therefore f(x) = \arccos x + \text{arccot} x$: (f decreciente)

Luego:

Como: $x \in [-1; 1] \Rightarrow \text{Ran}(f) = [f(1); f(-1)]$

Donde:

$f(1) = \underbrace{\arccos 1}_{0} + \underbrace{\text{arccot} 1}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

$f(-1) = \underbrace{\arccos(-1)}_{\pi} + \underbrace{\text{arccot}(-1)}_{\frac{3\pi}{4}} = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore \text{Ran}(f) = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

25. Hallar el dominio de la función "f", definida por:

$f(x) = \text{arcsen}(2x + 1) + \text{arcsec}(2x - 1)$

Resolución:

Cálculo del dominio de f

Para la función:

$y = \text{arcsen}(2x + 1)$; $(2x + 1) \in [-1; 1]$

$\Rightarrow -1 \leq 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 0$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$ ...(1)

Para la función:

$y = \text{arcsec}(2x - 1)$; $(2x - 1) \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

$\Rightarrow \underbrace{2x - 1 \leq -1}_{x \leq 0} \vee \underbrace{2x - 1 \geq 1}_{x \geq 1}$

$\Rightarrow x \in \langle -\infty; 0] \cup [1; +\infty\rangle$ ...(2)

De (1) ∧ (2):

$\text{Dom}(f) = [-1; 0] \cap \{\langle -\infty; 0] \cup [1; +\infty\rangle\}$

$\therefore \text{Dom}(f) = [-1; 0]$

26. Determinar el domino de la función "f", definida por:

$f(x) = \pi + \arccos x + \text{arcsec} x$

Resolución:

Cálculo del dominio de f

Para la función: $y = \arccos x$; $x \in [-1; 1]$

$y = \text{arcsec} x$; $x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

$\Rightarrow \text{Dom}(f) = [-1; 1] \cap \{\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle\}$

$\therefore \text{Dom}(f) = \{-1; 1\}$

27. Dada la función "f", definida por:
$f(x) = \text{arcsen}x + \text{arctan}x + \text{arcsec}x$
Hallar el rango de "f"

Resolución:

Cálculo del dominio f para las funciones:
$y = \text{arcsen}x$: $x \in [-1; 1]$
$y = \text{arctan}x$: $x \in \mathbb{R}$
$y = \text{arcsec}x$: $x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
$\text{Dom}(f) = [-1; 1] \cap \mathbb{R} \cap [\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle\}$
$\text{Dom}(f) = \{-1; 1\}$
Cálculo del rango de f
Como: $x = \{-1; 1\} \Rightarrow \text{Ran}(f) = \{f(-1); f(1)\}$
Donde:

$$f(-1) = \underbrace{\text{arcsen}(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\text{arctan}(-1)}_{-\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\text{arcsec}(-1)}_{\pi}$$

$$f(-1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f(1) = \underbrace{\text{arcsen}1}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\text{arctan}1}_{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\text{arcsec}1}_{0}$$

$$f(1) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

28. Hallar el dominio de la función "f" definida por:
$f(x) = \text{sen}^{-1}(x) + \cos^{-1}(2x) + \tan^{-1}(4x) + \sec^{-1}(5x) + \csc x^{-1}(6x)$

Resolución:

$f(x) = \text{arcsen}x + \text{arccos}2x + \text{arctan}x + \text{arcsec}5x + \text{arccsc}6x$
Para el cálculo del dominio de "f", determinamos el dominio de cada función que lo comprende:

$y = \text{arcsen}x$: $x \in [-1; 1]$ ...(1)

$y = \text{arccos}2x$: $2x \in [-1; 1] \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ...(2)

$y = \text{arctan}4x$: $4x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ ...(3)

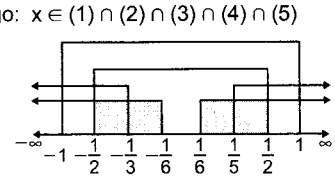
$y = \text{arcsec}5x$: $5x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

$$x \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right\rangle \quad ...(4)$$

$y = \text{arccsc}6x$: $6x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

$$\Rightarrow x \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right\rangle \quad ...(5)$$

Luego: $x \in (1) \cap (2) \cap (3) \cap (4) \cap (5)$



$$\therefore \text{Dom}(f) = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$$

29. Hallar el rango de la función "f", definida por:
$f(x) = (\text{arccot}x - \text{arccot}x)^2 - (\text{arccot}x + \text{arctan}x)^2$

Resolución:

Con el dato: $f(x) = -4(\text{arccot}x)(\text{arctan}x)$

$$f(x) = -4\text{arccot}x\left(\frac{\pi}{2} - \text{arccot}x\right)$$

$$f(x) = 4\text{arccot}^2x - 2\pi\text{arccot}x$$

Completamos cuadrados:

$$f(x) = 4\left(\text{arccot}^2x - \frac{\pi}{2}\text{arccot}x + \frac{\pi^2}{16}\right) - \frac{\pi^2}{4}$$

$$f(x) = 4\left(\text{arccot}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}$$

Cálculo del rango de f
Conocemos que: $0 < \text{arccot}x < \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \text{arccot}x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(\text{arccot}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 < \frac{9\pi^2}{16}$$

$$\Rightarrow 0 \le 4\left(\text{arccot}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 < \frac{9\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{4} \le \underbrace{4\left(\text{arc}\cot x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}}_{f(x)} < 2\pi^2$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi^2}{4}; 2\pi^2\right\rangle$$

30. Determinar el rango de la función "f", definida por:

$$f(x) = \frac{\pi}{\text{arcsen}x + \text{arccos}x + \text{arctan}x}$$

Resolución:

Cálculo del dominio f:
$y = \text{arcsen}x$; $x \in [-1; 1]$ ...(1)
$y = \text{arccos}x$; $x \in [-1; 1]$ ...(2)
$y = \text{arctan}x$; $x \in \mathbb{R}$ ...(3)
de (1) ∩ (2) ∩ (3): $\text{Dom}(f) = [-1; 1]$
Cálculo del rango de f

$$f(x) = \frac{\pi}{\underbrace{\text{arcsen}x + \text{arccos}x}_{\frac{\pi}{2}} + \text{arctan}x} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \text{arctan}x}$$

Pero como: $x \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \le x \le 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{arctan}(-1)}_{-\frac{\pi}{4}} \le \text{arctan}x \le \underbrace{\text{arctan}1}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \text{arctan}x + \frac{\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 4 \ge \underbrace{\frac{\pi}{\text{arctan}x + \frac{\pi}{2}}}_{f(x)} \ge \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \left[\frac{4}{3}; 4\right]$$

31. Dada la función "f", definida por: $f(x) = 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$, halle la intersección entre el dominio y el rango de "f".

Resolución:

$$f(x) = 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$$

Cálculo del dominio:

f está definida a condición que: $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$

$\Rightarrow -2 \le x \le 2 \quad \therefore \text{Dom}(f) = [-2; 2]$

Cálculo del rango:

Se sabe que: $-\frac{\pi}{2} \le \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \le \frac{\pi}{2}, \forall x \in \text{Dom}(f)$

$(\times 2)$: $-\pi \le 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \le \pi$

$(+\pi)$: $0 \le 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \pi \le 2\pi$

$\Rightarrow 0 \le f(x) \le 2\pi \quad \therefore \text{Ran}(f) = [0; 2\pi]$

Finalmente: $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = [0; 2]$

32. Dada la función "f", definida por:

$f(x) = 3\text{arcsen}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$, halle Dom(f) + Ran(f)

Resolución:

$f(x) = 3\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

Cálculo del dominio

Sabemos que: $x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$(+1)$: $x^2 + 1 \ge 1$

Invirtiendo resulta: $0 < \frac{1}{x^2+1} \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Observemos que:

$\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \in \langle 0; 1] \subset$ dominio del seno inverso

$\Rightarrow$ f está definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$

$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Cálculo del rango:

Hemos visto líneas arriba que: $0 < \frac{1}{x^2+1} \le 1$

Como la función seno inverso o arco seno es creciente se cumple:

$\underbrace{\text{arcsen}0}_{0} < \text{arcsen}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \le \underbrace{\text{arcsen}1}_{\frac{\pi}{2}}$

$(\times 3)$: $0 < 3\text{arcsen}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \le \frac{3\pi}{2}$

$0 < f(x) \le \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \text{Ran}(f) = \left\langle 0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Finalmente tenemos:

$\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = \left\langle 0; \frac{3\pi}{2}\right]$

33. Determine el valor de: $W = \frac{1}{2}\left(\frac{\arccos\frac{41}{49}}{\text{arcsen}\frac{2}{7}}\right)$

Resolución:

$W = \dfrac{\arccos\frac{41}{49}}{2\text{arcsen}\frac{2}{7}} \qquad \ldots(I)$

Sea $\theta = 2\text{arcsen}\frac{2}{7}$

Aplicando coseno a ambos miembros se obtiene:

$\cos\theta = \cos\left(2\text{arcsen}\frac{2}{7}\right)$

$\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2\left(\text{arcsen}\frac{2}{7}\right)$

Atención: $\text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{2}{7}\right) = \frac{2}{7}$

$\cos\theta = 1 - 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{41}{49}$

$\Rightarrow \theta = \arccos\frac{41}{49} \qquad \ldots(II)$

Reemplacemos (II) en (I): $W = \frac{\theta}{\theta} = 1$

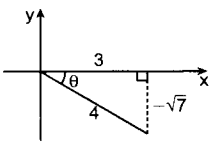
34. Calcule $\cot\left[2\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\right]$

Resolución:

Sea: $x = \cot\left[\underbrace{2\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)}_{\theta}\right]$

$x = \cot(2\theta) = \dfrac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} \qquad \ldots(I)$

Si: $\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{-\sqrt{7}}{4}, \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle$



Vemos que: $\tan\theta = \frac{-\sqrt{7}}{3} \qquad \ldots(II)$

Reemplacemos (II) en (I):

$x = \dfrac{1 - \left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{7}}{21}$

35. Halle el dominio de la función definida por:

$f(x) = \text{sen}^{-1}\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \text{sen}^{-1}\sqrt{x - \frac{1}{2}}$

Resolución:

$f(x) = \text{sen}^{-1}\underbrace{\sqrt{x + \frac{1}{2}}} + \text{sen}^{-1}\underbrace{\sqrt{x - \frac{1}{2}}}$

Ambas raíces deben pertenecer a $[-1; 1]$

Luego, para que "f" esté definida es necesario que:

$0 \le x + \frac{1}{2} \le 1 \;\wedge\; 0 \le x - \frac{1}{2} \le 1$

$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \;\wedge\; \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

Donde resulta: $x = \frac{1}{2}$

$\therefore \text{Dom}(f) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

36. Sea "f" y "g" funciones definidas por:

$f(x) = 4\text{arcsen}(6x + 1) \wedge g(x) = f\left(\frac{x}{3} - 1\right)$; entonces el dominio de "g" está dado por.

Resolución:

$f(x) = 4\text{arcsen}(6x + 1)$

$g(x) = f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 4\text{arcsen}\left[6\left(\frac{x}{3} - 1\right) + 1\right]$

$g(x) = 4\text{arcsen}(2x - 5)$

Para que "g" esté definida se debe cumplir:

$-1 \le 2x - 5 \le 1$

$(+5)$: $4 \le 2x \le 6 \Rightarrow (\div 2)$: $2 \le x \le 3$

$\therefore$ Dom(g) = [2; 3]

37. Halle el dominio de: $f(x) = \sqrt{x} + \text{arcsen}\sqrt{x}$

Resolución:

$f(x) = \sqrt{x} + \text{arcsen}\sqrt{x}$

$\sqrt{x}$ existe siempre que: $x \ge 0$

$\text{arcsen}\sqrt{x}$ está definida siempre que: $0 \le \sqrt{x} \le 1$

Por lo tanto, "f" está definida a condición de que:

$x \ge 0 \wedge 0 \le \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$

$\therefore$ Dom(f) = [0; 1]

38. Halle el rango de la función "f", definida por:

$f(x) = \text{arcsen}\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) + \text{arcsen}\left(x - \frac{1}{4}\right)$

Resolución:

Primero determinamos el dominio:

$\Rightarrow 0 \le x + \frac{1}{4} \le 1 \wedge 0 \le x - \frac{1}{4} \le 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \wedge \frac{1}{4} \le x \le \frac{5}{4}$

Luego el Dom(f) $= \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right] \cap \left[\frac{1}{5}; \frac{5}{4}\right] = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$

Ahora determinamos el rango:

Como: $\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{x + \frac{1}{4}} \le 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \text{arcsen}\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) \le \frac{\pi}{2}$ ...(1)

$0 \le \sqrt{x - \frac{1}{4}} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \le \text{arcsen}\left(\sqrt{x - \frac{1}{4}}\right) \le \frac{\pi}{4}$...(2)

Luego, como la función arcsen(x) es creciente para: $-1 \le x \le 1$, entonces, realizando (1) + (2):

$\frac{\pi}{4} \le \text{arcsen}\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) + \text{arcsen}\left(\sqrt{x - \frac{1}{4}}\right) \le \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ Ran(f) $= \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

39. Si se cumple: $\frac{\text{arcsenx}}{\text{arcseny}} = \frac{1}{2} \wedge \frac{\text{arccosx}}{\text{arccosy}} = \frac{3}{2}$

Halle el valor de: M = y(arcsenx)

Resolución:

De la primera y segunda condición:

2arcsenx = arcseny ...(1)

2arccosx = 3arccosy ...(2)

$\therefore$ (1) + (2)

$2\underbrace{(\text{arcsenx} + \text{arccos}\,x)}_{\pi/2} = \underbrace{(\text{arcseny} + \text{arccos}\,y)}_{\pi/2} + 2\text{arccosy}$

$\Rightarrow 2\text{arccosy} = \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{arccosy} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego en (1):

$2\text{arcsenx} = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{arcsenx} = \frac{\pi}{8}$

$\therefore M = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}$

40. Si arcsen(1/x) = arccos(2/x), hallar x.

Resolución:

Haciendo:

$\theta = \text{arcsen}(1/x) \Rightarrow \text{sen}\theta = 1/x$

$\theta = \text{arccosy}(2/x) \Rightarrow \cos\theta = 2/x$

Además: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Reemplazando: $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 1$

$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5}$; no es solución

$x = \sqrt{5}$; si es solución

41. Sea la función "f" definida por:

$f(x) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1 + \text{senx}}{2}\right);\ x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Calcule el rango de f.

Resolución:

$f(x) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1 + \text{senx}}{2}\right);\ x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Dado que la función seno es creciente en $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$; se cumple que:

si: $0 \le x \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}0 \le \text{senx} \le \text{sen}\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 0 \le \text{senx} \le 1/2$

Donde, sumando 1 y luego dividiendo entre 2, se obtiene:

Como la función seno inverso es creciente en todo su dominio, se cumple que si $a \le x \le b$

$\Rightarrow \text{sen}^{-1}a \le \text{sen}^{-1}x \le \text{sen}^{-1}b$

$\Rightarrow \underbrace{\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\pi}{6}} \le \underbrace{\text{sen}^{-1}\left(\frac{1 + \text{senx}}{2}\right)}_{f(x)} \le \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore$ Ran(f) $= \left[\frac{\pi}{6}; \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$

42. Si "f" es una función definida por:

$f(x) = \frac{\pi}{4}\text{arcsen}\left(8x - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}$

cuyo dominio tiene la forma [a; b]; entonces al calcular el valor de F = 40a + 10b, se obtiene:

Resolución:

$f(x) = \frac{\pi}{4}\text{arcsen}\left(8x - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}$

"f" está definida siempre que: $-1 \le 8x - \frac{3}{5} \le 1$

$\left(+\frac{3}{5}\right)$: $-\frac{2}{5} \le 8x \le \frac{8}{5}$

$(\div 8)$: $-\frac{1}{20} \le x \le \frac{1}{5} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \left[\underset{a}{-\frac{1}{20}}; \underset{b}{\frac{1}{5}}\right]$

Nos piden: $F = 40a + 10b$

$F = 40\left(-\frac{1}{20}\right) + 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow F = 0$

43. Si "f" es la función definida por:
$f(x) = \text{sen}^{-1}(3x - 2) + 2\text{sen}^{-1}(2x - 3)$
Hallar su dominio

Resolución:

$f(x) = \text{sen}^{-1}(3x - 2) + 2\text{sen}^{-1}(2x - 3)$

"f" está definida a condición de que:

$-1 \le 3x - 2 \le 1 \ \wedge\ -1 \le 2x - 3 \le 1$

$1 \le 3x \le 3 \ \wedge\ 2 \le 2x \le 4$

$\frac{1}{3} \le x \le 1 \ \wedge\ 1 \le x \le 2$

De donde se concluye que: $x = 1$

$\therefore\ \text{Dom}(f) = \{1\}$

44. Sea la función "f" definida por:
$f(x) = \frac{6}{\pi}\text{arcsen}\left(|x| + \frac{1}{2}\right);\ x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\rangle$
Hallar el rango.

Resolución:

De los datos: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \le |x| < \frac{1}{2}$

$\left(+\frac{1}{2}\right)$: $\frac{1}{2} \le |x| + \frac{1}{2} < 1$

Apliquemos el teorema:

Si: $a \le x \le b \ \Rightarrow\ \text{arcsen}a \le \text{arcsen}x \le \text{arcsen}b$

$\Rightarrow \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \le \text{arcsen}\left(|x| + \frac{1}{2}\right) < \text{arcsen}(1)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \text{arcsen}\left(|x| + \frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$

$\left(\times\frac{6}{\pi}\right)$: $1 \le \underbrace{\frac{6}{\pi}\text{arcsen}\left(|x| + \frac{1}{2}\right)}_{f(x)} < 3$

$\therefore\ \text{Ran}(f) = [1; 3\rangle$

45. Dada la función "f" definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arccos}[5(x - |x + 3| - 5)]$$

Determine el dominio.

Resolución:

"f" está definida a condición de que:

$-1 \le 5(x - |x + 3| - 5) \le 1$

Dividiendo entre 5 se obtiene:

$-\frac{1}{5} \le x - |x + 3| - 5 \le \frac{1}{5}$ ...(I)

Analicemos dos casos:

I. si $x + 3 \ge 0$, en (I):

$-\frac{1}{5} \le x - (x + 3) - 5 \le \frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5} \le -8 \le \frac{1}{5}$; lo cual es absurdo.

II. si $x + 3 < 0$, en (I):

$-\frac{1}{5} \le x - [-(x + 3)] - 5 \le \frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5} \le 2x - 2 \le \frac{1}{5}$

Sumando 2 y luego dividiendo entre 2 se consigue:

$\frac{9}{5} \le 2x \le \frac{11}{5} \Rightarrow \frac{9}{10} \le x \le \frac{11}{10}$

$\therefore\ \text{Dom}(f) = \left[\frac{9}{10}; \frac{11}{10}\right]$

46. Halle el rango de la función "f" definida por:
$f(x) = \text{arcsen}(4x - 1) + \text{arccos}(2x - 2) + \frac{3\pi}{2}$

Resolución:

Para que "f" esté definida se debe cumplir:

$-1 \le 4x - 1 \le 1 \ \wedge\ -1 \le 2x - 2 \le 1$

$0 \le 4x \le 2 \ \wedge\ 1 \le 2x \le 3$

$0 \le x \le \frac{1}{2} \ \wedge\ \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

Observemos que x asume solo un valor: $x = \frac{1}{2}$

Es decir, el dominio de "f" tiene un solo elemento.

Luego, el rango se halla evaluando:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{arcsen}(1) + \text{arccos}(-1) + \frac{3\pi}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} = 3\pi$

$\therefore\ \text{Ran}(f) = \{3\pi\}$

47. Hallar x, si:
$\arctan(1/4x) + \arctan(x/(1 - x)) + \arctan(1 + x)/x = \pi/2$

Resolución:

I) Haciendo:

$\theta = \arctan\left(\frac{1}{4x}\right) \Rightarrow \tan\theta = 1/4x$

$\Rightarrow \cot\theta = 4x$

$\alpha = \arctan\left(\frac{x}{1 - x}\right) \Rightarrow \tan\alpha = x/(1 - x)$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1 - x}{x}$

$\beta = \arctan\left(\frac{1 + x}{x}\right) \Rightarrow \tan\beta = \frac{1 + x}{x}$

$\Rightarrow \cot\beta = \frac{x}{1 + x}$

II) $\theta + \alpha + \beta = \pi/2$ (dato)

$\Rightarrow \cot\theta + \cot\alpha + \cot\beta = \cot\theta\cot\alpha\cot\beta$

Reemplazando:

$4x + \frac{1 + x}{x} + \frac{x}{1 + x} = 4x\left(\frac{1 - x}{x}\right)\left(\frac{x}{1 + x}\right)$

$x^3 = -1/8 \quad \therefore\ x = -1/2$

48. Halle el dominio de la función "f" definida por:
$f(x) = 2\text{arccos}(x + |x|) + \frac{\pi}{3}$

Resolución:

f está definida siempre que:

$-1 \le x + |x| \le 1$ ...(I)

Analicemos dos casos:

i) Si $x \ge 0$, en (I):

$-1 \le x + x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2x \le 1$

$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

Dado que $x \ge 0$, entonces:

$0 \le x \le \frac{1}{2}$ ...(II)

ii) Si $x < 0$ en (I):

$-1 \le x + (-x) \le 1 \Rightarrow -1 \le 0 \le 1$

Lo cual es verdadero $\forall x < 0$; es decir para:

$-\infty < x < 0$ ...(III)

(II) ∪ (III): $-\infty < x \le \frac{1}{2}$ $\therefore$ Dom(f) = $\left\langle -\infty; \frac{1}{2}\right]$

49. Determinar el valor de:

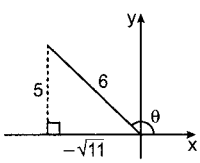
$E = \tan\left[2\arccos\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)\right]$

Resolución

$E = \tan\left[2\underbrace{\arccos\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)}_{\theta}\right]$ ...(I)

Sea: $\theta = \arccos\left(\frac{-\sqrt{11}}{6}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-\sqrt{11}}{6}; \theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$



Vemos que: $\tan\theta = \frac{5}{-\sqrt{11}} = \frac{-5}{\sqrt{11}}$

En (I), tenemos: $E = \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\therefore E = \frac{2\left(\frac{-5}{\sqrt{11}}\right)}{1-\left(\frac{-5}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{5\sqrt{11}}{7}$

50. Halle el dominio de la función definida por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\text{arcsen}|x| - \arccos|x|}{\text{arc cot}\sqrt{x}}}$$

Resolución:

Para que "f" esté definida, en primer lugar se debe cumplir: $x \ge 0$; de lo contrario no existe $\sqrt{x}$

f es equivalente a: $f(x) = \sqrt{\frac{\text{arcsen}x - \arccos x}{\text{arc cot}\sqrt{x}}}$

Notemos que $\text{arccot}(\sqrt{x}) > 0$, pues se sabe que todo arco cotangente pertenece al intervalo $\langle 0; \pi\rangle$. La condición para que "f" exista queda reducida a:

$\text{arcsen}x - \arccos x \ge 0,\ x \ge 0$

$\text{arcsen}x - \left(\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}x\right) \ge 0$

$2\text{arcsen}x \ge \pi/2 \Rightarrow \text{arcsen}x \ge \pi/4$

Como la función arco seno está acotada superiormente: $\frac{\pi}{2} \ge \text{arcsen}x \ge \frac{\pi}{4}$

Dado que la función seno es creciente:

$\text{sen}\frac{\pi}{2} \ge \text{sen}(\text{arcsen}x) \ge \text{sen}\frac{\pi}{4}$

$1 \ge x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore$ Dom(f) = $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$

51. Simplificar: $F = \text{arcsen}\left(\cos\frac{\pi}{15}\right) + \arccos\left(\text{sen}\frac{12\pi}{15}\right)$

Resolución:

$F = \text{arcsen}\left(\cos\frac{\pi}{15}\right) + \arccos\left(\text{sen}\frac{4\pi}{5}\right)$

$\cos\frac{\pi}{15} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \text{sen}\left(\frac{13\pi}{30}\right)$

$\text{sen}\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$

$\text{sen}\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Reemplacemos en F:

$F = \text{arcsen}\left[\text{sen}\left(\frac{13\pi}{30}\right)\right] + \arccos\left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]$

Apliquemos los teoremas:

$\text{arcsen}(\text{sen}x) = x,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos(\cos x) = x,\ \forall x \in [0; \pi]$

$\therefore F = \frac{13\pi}{30} + \frac{3\pi}{10} = \frac{11\pi}{15}$

52. Dada la función:

$f(x) = \text{arcsen}(2x - 1) + \arccos(2x + 1)$,

Hallar Dom(f) ∪ Ran(f)

Resolución:

$f(x) = \text{arcsen}(2x - 1) + \arccos(2x + 1)$

f existe siempre que se cumpla dos condiciones:

$-1 \le 2x - 1 \le 1 \ \wedge\ -1 \le 2x + 1 \le 1$

$0 \le 2x \le 2 \ \wedge\ -2 \le 2x \le 0$

$0 \le x \le 1 \ \wedge\ -1 \le x \le 0$

Donde se concluye que: $x = 0$

$\Rightarrow$ Dom(f) = {0}

El rango de "f" se halla evaluando:

$f(0) = \text{arcsen}(-1) + \arccos(1)$

$f(0) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Ran(f) = $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

$\therefore$ Dom(f) ∪ Ran(f) = $\left\{0; -\frac{\pi}{2}\right\}$

53. Calcule:

$E = 2\arccos(-1) + \frac{1}{2}\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arctan(-1)$

Resolución:

Sea: $\arccos(-1) = \pi$

$\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$\arctan(-1) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$

Reemplazando se obtiene:

$E = 2\pi + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore\ E = \frac{13\pi}{8}$

54. Si: $\frac{\text{sen}^{-1}(a)}{\text{sen}^{-1}(b)} = \frac{2}{3}$; $\frac{\cos^{-1}(a)}{\cos^{-1}(b)} = \frac{4}{3}$

Calcule: $M = \sec^{-1}(2a) + \csc^{-1}(2b)$

Resolución:

Aplicamos: $\text{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$; $x \in [-1; 1]$

De $\frac{\text{sen}^{-1}(a)}{\text{sen}^{-1}(b)} = \frac{2}{3}$; se obtiene:

$\text{sen}^{-1}(a) = \frac{2}{3}\text{sen}^{-1}(b) \quad ...(I)$

De $\frac{\cos^{-1}(a)}{\cos^{-1}(b)} = \frac{4}{3}$; se obtiene:

$\cos^{-1}(a) = \frac{4}{3}\cos^{-1}(b) \quad ...(II)$

Sumemos (I) + (II):

$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\text{sen}^{-1}(b) + \frac{4}{3}\cos^{-1}(b)$

$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\text{sen}^{-1}(b) + \frac{4}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1}(b)\right]$

$\frac{2}{3}\text{sen}^{-1}(b) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}^{-1}(b) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Reemplazando en (I):

$\text{sen}^{-1}(a) = \frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{sen}^{-1}(a) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Finalmente: $M = \sec^{-1}(2a) + \csc^{-1}(2b)$

$M = \sec^{-1}(1) + \csc^{-1}(\sqrt{2}) = 0 + \frac{\pi}{4}$

$M = \pi/4$

55. Halle todos los valores posibles para x, tal que:

$\text{arcsen}\left[(\text{sen}6x)\left(\frac{2\cos^3 x}{3\cos 3x} - \frac{2\text{sen}^3 x}{3\text{sen}3x} - \frac{1}{3}\right)\right] = 2x$

Resolución:

Para que esta ecuación sea posible se debe cumplir en primer lugar:

$-\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \quad ...(I)$

También se debe cumplir:

$\cos 3x \ne 0 \ \wedge\ \text{sen}3x \ne 0$

$3x \ne \pm\pi/2 \ \wedge\ 3x \ne 0; \pm\pi$

$x \ne \pm\pi/6 \ \wedge\ x \ne 0; \pm\ \pi/3 \quad ...(II)$

De (I) y (II): $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] - \left\{-\frac{\pi}{6}; 0; \frac{\pi}{6}\right\}$

Luego, la ecuación dada equivale a:

$(\text{sen}6x)\left(\frac{2\cos^3 x}{3\cos 3x} - \frac{2\text{sen}^3 x}{3\text{sen}3x} - \frac{1}{3}\right) = \text{sen}2x$

$2(\text{sen}3x\cos 3x)\left(\frac{2\cos^3 x\text{sen}3x - 2\text{sen}^3 x\cos 3x - \text{sen}3x\cos 3x}{3\cos x\text{sen}3x}\right) = \text{sen}2x$

$4\cos^3 x\text{sen}3x - 4\text{sen}^3 x\cos 3x - 2\text{sen}3x\cos 3x = 3\text{sen}2x$

$(3\cos x + \cos 3x)\text{sen}3x - (3\text{sen}x - \text{sen}3x)\cos 3x - \text{sen}2(3x) = 3\text{sen}2x$

$3(\cos x\text{sen}3x - \text{sen}x\cos 3x) + 2\text{sen}3x\cos 3x - \text{sen}2(3x) = 3\text{sen}2x$

$3\text{sen}(3x - x) = 3\text{sen}2x \Rightarrow \text{sen}2x = \text{sen}2x$

Lo cual es verdadero para todo:

$x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] - \left\{-\frac{\pi}{6}; 0; \frac{\pi}{6}\right\}$

56. Hallar x, si $2\text{arcsen}(3x) = \arccos(7x^2)$

Resolución:

I. Haciendo: $\theta = \text{arcsen}3x \Rightarrow \text{sen}\theta = 3x$

$\alpha = \arccos 7x^2 \Rightarrow \cos\alpha = 7x^2$

II. $2\theta = \alpha \Rightarrow \cos 2\theta = \cos\alpha$

$\Rightarrow 1 - 2\text{sen}^2\theta = \cos\alpha$

Reemplazando: $1 - 2(3x)^2 = 7x^2$

$\Rightarrow 1 = 25x^2 \Rightarrow x = \pm 1/5$

$x = -1/5$; no verifica la igualdad inicial.

$\therefore\ x = 1/5$; es la solución

57. Simplificar: $M = \frac{\tan(3\text{arcsen}x) - \cot(3\arccos x)}{\tan(5\text{arcsen}x) + \cot(5\arccos x)}$

Resolución:

Como: $\text{arcsen}x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall\ x \in [-1; 1]$

$\Rightarrow 3\text{arcsen}x + 3\arccos x = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan(3\text{arcsen}x) = \cot(3\arccos x)$

$\Rightarrow 5\text{arcsen}x + 5\arccos x = \frac{5\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan(5\text{arcsen}x) = \cot(5\arccos x)$

Luego: $M = \frac{0}{2\tan(5\text{arcsen}x)} \Rightarrow M = 0$

58. Halle un valor de x, si:

$\text{arcsen}(3x - 4x^3) + \arccos(1 - 2x^2) = \pi$

Resolución:

Sea: $x = \text{sen}\theta$

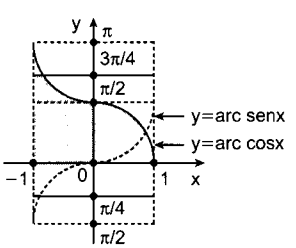
$\Rightarrow \text{arcsen}(3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta) + \arccos(1 - 2\text{sen}^2\theta) = \pi$

$\Rightarrow \underbrace{\text{arcsen}(\text{sen}3\theta)}_{3\theta} + \underbrace{\arccos(\cos 2\theta)}_{2\theta} = \pi$

$\Rightarrow 5\theta = \pi \Rightarrow \theta = \pi/5$

Luego: $x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

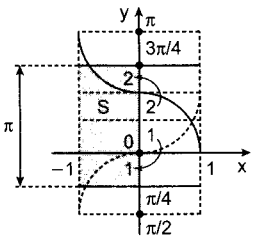
59. Halle el área de la región sombreada del siguiente gráfico:



Resolución:

Del gráfico se muestran que la región (1) y (2) son trasladados como se indican:

$\therefore\ S = (1)(\pi) = \pi$



60. Halle el rango de la función "f" definida por:

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{6} + \text{arcsen}x\right)\left(\frac{\pi}{6} - \arccos x\right)$$

Resolución:

Como: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}x$

$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{\pi}{6} + \text{arcsen}x\right)\left(-\frac{\pi}{3} + \text{arcsen}x\right)$

$\Rightarrow f(x) = (\text{arcsen}x)^2 - \frac{\pi}{6}(\text{arcsen}x) - \frac{\pi^2}{18}$

$\Rightarrow f(x) = \left(\text{arcsen}x - \frac{\pi}{12}\right)^2 - \frac{9\pi^2}{144}$

Ahora como:

$-\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{7\pi}{12} \le \text{arcsen}x - \frac{\pi}{12} \le \frac{5\pi}{12}$

$\Rightarrow 0 \le \left(\text{arcsen}x - \frac{\pi}{12}\right)^2 \le \frac{49\pi^2}{144}$

$\Rightarrow -\frac{9\pi^2}{144} \le \left(\text{arcsen}x - \frac{\pi}{12}\right)^2 - \frac{9\pi^2}{144} \le \frac{40\pi^2}{144}$

$\therefore\ \text{Ran}(f) = \left[-\frac{9\pi^2}{144}; \frac{5\pi^2}{18}\right]$

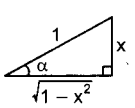
61. Si $\text{arcsen}x + \arccos y = \pi/3$.

Halle: $M = \arccos\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right)$

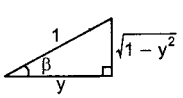
Resolución:

Sean:

$\alpha = \text{arcsen}x \Rightarrow \text{sen}\alpha = x \rightarrow$



$\beta = \arccos y \Rightarrow \cos\beta = y \rightarrow$



Luego, como:

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ M = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

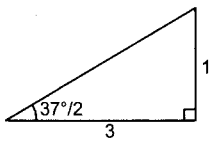
62. Calcule: $E = \dfrac{\tan\left[\frac{\pi}{4} - \cot^{-1}(3)\right]}{\cos\left[2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right]}$

Resolución:

$$E = \frac{\tan\left[\frac{\pi}{4} - \cot^{-1}(3)\right]}{\cos\left[2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right]} = \frac{N}{D} \qquad \ldots(I)$$

Sea: $N = \tan\left[\frac{\pi}{4} - \cot^{-1}(3)\right]$

Vemos que: $\cot\frac{37°}{2} = 3$



$\Rightarrow \frac{37°}{2} = \cot^{-1}(3)$

$\Rightarrow N = \tan\left(\frac{90°}{2} - \frac{37°}{2}\right)$

$N = \tan\frac{53°}{2} \Rightarrow N = \frac{1}{2} \qquad \ldots(II)$

Sea: $D = \cos\left[2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right]$

$D = 2\cos^2\left[\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right] - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 - 1$

$D = -\frac{21}{25} \qquad \ldots(III)$

Reemplacemos (II) y (III) en (I):

$$\therefore\ E = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{21}{25}} = -\frac{25}{42}$$

63. Si: $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$, halle $\text{sen}\phi$

Resolución:

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \qquad \ldots(I)$

Apliquemos:

$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right),\ \forall\ x \in \langle -1; 1\rangle$

$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{2\times\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right]$

$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right) \qquad \ldots(II)$

Reemplacemos (II) en (I):

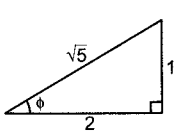
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$

Apliquemos el teorema:

$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

si: $xy < 1$

$\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}\right)$



$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \tan\phi = \frac{1}{2}$

Nos piden: $\text{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

64. Halle la intersección entre el dominio y rango de la función "f" definida por:

$f(x) = 3\text{arcsen}(x/2) + \arccos(x/2)$

Resolución:

Simplificando: $f(x) = 2\text{arcsen}\frac{x}{2} + \pi/2$

Cálculo del dominio: $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$

$\Rightarrow -2 \le x \le 2 \quad \therefore \text{Dom}(f) = [-2; 2]$

Cálculo del rango: $-\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\pi \le 2\text{arcsen}(x/2) \le \pi$

$-\frac{\pi}{2} \le \underbrace{2\text{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}}_{f(x)} \le \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; 2\right]$

65. Calcular los valores "x" e "y" que verifican la siguiente igualdad: $\arccos x = \pi \text{cscy}$

Resolución:

$0 \le \underbrace{\arccos x}_{\pi \text{cscy}} \le \pi \Rightarrow 0 \le \text{cscy} \le 1$

$\Rightarrow \text{cscy} = 1 \Rightarrow y = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$

Si: $\text{cscy} = 1 \Rightarrow \arccos x = \pi \Rightarrow x = -1$

Luego: $x = -1 \ \wedge \ y = (4k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

66. En cuántos puntos corta al eje X, la gráfica de la función "f" definida por:
$f(x) = \text{arcsen}x + \arccos(x/3) - \pi/2$

Resolución:

$f(x) = \text{arcsen}x + \arccos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\pi}{2}$

Las abscisas de los puntos de corte de las gráficas de "f" con el eje X, se obtienen resolviendo: $f(x) = 0$

$\text{arcsen}x + \arccos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\pi}{2} = 0$

$\arccos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}x$

$\arccos(x/3) = \arccos x \Rightarrow \frac{x}{3} = x \Rightarrow x = 0$

Existen solo una solución

$\therefore$ Solo hay un punto de corte.

67. Calcule: $M = \arctan 5 + \arctan 3 + \arctan(4/7)$

Resolución:

Apliquemos el teorema:

$\arctan x + \arctan y = \pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

si: $xy > 1 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ y > 0$

$M = \underbrace{\arctan 5 + \arctan 3}_{\pi+\arctan\left(\frac{5+3}{1-5\times 3}\right)} + \arctan\frac{4}{7}$

$M = \pi + \arctan\left(-\frac{4}{7}\right) + \arctan\frac{4}{7}$

$M = \pi - \arctan\frac{4}{7} + \arctan\frac{4}{7}$

$\therefore M = \pi$

68. Al reducir la expresión:

$F = \text{sen}\left[3\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)\right]$

se obtiene:

Resolución:

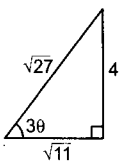
$F = \text{sen}\left[\underbrace{3\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)}_{\theta} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)\right]$

Sea: $\theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{11}}$

Atención:

$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^2\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{\sqrt{11}} - \frac{1}{11\sqrt{11}}}{1 - 3\times\frac{1}{11}} = \frac{4}{\sqrt{11}}$



Observemos que:

$\tan(3\theta/2) = \csc 3\theta - \cot 3\theta$

$\tan\frac{3\theta}{2} = \frac{\sqrt{27}}{4} - \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}$

Observar: $\frac{3\theta}{2} = \arctan\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)$

$3\theta = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)$

Reemplacemos en F:

$F = \text{sen}(3\theta - 3\theta) = \text{sen}\theta \quad \therefore F = 0$

69. Sean las funciones "f" y "g" definidas por:

$f(x) = |\tan^{-1}x| \ \wedge \ g(x) = \pi/2 + \text{sen}^{-1}x$

Calcule: $f_{min} + g_{min}$

Resolución:

Cálculo de f_{min}: $f(x) = |\tan^{-1}x|$

Se sabe que:

$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \le \underbrace{|\tan^{-1}x|}_{f(x)} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f_{min} = 0 \qquad \ldots(I)$

Cálculo de g_{min}: $\underbrace{g(x)}_{min} = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\text{sen}^{-1}x}_{min = -\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow g_{min} = 0 \qquad \ldots(II)$

Finalmente, de (I) y (II): $f_{min} + g_{min} = 0$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Sea la función: f(x) = arccosx + arccotx, cuyo rango es [m; M]. Determine el valor de M/m

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución:

Observación:

Sea: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; f_1; f_2; funciones crecientes o decrecientes.

Además: $a_1 \le f_1(x) \le a_2$

$b_1 \le f_2(x) \le b_2$

$\Rightarrow a_1 + b_1 \le f(x) \le a_2 + b_2$

f(x) = arccosx + arccotx

Dominio: $x \in [-1; 1] \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in [-1; 1]$

Rango: Si: $x \in [-1; 1] \begin{cases} 0 \le \arccos x \le \pi \\ \frac{\pi}{4} \le \operatorname{arccot} x \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Como arccosx y arccotx son decrecientes en [−1; 1] por la observación.

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \underbrace{\arccos x + \operatorname{arccot} x}_{f(x)} \le \frac{7\pi}{4}$ $\therefore$ Ran(f) = $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

Comparando: $m = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{M}{m} = 7$

$\therefore M = 7\pi/4$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Para $0 < x < 1$, resolver la ecuación:

$\operatorname{arccot} x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

A) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{-1+\sqrt{4}}{2}$ C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

Resolución:

$\operatorname{arccot} x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

$\operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot}(\sqrt{1-x})$

$x = \sqrt{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2(1)}$

Como: $0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Sea "f" una función definida por:

f(x) = |arcsenx| + |arctanx|

Determine el rango de "f".

A) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ C) $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

D) $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right\rangle$ E) $[0; \pi\rangle$

Resolución:

f(x) = |arcsenx| + |arctanx|

1.° Dominio de f:

$\left.\begin{array}{r} -1 \le x \le 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} x \in [-1; 1]$

2.° Rango de f:

Como es una función par, analizamos $0 \le x \le 1$, donde:

$0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ (creciente)

$0 \le \arctan x \le \frac{\pi}{4}$ (creciente)

Sumando: $0 \le \arcsin x + \arctan x \le \frac{3\pi}{4}$

$0 \le f(x) \le \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ Ran(f) = $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si $\operatorname{arcsen}(-x) = -\frac{\pi}{2}$, entonces x = 1

II. Si $\arccos(-x) = 1$, entonces $x = -\pi$

III. Si $x \in [-1; 1]$, entonces:

$\operatorname{arcsen}(-x) + \arccos(-x) = \frac{\pi}{2}$

A) FFV B) VVV C) VVF
D) VFF E) VFV

Resolución:

I. $\underbrace{\operatorname{arcsen}(-x)}_{-\operatorname{arcsen} x = -\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}; x = 1$ (V)

II. $\arccos(-x) = 1 \Rightarrow x = -\pi$

Según dominio de arccos.

$-1 \le -x \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$

En la pregunta, para x = −3,14 no es correcto. (F)

III. Teoría:

$\operatorname{arcsen}(n) + \arccos(n) = \frac{\pi}{2}$

$\forall n \in [-1; 1]$ entonces para $n = -x$ es verdadero (V)

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

Halle el dominio de la función: $f(x) = 17\text{arcsen}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

A) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right\rangle$

B) $\left\langle -\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right\rangle$

C) $\left\langle -\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

E) $\left\langle -\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right\rangle$

Resolución:

Se sabe:

$$-\infty < x - \frac{3}{2} \leq -1 \quad \cup \quad 1 \leq x - \frac{3}{2} < +\infty$$

$$-\infty < x \leq \frac{1}{2} \quad \cup \quad \frac{5}{2} \leq x < +\infty$$

$$\therefore\ x \in \left\langle -\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right\rangle$$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

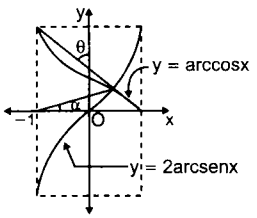
1. Calcular:

$$\phi = \text{arcsen}\frac{15}{17} + \text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arcsen}\left(-\frac{13}{85}\right)$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\frac{5\pi}{6}$ E) π

2. Del gráfico, calcular: $T = \tan\alpha\tan\theta$



A) 1/2 B) 1/4 C) 2

D) 4 E) 3/4

3. Reducir: $\alpha = 2\arctan x + \text{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Para $x \in \langle -\infty; -1]$

A) π B) $2\arctan x$ C) $4\arctan x$

D) $-\pi$ E) 0

4. Reducir:

$$T = \frac{\left[\sum_{k=1}^{4}\arccos(\cos k)\right] - 2\pi}{\left[\sum_{k=1}^{4}\arctan(\tan k)\right] + 3\pi}$$

A) 2/9 B) 2 C) 1/2

D) 1/3 E) 1/5

5. Señalar el número de raíces de la ecuación:

$$2\pi = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} + 2\arccos\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) Ninguna

6. Dada las funciones:

$$f(x) = \frac{\text{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} \wedge g(x) = x\arctan x$$

podemos afirmar que:

I. Dom(f): $\langle -1; 1\rangle$

II. Ran(f) $\cap$ Ran(g): $[0; +\infty\rangle$

III. g es creciente $\forall\ x \in \langle 0; 1\rangle$

IV. $f(x) < g(x); \forall\ x \in \langle -1; 0\rangle$

Luego son correctas:

A) I y II B) II y III C) III y IV

D) II, III y IV E) Todas

7. Al resolver la ecuación:

$\tan(\text{arcsen}\sqrt{1-x^2}) - \text{sen}(\arctan 2) = 0$

Tenemos:

A) $x = \pm\sqrt{5}/3$ B) x no existe

C) $x = \pm\sqrt{5}/5$ D) $x = 1$

E) $x = 33/65$

8. Hallar x: $2\text{arccot}2 + \arccos(3/5) = \text{arccsc}x$

A) 0 B) 4/5 C) 24/5

D) 7/25 E) 25/24

9. Evaluar la expresión:

$$S = \text{sen}\left[3\arctan\frac{1}{\sqrt{11}} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)\right]$$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{27}$

10. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$S = \text{sen}\left[3\text{arccot}(4) - 2\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right]$$

A) $\frac{9}{100}$ B) $\frac{19}{200}$ C) $\frac{21}{221}$

D) 0 E) $\frac{1}{10}$

11. Calcular: $T = \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $\frac{5\pi}{12}$ B) $\frac{7\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{9}$

D) $\frac{\pi}{8}$ E) π

12. Calcular: $T = \text{sen}\left(\text{arcsec}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

13. Hallar el valor de: $V = \cos 2\left(\arctan\frac{2}{3}\right)$

A) $2\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{15}{8}$

14. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{2\arctan x + \text{arcsen}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{2}\text{arcsen}x + \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

$g(x) = 2\arccos\sqrt[3]{x} - \text{arcsen}\sqrt{x}$

Si: Dom(f) = Dom(g), hallar: Ran(f)

A) $\{1\}$ B) $\{2\}$ C) $\{1/2\}$

D) $\{1/4\}$ E) $\{3/2\}$

15. Reducir:

$$A = \text{arcsen}\frac{2}{3} - \text{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{12}\right)$$

A) $\text{arcsen}\frac{1}{6}$ B) $\text{arcsen}\frac{2}{5}$ C) $\text{arcsen}\frac{1}{4}$

D) $\text{arcsen}\frac{2}{7}$ E) $\text{arcsen}\frac{1}{3}$

16. Dada la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\text{arcsen}\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{\text{arccos}\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}}}$$

Hallar su dominio:

A) $[-2;\sqrt{2}]-\{0\}$ B) $[-2;2]-\{0\}$
C) $[\sqrt{2};2]$ D) $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]-\{0\}$
E) $[-4;4]-\{0\}$

17. Se define la función:

$$f(x) = \sqrt{\arctan^2 x - 4\arctan x + 3}$$

Hallar el dominio de dicha función:

A) $\langle -\infty;\tan 1]$ B) $[\tan 1; +\infty\rangle$
C) $\mathbb{R}$ D) $[-\tan 1; \tan 1]$
E) $[0; \tan 1]$

18. Calcular:

$$\alpha = \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) + \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right) + \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$$

A) 0 B) $-\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

19. Calcular: $\theta = \arccos(\cos 2) + \arccos(\cos 4)$

A) $2\pi - 1$ B) $2\pi + 1$ C) $2(\pi + 1)$
D) $2(\pi - 1)$ E) $2(\pi + 2)$

20. Hallar el valor de:

$$S = \frac{\sqrt{\text{arcsen}2x - \frac{\pi}{2}} + \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{\text{arcsen}x}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

21. Si: $x = \text{arccot}\sqrt{\sec\theta} - \arctan\sqrt{\sec\theta}$ y $\cos x > 0$, hallar el valor de: senx

A) $\tan^2\frac{\theta}{2}$ B) $-\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $-\tan^2\frac{\theta}{2}$

D) $\tan^2\theta$ E) $\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

22. Calcular el valor de "m", para que se cumpla la siguiente igualdad: sen(arctanm) = tan(arcsenm)

A) 1 B) 0 C) −1 D) 2 E) −2

23. Determinar el rango de la función definida por:

$$f(x) = \frac{3\pi}{|\arctan x| - 2|\text{arccot}x|};\ x < 0$$

A) $\langle -4; -3\rangle$ B) $\langle -1; 0\rangle$ C) $\langle -2; -1\rangle$
D) $\langle -3; -2\rangle$ E) $\langle 2; 3\rangle$

24. Qué valor de "x" maximiza:
$y = f(x) = (\text{arcsen}x)^5(\arccos x)$

A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

25. ¿Cuál es el rango de la función?

$$f(x) = \frac{\text{arcsen}(\text{sen}x)}{\arccos(\cos x)},\ \text{si } x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$$

A) $\langle 0; 1\rangle$ B) $\langle -1; 0\rangle$ C) $\langle -2; 1\rangle$
D) $\langle 0; 2\rangle$ E) $\langle -2; 0\rangle$

26. Señalar el rango de la función:

$$g(x) = \frac{\text{sen}x + \cos x}{\text{arcsen}x + \arccos x}$$

A) $\left[\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-1\right); \sqrt{2}\right]$

B) $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-1\right); \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right]$

C) $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-1\right); \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]$

D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-1\right); \frac{\sqrt{2}}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]$

E) $\left[2\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-1\right); 2\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]$

27. Dada la función:
$y = g(x) = \arccos[\![x]\!] + \arccos[\![x+1]\!]$
Hallar la suma de elementos del rango.

A) $\pi/2$ B) π C) $3\pi/2$
D) 2π E) $5\pi/2$

28. Si: x = a, minimiza la función:
$y = f(x) = \text{arcsen}x(\text{arcsen}x + 1)$, mientras que
x = b, maximiza la función:
$y = g(x) = \arccos x(\arccos x + 1)$
Calcular: $a^2 + b^2$

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{9}{4}$

29. ¿Cuántos puntos de intersección con el eje de abscisas tiene la gráfica de la función?
$y = f(x) = e^{\text{arcsen}x} - \arccos x$

A) Ninguno B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

30. Dada la función: $f(x) = \frac{2\text{arcsen}x - \arccos x}{\arctan x - 2\arccos x}$

Hallar los puntos de discontinuidad.

A) $\{\sqrt{3}\}$ B) $\{\pm\sqrt{3}\}$ C) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$
D) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ E) $\{\pm 1\}$

31. Si: $\alpha = a + b + c$
hallar: $\phi = \arctan\sqrt{\frac{a\alpha}{bc}} + \arctan\sqrt{\frac{b\alpha}{ac}} + \arctan\sqrt{\frac{c\alpha}{ab}}$

A) 0 B) $\pi/4$ C) $\pi/6$ D) $2\pi/3$ E) π

32. Resolver:
$\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right) + \arccos x + \arccos\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

A) $\{0\}$ B) $\{-1; 0; 1\}$ C) $\{0; 1\}$
D) $\left\{0; \frac{1}{4}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}\right\}$

33. Calcular:
$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{18}$ C) $\frac{\pi}{36}$
D) $\frac{\pi}{40}$ E) $\frac{\pi}{72}$

34. Resolver:
$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arccot}\left(\frac{x\sqrt{5-8x^2}}{\sqrt{8x^4-5x^2+1}}\right) = \arccos 2x - \arccos x$

A) $\{0; \pm 1\}$ B) $\{\pm 1\}$ C) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$
D) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

35. Calcular el valor de:
$\theta = \arctan\left(\frac{a+b}{b+c}\right) - \arctan\left(\frac{a-c}{a+c+2b}\right)$
si: $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \wedge a > c$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{2}$

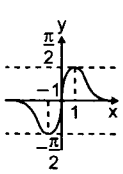
36. Resolver: $\arctan\left(\frac{x}{1-x}\right) + \arctan\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{5\pi}{6}$

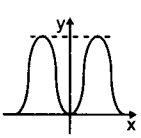
A) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ B) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ C) $\sqrt[4]{6}$
D) $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ E) $\sqrt[3]{2}$

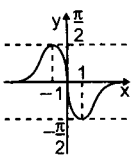
37. Reducir: $\alpha = \arctan\left(\frac{3\operatorname{sen}2x}{5+3\cos 2x}\right) + \arctan\left(\frac{\tan x}{4}\right)$

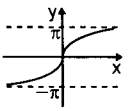
A) 2x B) arctan(sen2x) C) x
D) arctan(cos2x) E) 0

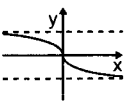
38. Graficar: $y = f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

A)


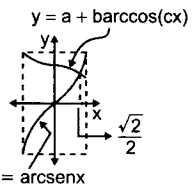
B)


C)


D)


E)


39. Del gráfico mostrado, hallar: a + 3b − c



A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{12}$

40. Señalar la proposición incorrecta en:

A) El dominio de: $y = \operatorname{arcsen}(e^x)$ es $\langle -\infty; 0]$

B) El dominio de: $y = \arccos\frac{1}{x}$ es $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

C) El rango de: $y = \operatorname{arcsen}(|\operatorname{sen}x|)$ es $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

D) El rango de:
$y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a\operatorname{sen}x + b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ es $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

E) El rango de:
$y = \arctan\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}-2}\right) + \operatorname{arccot}\left(\sqrt{2-x-\frac{1}{x}}\right)$ es $\{\pi\}$

41. Hallar el valor de la expresión:
$T = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{R}{3}\tan^2\frac{\pi}{12} + 2\sqrt{147}\tan\frac{\pi}{12} - 4}\right)$
Siendo: $R = \tan^2\frac{\pi}{7} + \tan^2\frac{2\pi}{7} + \tan^2\frac{3\pi}{7}$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

42. Reducir la sumatoria: $T = \sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{2^k}{2^{2k+1}+1}\right)$

A) $\arctan\left(\frac{2^n-2}{2^n+1}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}\right)$
C) $\arctan\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+2}+2}\right)$ D) $\arctan\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+2}+1}\right)$
E) $\arctan\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}+2}\right)$

43. Si: arcsenx + arcseny + arcsenz = π, calcular:
$S = \frac{\sqrt{1-x^2}}{yz} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{zx} + \frac{\sqrt{1-z^2}}{xy}$

A) 1 B) 2 C) −2
D) 4 E) −4

44. Acerca de la función "f", cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \arccos(x - \|x\|)$, señalar la verdad o falsedad de cada una de las proposiciones:

I. $Ran(f) = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

II. f es periódica

III. Si: $1 < x_1 < 2 \Rightarrow f(2 + x_1) > f(x_1)$

A) FFF B) FVF C) VVV
D) FVV E) VFF

45. Con respecto a la función "f", definida por:

$$f(x) = \log\left[\arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)\right]$$

Señalar la verdad (V) o falsedad (F) de cada una de las proposiciones:

I. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

II. $Ran(f) = \langle -\infty; \log\pi \rangle$

III. $f(x) < 0$; si $x \in \left\langle 0; \arctan\frac{1}{2} \right\rangle$

IV. $\frac{\pi}{2} \leq f(x) < \pi$; si $x \in \langle 0; 1 \rangle$

A) VVFF B) FFFF C) VVVV
D) VFVF E) VFFF

46. La expresión trigonométrica $\arccos u = z$ significa $\cos z = u$. Suponiendo : $z \in [0; \pi]$

hallar: $2\text{sen}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

47. Calcular: $x = \arctan\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$

A) 22°30' B) 45° C) 67°30'
D) 30° E) 60°

48. Dada la ecuación:
$\arctan(x + 1) - \arctan(x - 1) = \arctan(1)$
Indicar la suma de las soluciones:

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

49. Hallar x, sabiendo que: $\arccos\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \text{arcsen}x$

A) 30° B) $\frac{\sqrt{8}}{9}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 15°

50. Hallar la suma de los "n" primeros términos de:

$$S = \arctan\left(\frac{x}{1 - 2x^2}\right) + \arctan\left(\frac{x}{1 + 6x^2}\right) + \arctan\left(\frac{x}{1 + 12x^2}\right) + \ldots$$

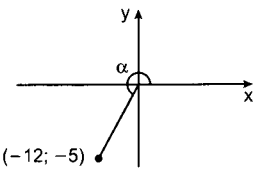
A) $\arctan(n + 1)x - \arctan x$
B) $\arctan(n)x - \arctan x$
C) $\arctan(n - 1)x - \arctan x$
D) $\arctan x - \arctan(n + 1)x$
E) $\arctan x - \arctan(n)x$

51. Calcular: $\text{sen}\left\{2\arctan\left[\sqrt{3}\cos\left(2\text{arcsen}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]\right\}$

A) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{13}$ C) $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$

D) $-\frac{5\sqrt{2}}{17}$ E) $\frac{7\sqrt{3}}{15}$

52. De la figura, calcular α



A) $\frac{3\pi}{2} - \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$ B) $\pi + \text{arcsen}\left(\frac{5}{13}\right)$

C) $\pi + \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$ D) $\frac{3\pi}{2} - \text{arcsen}\left(\frac{5}{13}\right)$

E) $\frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$

53. Calcular:

$$\theta = \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{13\pi}{7}\right) + \arccos\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right]$$

A) $\frac{21\pi}{7}$ B) $\frac{5\pi}{7}$ C) $\frac{29\pi}{7}$

D) $\frac{33\pi}{7}$ E) $-\frac{6\pi}{7}$

54. Calcular:

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt[3]{6\text{sen}10° - 1}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{6\cos 20° + 1}}{2}\right)$$

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{12}$

55. Sabiendo que: $\dfrac{2\arccos x + \frac{\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4} - \text{arcsen}x} = \frac{7}{5}$

Calcular: $\arccos(\sqrt{1 - x^2}) + \arctan(2x)$

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{12}$

D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

56. Calcular la suma del mínimo y máximo valor de:
$T = x\text{sen}(\text{arcsen}x) - \cos(\arccos x) + 1$

A) 1/8 B) 7/8 C) 3/4
D) 15/4 E) 13/8

57. Calcular:
$\theta = \text{arcsen}(2\cos 42°\cos 78°) + \arccos(2\text{sen}24°\text{sen}84°)$

A) $\frac{3\pi}{10}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{4\pi}{5}$
D) $\frac{3\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

58. Si $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$, simplificar:

$Q = \arccos(\cos x) + \arccos\left(\cos\frac{2x}{3}\right)$

A) $\frac{12\pi - 5x}{3}$ B) $\frac{4\pi - 3x}{2}$ C) $\frac{\pi - 5x}{3}$
D) $\frac{12\pi - x}{3}$ E) $\frac{4\pi - x}{3}$

59. Calcular:

$$E = \frac{\arctan\left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right) + \text{arccot}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\arctan(\sqrt{3} - 2) + \arctan(2 + \sqrt{3})}$$

A) 2/3 B) 1/3 C) 3/2 D) 4/3 E) 3/4

60. Sabiendo que: $(a + 1)(b + 1) = 2$; $ab < 1$
calcular: $\arctan(a) + \arctan(b)$

A) $\pi/4$ B) $\pi/3$ C) $\pi/6$
D) $\pi/2$ E) $\pi/8$

61. Calcular:
$\theta = \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{13}$

A) $\pi/4$ B) $\pi/2$ C) $3\pi/4$
D) $3\pi/2$ E) 2π

62. Calcular: $\theta = \text{arcsen}\left[\text{sen}\left(\frac{3^n\pi}{2}\right)\right]$, $n \in \mathbb{N}$

A) $\frac{(-1)^n\pi}{2}$ B) $\frac{(-1)^n\pi}{4}$ C) $\frac{(-1)^n\pi}{8}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

63. Calcular: $\theta = \text{arcsen}(\cos 4) - 3\arccos(\text{sen}3)$

A) $\frac{\pi}{2} - 5$ B) $\frac{3\pi}{2} - 1$ C) $\pi - 4$
D) 9 E) -5

64. Calcular: $E = 8\cot\left(\text{arcsen}\frac{40}{41}\right) - \tan\left(\text{arcsen}\frac{12}{13}\right)$

A) $-0{,}2$ B) 0,6 C) $-0{,}6$
D) $-0{,}8$ E) 0,2

65. Calcular: $\theta - \alpha$:
$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\alpha = 3\text{arccsc}(2) - \arctan(\sqrt{3})$

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{6}$
D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

66. Hallar: $\sum_{i=0}^{n} \cos\left\{\arccos\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right]\right\}$

A) n B) 2n C) n − 3
D) n − 2 E) n − 1

67. Sabiendo que:
$a = \text{arcsen}(\cos x) + \arccos(\text{sen}y)$
Determine:
$K = \arccos(\text{sen}x) + \text{arcsen}(\cos y)$ en términos de a, si $x \in [0; \pi] \wedge y \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A) a^2 B) a C) a + 1
D) a − 1 E) a/2

68. Resuelva:

$\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = k\pi + \arctan(-7)$;
$k \in \mathbb{Z}$

A) −1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

69. Resuelva la ecuación:
$\text{arcsen}x + \text{arcsen}(1 - x) - \arccos x = 0$

A) $\{0; 1\}$ B) $\{1; 2\}$ C) $\left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$
D) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$ E) $\{1\}$

70. Dado los arcos:

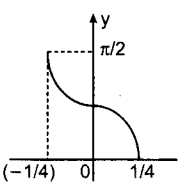
$\alpha = \arctan\left(\frac{2\cos 6°}{\text{sen}12°} + \frac{1 + \cos 12°}{\text{sen}12°}\right)$

$\beta = \text{arccot}\left(\frac{2\cos 12°}{\text{sen}24°} - \frac{1 + \cos 24°}{\text{sen}24°}\right)$

Calcule $\tan(\alpha - \beta)$

A) tan1° B) tan2° C) tan3°
D) tan6° E) tan9°

71. Determinar la ecuación de la curva.



A) $y = \frac{1}{2}\arccos 4x$ B) $y = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$
C) $y = \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ D) $y = \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{x}{8}\right)$
E) $y = \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{x}{8}\right)$

72. Si: $G(x) = \text{arccot}(x^2 + 1)$, hallar el rango de G.

A) $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{\pi}{4}; \pi\right\rangle$ C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$
D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right]$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\rangle$

73. Determinar el rango de la función:

$$F(x) = \frac{3\pi}{|\arctan x| - 2|\text{arccot}\, x|}; \; x < 0$$

A) $\langle -4; -3\rangle$ B) $\langle -3; -2\rangle$ C) $\langle -1; 0\rangle$
D) $\langle 2; 3\rangle$ E) $\langle -2; -1\rangle$

74. Calcule el valor de:
$H = \text{sen}[\arccos(\sqrt{7}/4) + \cos[\arctan(\sqrt{15})]$

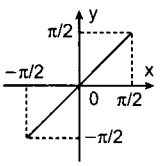
A) 1/4 B) 1/2 C) $\sqrt{2}/2$
D) 1 E) 3/2

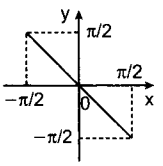
75. Simplifique la expresión:

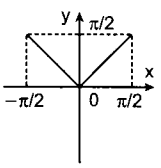
$$M = \frac{\text{arccot}(-\sqrt{3}) + \text{arcsec}(-2) + \text{arccsc}(-1)}{\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctan(-1)}$$

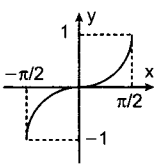
A) 1,2 B) 1,8 C) 2,4 D) 3,0 E) 3,6

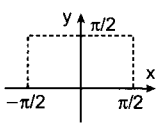
76. Graficar: $F(x) = \text{arcsen}(\text{sen}x)$; $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

A)


B)


C)


D)


E)


77. Indique verdadero (V) o falso (F):

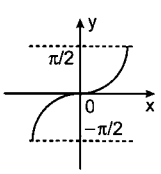
I. Si: $F(x) = \arccos|x|$ ...ranF = $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

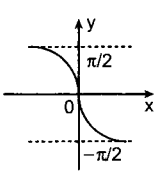
II. Si $F(x) = \text{arcsen}|x|$ ...F(x) es función par $\forall\, x \in \mathbb{R}$

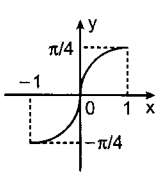
III. Si $F(x) = |\arccos x|$ ...F(x) es creciente en todo su dominio

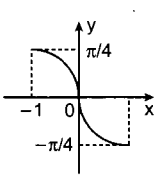
A) VVV B) VFF C) FVV
D) VFV E) FVF

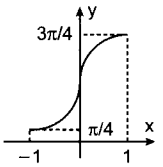
78. Graficar: $F(x) = \text{arcsen}x + \arccos x + \arctan x$

A)


B)


C)


D)


E)


79. Si: $G(x) = \arccos(\tan x)$
Hallar el dominio de G ($n \in \mathbb{Z}$)

A) $\left[\frac{(2x-1)\pi}{4}; \frac{(2n+1)\pi}{4}\right]$

B) $\left[\frac{n\pi}{4}; \frac{(n+1)\pi}{4}\right]$

C) $\left[n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

D) $\left[2n\pi; 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

E) $\left[\frac{(4n-1)\pi}{4}; \frac{(4n+1)\pi}{4}\right]$

80. Al reducir la expresión:

$$E = \text{arcsen}\left[\text{sen}\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right] + \arccos\left[\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right]$$

se obtiene:

A) $\pi/5$ B) $3\pi/5$ C) π
D) $8\pi/5$ E) 3π

81. Determinar el dominio de:

$$F(x)\ \text{arcsen}\left(\frac{x-2}{3}\right) + \arccos\left(\frac{x+3}{5}\right)$$

A) $[-1; 2]$ B) $[-2; 3]$ C) $[-3; 4]$
D) $[-1; 3]$ E) $[-3; 2]$

82. Determinar el rango de:

$$G(x) = \frac{3}{2}\arccos\left(\frac{x}{7}\right) + 3\text{arcsen}(-1)$$

A) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

C) $\left[0; \frac{9\pi^2}{4}\right]$ D) $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

E) $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

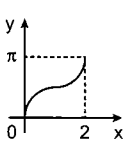
83. Determinar el rango de:

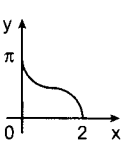
$$H(x) = (\text{arcsen}x)^2 + (\arccos x)^2 - 2(\text{arcsen}x)\left(\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}x\right)$$

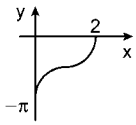
A) $[0; 4\pi^2]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ C) $\left[0; \frac{9\pi^2}{4}\right]$

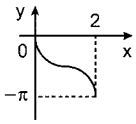
D) $\left[0; \frac{4\pi^2}{9}\right]$ E) $\left[0; \frac{9\pi^2}{16}\right]$

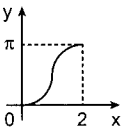
84. Graficar: $y = -\arccos(x - 1)$

A)


B)


C) 

D) 

E) 

85. Sea D el dominio de: $F(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x+3}{4}\right)$

Hallar el rango de:

$G(x) = \arccos\left(\frac{x+7}{16}\right)$, si $x \in D$

A) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ C) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

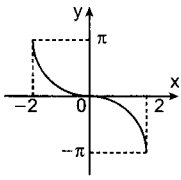
D) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

86. Hallar el dominio y rango de:

$F(x) = \text{arcsen}(-x) + \arccos(-x) + \text{arcsec}(-x) + \text{arccsc}(-x)$

A) $\{0; 1\}; \{\pi/2\}$ B) $\{-1; 0\}; \{\pi\}$
C) $\{-1; 0\}; \{\pi/2\}$ D) $\{-1; 1\}; \{\pi\}$
E) $\{0; 1\}; \{\pi\}$

87. Hallar la ecuación de la curva.



A) $y = 2\text{arcsen}(x/2)$ B) $y = -2\text{arcsen}(\pi/2)$
C) $y = 2\text{arcsen}(2x)$ D) $y = -2\text{arcsen}(2x)$
E) $y = -2\arccos(2x)$

88. Sea: $F(x) = a[\text{arcsen}(bx + c)] + d$

Si: $\text{Dom}(F) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right]$; $\text{Ran}(F) = \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

$a > 0$; $b > 0$, calcular: $\text{sen}[(b + c)a]$

A) 1/2 B) $\sqrt{3}/2$ C) -1
D) $\sqrt{2}/2$ E) $-\sqrt{3}/2$

89. Dada la función: $F(x) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Hallar: $\text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F)$

A) $[-1; 1]$ B) $[-\pi/2; 0\rangle$
C) $[-1; 1] - \{0\}$ D) $[-1; 0\rangle$
E) $\langle 0; 1]$

CLAVES

1. B	13. C	25. B	37. C	49. D	61. A	73. B	85. A
2. A	14. B	26. B	38. A	50. A	62. A	74. D	86. D
3. D	15. C	27. D	39. B	51. C	63. E	75. C	87. B
4. E	16. C	28. C	40. E	52. B	64. C	76. A	88. C
5. A	17. A	29. B	41. B	53. B	65. A	77. B	89. B
6. E	18. C	30. A	42. D	54. C	66. D	78. E	
7. A	19. D	31. E	43. B	55. A	67. B	79. E	
8. E	20. E	32. A	44. B	56. D	68. B	80. B	
9. A	21. A	33. C	45. A	57. A	69. D	81. A	
10. C	22. B	34. E	46. C	58. A	70. C	82. D	
11. B	23. D	35. A	47. B	59. C	71. A	83. C	
12. C	24. D	36. B	48. C	60. A	72. D	84. B	

Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

capítulo 10

François Viète (también conocido en algunos textos en español como Francisco Vieta) fue un matemático francés (Fontenay-le-Comte, 1540-París, 1603). Fue un súbdito, reconocido por su lealtad y competencia, y el consejero privado de los reyes de Francia Enrique III y Enrique IV Se le considera uno de los principales precursores del álgebra, pues fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras. Entre 1564 y 1568, se sumerge en trabajos de astronomía y trigonometría y redacta un tratado que quedará inédito: *Harmonicon Cœleste*.

Uno de sus hallazgos más importantes fue establecer claramente la distinción entre variable y parámetro, lo que le permitió plantear familias enteras de ecuaciones con una sola expresión y así abordar la resolución de ecuaciones con un alto grado de generalidad, en lo que se entendió como una aritmética generalizada. En trigonometría inició el enfoque analítico, consistente en resolver triángulos y más en encontrar relaciones entre las funciones trigonométricas. Un ejemplo serían las reglas de prostafairesis, que permiten convertir los productos de funciones trigonométricas en sumas y restas, y que influirían en el posterior desarrollo de los logaritmos. Obtuvo, a partir de fórmulas trigonométricas, la primera expresión exacta de π como producto infinito.

Fuente: Wikipedia

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es una igualdad en la que intervienen funciones trigonométricas y se verifica para determinados valores de la variable.

Algunos ejemplos de ecuaciones trigonométricas pueden ser:

- $\text{sen}x = \frac{1}{2}$
- $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
- $2\cos x + \sqrt{2} = 0$
- $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$
- $\text{sen}(x + 20°) = 1$
- $\tan^3 x - 8 = 0$
- $\tan 3x = -\sqrt{3}$
- $2\csc\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{7}$

Es importante indicar que si la variable no está afectada por algún operador trigonométrico entonces dicha igualdad no es una ecuación trigonométrica, por ejemplo:

$x - \cos x = 0$... No es una ecuación trigonométrica.

$x\text{sen}x = 1$ ... No es una ecuación trigonométrica.

A los valores de la variable que verifican dicha igualdad se les denomina soluciones o raíces de la ecuación. Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas toda ecuación trigonométrica tiene infinitas soluciones y al conjunto que estas determinan se le llama Conjunto Solución.

Resolver una ecuación trigonométrica consiste en hallar el conjunto solución para algún dominio específico y si no se menciona éste se supone que es para todos los valores permitidos de la variable. Para hacer el estudio de las ecuaciones trigonométricas he dividido a éstas en dos grupos, el primero denominado ecuaciones trigonométricas elementales donde solamente interviene una función trigonométrica (básica o compuesta) expresada en forma lineal (o sea de primer grado) y el segundo grupo denominado ecuaciones trigonométricas no elementales donde intervienen una o más funciones trigonométricas y además para su resolución hay que aplicar algunas técnicas y conceptos estudiados en el álgebra (factorización por ejemplo) y trigonometría (identidades por ejemplo).

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Determinamos de esta manera aquellas ecuaciones trigonométricas cuya forma es la siguiente:

FT $k(x + 0)$ = Número real

$k \in \mathbb{R}$
x: Variable
0: Corrimiento de fase

Ejemplo:

- $\text{sen}x = \frac{1}{2}$
- $\cot(5x) + 1 = 0$
- $\cos(2x) = 1$
- $\sec\left(6x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$
- $\tan(3x + 20°) = \sqrt{3}$
- $\csc\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{3}$

Para poder resolver este tipo de ecuaciones podemos emplear la circunferencia trigonométrica o las gráficas de las funciones trigonométricas, por lo tanto se le aconseja revisar dichos temas, además se debe recordar el valor de las razones trigonométricas de algunos ángulos notables. Es fundamental para resolver una ecuación elemental comenzar resolviendo aquellas donde sólo intervienen funciones trigonométricas básicas, es decir senx, cosx, tanx, cotx, secx y cscx y luego de haber aprendido a resolver estas ecuaciones podemos entender con mayor facilidad la resolución de aquellas ecuaciones donde intervienen funciones trigonométricas compuestas, es decir.

$$\text{sen}2x,\ \cos 3x,\ \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\ \text{etc.}$$

Soluciones básicas

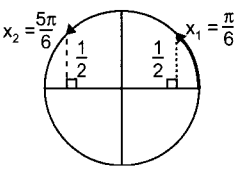
Dada la ecuación trigonométrica elemental en la que intervienen solo una función trigonométrica básica, se denomina soluciones básicas a aquellas que están comprendidas en [0; T] donde T es el período de la función.

Por ejemplo:

hallar las soluciones básicas en cada caso y ubicarlas en la circunferencia trigonométrica:

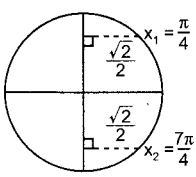
- $\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 2\pi$

  Las SB, están en $[0; 2\pi\rangle$
  Si los ubicamos en la CT una solución debe pertenecer al IC y la otra al IIC.
  La solución del IC: $x_1 = \frac{\pi}{6}$
  La solución del IIC: $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$



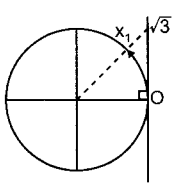
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T = 2\pi$

  Las SB están en $[0; 2\pi\rangle$
  En la CT una pertenece al IC y la otra al IVC.
  Solución del IC: $x_1 = \frac{\pi}{4}$
  Solución del IV C:
  $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$



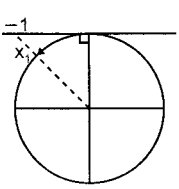
- $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow T = \pi$

  La SB está en $[0; \pi\rangle$
  En la CT la solución pertenece al IC.
  La solución es: $x_1 = \frac{\pi}{3}$



- $\cot x = -1 \Rightarrow T = \pi$

  La SB está en $[0; \pi\rangle$
  En la CT la solución pertenece al IIC.
  La solución es: $x_1 = \frac{3\pi}{4}$



Solución principal (S_p)

Dada una ecuación trigonométrica elemental donde solo interviene una función trigonométrica básica, se denomina solución principal a aquella solución que pertenece al rango de la función inversa de la función dada. (Tal como se le ha definido en el capítulo 9).

Por ejemplo, hallar la solución principal en cada caso:

- $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow S_p = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} \Rightarrow S_p = \frac{\pi}{6}$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_p = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_p = \frac{\pi}{4}$
- $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow S_p = \arctan\sqrt{3} \Rightarrow S_p = \frac{\pi}{3}$
- $\cot x = -1 \Rightarrow S_p = \operatorname{arccot}(-1) \Rightarrow S_p = \frac{3\pi}{4}$
- $\sec x = -2 \Rightarrow S_p = \operatorname{arcsec}(-2) \Rightarrow S_p = \frac{2\pi}{3}$
- $\csc x = -\sqrt{2} \Rightarrow S_p = \operatorname{arccsc}(-\sqrt{2}) \Rightarrow S_p = -\frac{\pi}{4}$
- $\operatorname{sen}x = -1 \Rightarrow S_p = \operatorname{arcsen}(-1) \Rightarrow S_p = -\frac{\pi}{2}$

Conjunto solución

El conjunto solución de una ecuación trigonométrica elemental donde solo interviene una función trigonométrica básica se puede determinar o expresar de dos maneras:

I. Dada la ecuación, se determina primero sus soluciones básicas, finalmente el conjunto solución se obtiene sumando (o restando) un múltiplo entero del período (o sea: nT) a cada una de estas soluciones. Por ejemplo, hallar el conjunto solución en cada caso:

- $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 2\pi$ y las SB $= \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{x/x = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
- $\cos x\ \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T = 2\pi$ y las SB $= \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{2k\pi + \frac{\pi}{4}; 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow T = \pi$ y la SB $= \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{m\pi + \frac{\pi}{3}\right\}\ m \in \mathbb{Z}$
- $\cot x = -1 \Rightarrow T = \pi$ y la SB $= \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{k\pi + \frac{3\pi}{4}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

II. Dada la ecuación, se determina su solución principal (S_p) y luego se reemplaza en la expresión que corresponde según el siguiente cuadro:

Ecuación	Conjunto solución
$\operatorname{sen}x = a$	$n\pi + (-1)^n S_p$
$\cos x = b$	$2n\pi \pm S_p$
$\tan x = c$	$n\pi + S_p$
$\cot x = d$	$n\pi + S_p$
$\sec x = e$	$2n\pi \pm S_p$
$\csc x = f$	$n\pi + (-1)^n S_p$

Por ejemplo, hallar el conjunto solución en cada caso:

- $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow S_p = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow S_p = \frac{\pi}{6}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{x/x = n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}, n \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_p = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow S_p = \frac{\pi}{4}$

  Conjunto solución.

  $S_1 = \left\{x/x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow S_p = \arctan\sqrt{3} \Rightarrow S_p = \frac{\pi}{3}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{x/x = m\pi + \frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\cot x = -1 \Rightarrow S_p = \operatorname{arccot}(-1) \Rightarrow S_p = \frac{3\pi}{4}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{x/x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\sec x = -2 \Rightarrow S_p = \operatorname{arcsec}(-2) \Rightarrow S_p = \frac{2\pi}{3}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{x/x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\csc x = -\sqrt{2} \Rightarrow S_p = \operatorname{arccsc}(-\sqrt{2}) \Rightarrow S_p = -\frac{\pi}{4}$

  Conjunto solución:

  $S_1 = \left\{x/x = k\pi + (-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Nota

1.° Observa que no es lo mismo solución básica y solución principal, en algunos casos pueden coincidir.

2.° De los ejemplos que se han indicado podemos observar por citar uno de ellos al resolver la ecuación. $\operatorname{sen}x = 1/2$ el conjunto solución es diferente en su forma de expresarse, pero debe quedar claro que dichos conjuntos son iguales.

$S_1 = \left\{2\pi n + \frac{\pi}{6}; 2n\pi + \frac{2\pi}{6}\right\} n \in \mathbb{Z}$ es igual a:

$S_1 = \left\{k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ahora veremos cómo resolver una ecuación trigonométrica elemental donde intervienen funciones trigonométricas compuestas.

La forma más sencilla es haciendo un cambio de variable tal como se indica en los siguientes ejemplos:
Por ejemplo, hallar el conjunto solución en cada caso.

- $\operatorname{sen}2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ cambio de variable: $\theta = 2x$

  $\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \underbrace{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\pi}{6}}, n \in \mathbb{Z}$

  $\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

Volvemos a la variable original:

$2x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

Conjunto solución:

$S = \left\{x/x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

- $\cos 3x = -1 \Rightarrow$ cambio de variable: $\alpha = 3x$

  $\cos\alpha = -1 \Rightarrow S_p = \arccos(-1) = \pi$

  $\alpha = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$

  Volvemos a la variable original:

  $3x = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$

  Conjunto solución:

  $S = \left\{x/x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

- $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

  $\Rightarrow$ cambio de variable: $\theta = 2x + \frac{\pi}{3}$

  $\tan\theta = -1 \Rightarrow S_p = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

  Variable original:

  $2x + \frac{\pi}{3} = n\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = n\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

  Conjunto solución: $S = \left\{x/x = \frac{n\pi}{2} - \frac{7\pi}{24}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

- $\sec\left(\frac{\pi}{5} - 3x\right) = 2 \Rightarrow$ cambio de variable: $\phi = \frac{\pi}{5} - 3x$

  $\sec\phi = 2 \Rightarrow S_p = \operatorname{arcsec}(2) = \frac{\pi}{3}$

  $\Rightarrow \phi = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

  Variable original:

  $\frac{\pi}{5} - 3x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow -3x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$

  $\Rightarrow -x = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{15} \Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{15}$

  Conjunto solución:

  $S = \left\{x/x = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{15}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

- $\csc\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$

  $\Rightarrow$ cambio de variable: $\theta = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$

  $\Rightarrow \csc\theta = -\sqrt{2} \Rightarrow S_p = \operatorname{arccsc}(-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow \theta = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

  Variable original

  $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

  Conjunto solución:

  $S = \left\{x/x = 2k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Hasta el momento solo se ha mostrado como hallar el conjunto solución, es decir, todas las raíces o soluciones de la ecuación, sin embargo, a veces solo es necesario hallar algunas soluciones en ese caso si es preciso se halla primero el conjunto solución y luego se asignan valores adecuados a la constante que permitan obtener las soluciones requeridas.

Ejemplos:

1. Hallar las soluciones comprendidas en $[0; \pi\rangle$ de la ecuación: $2\text{sen}4x - 1 = 0$ y graficarlas en la circunferencia trigonométrica.

   Resolución:

   $2\text{sen}4x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}4x = \frac{1}{2}$

   Sea: $\theta = 4x \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

   Volviendo a la variable original:

   $4x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}, n \in \mathbb{Z}$

   Como solo piden las soluciones en $[0; \pi\rangle$ asignamos valores a n:

   $n = -1 \Rightarrow x_1 = (-1)\frac{\pi}{4} + (-1)^{-1}\left(\frac{\pi}{24}\right)$

   $x_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24} = -\frac{7\pi}{24}$ (No)

   $n = 0 \Rightarrow x_2 = (0)\frac{\pi}{4} + (-1)^0\left(\frac{\pi}{24}\right) = 0 + \frac{\pi}{24}$

   $\Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{24}$

   $n = 1 \Rightarrow x_3 = (1)\frac{\pi}{4} + (-1)^1\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24}$

   $\Rightarrow x_3 = \frac{5\pi}{24}$

   $n = 2 \Rightarrow x_4 = (2)\frac{\pi}{4} + (-1)^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$

   $\Rightarrow x_4 = \frac{13\pi}{24}$

   $n = 3 \Rightarrow x_5 = (3)\frac{\pi}{4} + (-1)^3\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{24}$

   $\Rightarrow x_5 = \frac{17\pi}{24}$

   $n = 4 \Rightarrow x_6 = (4)\frac{\pi}{4} + (-1)^4\left(\frac{\pi}{24}\right)$

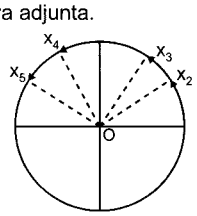
   $x_6 = \pi + \frac{\pi}{24} = \frac{25\pi}{24}$ (No)

   Las soluciones x_1 y x_6 no las consideramos porque No pertenecen a $[0; \pi\rangle$

   Por lo tanto las soluciones son:

   $\left\{\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}\right\}$

   La ubicación en la CT de dichas soluciones se indica en la figura adjunta.



2. Resolver la ecuación $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{2}$; indicar la suma de las soluciones comprendidas en $\langle -\pi; \pi\rangle$

   Resolución:

   $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2x - \frac{\pi}{5} = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$$

$$x = k\pi \pm \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{(Conjunto solución)}$$

Como solo piden las soluciones en $\langle -\pi; \pi\rangle$ asignamos valores adecuados a k:

$$k = -1 \quad \Rightarrow x = -\pi \pm \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10}$$

$$x_1 = -\pi - \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10} = -\frac{51\pi}{40} \text{ (No)}$$

$$x_2 = -\pi + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10} = -\frac{21\pi}{40}$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow x = (0)\pi \pm \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10}$$

$$x_3 = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10} = -\frac{11\pi}{40}$$

$$x_4 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10} = \frac{19\pi}{40}$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow x = (1)\pi \pm \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10}$$

$$x_5 = \pi - \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10} = +\frac{29\pi}{40}$$

$$x_6 = \pi + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{10} = \frac{59\pi}{40} \text{ (No)}$$

Las soluciones en $\langle -\pi; \pi\rangle$ son:

$$\left\{-\frac{21\pi}{40}, -\frac{11\pi}{40}, \frac{19\pi}{40}, \frac{29\pi}{40}\right\}$$

Suma de soluciones:

$$-\frac{21\pi}{40} + \frac{-11\pi}{40} + \frac{19\pi}{40} + \frac{29\pi}{40} = \frac{2\pi}{5}$$

3. Resolver la ecuación: $\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$; indicar el número de soluciones comprendidas en $[-2\pi; 5\pi]$

Resolución:

$$\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = n\pi + \arctan(\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = n\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2n\pi + \pi$$

$$\Rightarrow x = (2n + 1)\pi,\ n \in \mathbb{Z} \text{ (conjunto solución)}$$

Hallamos las soluciones en $[-2\pi; 5\pi]$

$n = -2 \Rightarrow x_1 = [2(-2) + 1]\pi \Rightarrow x_1 = -3\pi$ (No)

$n = -1 \Rightarrow x_2 = [2(-1) + 1]\pi \Rightarrow x_2 = -\pi$

$n = 0 \Rightarrow x_3 = [2(0) + 1]\pi \Rightarrow x_3 = \pi$

$n = 1 \Rightarrow x_4 = [2(1) + 1]\pi \Rightarrow x_4 = 3\pi$

$n = 2 \Rightarrow x_5 = [2(2) + 1]\pi \Rightarrow x_5 = 5\pi$

$n = 3 \Rightarrow x_6 = [2(3) + 1]\pi \Rightarrow x_6 = 7\pi$ (No)

Las soluciones en $[-2\pi; 5\pi]$ son: $\{-\pi, \pi, 3\pi, 5\pi\}$ por lo tanto el número de soluciones es 4.

Propiedades

Casos especiales

Sabemos que:

- $\text{sen}(k\pi) = 0$
- $\cos(k\pi) = (-1)^k \Rightarrow \cos 2k\pi = 1$ y $\cos(2k + 1)\pi = -1$
- $\text{Tan}(k\pi) = 0$
- $\text{sen}(2k + 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$

  $\Rightarrow \text{sen}(4k + 1)\frac{\pi}{2} = 1$ y $\text{sen}(4k - 1)\frac{\pi}{2} = -1$
- $\cos(2k + 1)\frac{\pi}{2} = 0$
- $\cot(2k + 1)\frac{\pi}{2} = 0$

Al resolver ecuaciones trigonométricas es muy frecuente encontrar alguno de los casos indicados. El conjunto solución en ese caso se puede expresar en forma más directa como se indica a continuación:

- $\text{sen}7x = 0 \Rightarrow \text{sen}7x = \text{sen}k\pi \Rightarrow 7x = k\pi$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{k\pi}{7}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan 3x = 0 \Rightarrow \tan 3x = \tan(n\pi) \Rightarrow 3x = n\pi$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{n\pi}{3}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
- $\cos 5x = 0 \Rightarrow \cos 5x = \cos(2n + 1) \Rightarrow 5x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{(2n + 1)\pi}{10}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
- $\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos 3x = \cos 2k\pi$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{2k\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\frac{x}{3} = -1 \Rightarrow \text{sen}\frac{x}{3} = \text{sen}(4k - 1)\frac{\pi}{2}$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{3(4k + 1)\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\frac{3x}{2} = -1 \Rightarrow \cos\frac{3x}{2} = \cos(2n + 1)\pi$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{2(2n + 1)\pi}{3}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}(k\pi)$

  $\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow CS = \left\{x/x = k\pi - \frac{\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2n\pi)$

  $\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \Rightarrow 3x = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

Nota

Si $\text{sen}\alpha = \text{sen}\theta \Rightarrow \alpha = k\pi + (-1)^k\theta$, $k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos\alpha = \cos\theta \Rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \theta$, $k \in \mathbb{Z}$

Si $\tan\alpha = \tan\theta \Rightarrow \alpha = k\pi + \theta$, $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

Hallar la solución general en cada caso:

- $\cos 7x = \cos 3x \Rightarrow 7x = 2k\pi \pm 3x,\ k \in \mathbb{Z}$

  Analizamos cada posibilidad

  $7x = 2k\pi + 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

  $7x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 10x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}$

  El conjunto solución es: $CS = \left\{\frac{k\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{5}\right\},\ k \in \mathbb{Z}$

- $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan 5x \Rightarrow 5x = k\pi + \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

  $5x - 3x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

  El conjunto solución o solución general es:

  $CS = \left\{x/x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

◄ ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS NO ELEMENTALES

Son aquellas cuya resolución requiere de la aplicación de ciertos conceptos algebraicos o trigonométricos tales como factorización, diferencia de cuadrados, resolución de una ecuación de segundo grado, identidades trigonométricas básicas, identidades del ángulo doble y otros.

Para resolver estas ecuaciones no hay un método general que se debe aplicar, lo que se hace es transformar estas ecuaciones (aplicando los conceptos algebraicos y trigonométricos ya mencionados) en ecuaciones elementales y el conjunto solución será la unión de cada una de las ecuaciones elementales que se determinen.

Aplicaciones:

1. Resolver: $\text{sen}^2x = \frac{1}{2}$, hallar su conjunto solución y las soluciones comprendidas en $[0; 2\pi\rangle$

   Resolución:

   Sea: $\text{sen}^2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ No es recomendable extraer raíz cuadrada (se pierden soluciones)

   Entonces: $2\text{sen}^2x = 1$

   $1 - \cos 2x = 1 \Rightarrow \text{Cos}2x = 0$

   Conjunto solución:

   $\cos 2x = \cos(2n + 1)\pi/2 \Rightarrow 2x = (2n + 1)\pi/2$

   $CS = \left\{x/x = \frac{(2n+1)\pi}{4}\right\},\ n \in \mathbb{Z}$

   Soluciones en $[0; 2\pi\rangle$

   $n = 0 \Rightarrow x_1 = [2(0) + 1]\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$

   $n = 1 \Rightarrow x_2 = [2(1) + 1]\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4}$

   $n = 2 \Rightarrow x_3 = [2(2) + 1]\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{5\pi}{4}$

   $n = 3 \Rightarrow x_4 = [2(3) + 1]\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_4 = \frac{7\pi}{4}$

   $n = 4 \Rightarrow x_5 = [2(4) + 1]\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_5 = \frac{9\pi}{4}$ (No)

   Las soluciones pedidas son: $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

2. Resolver la ecuación: $2\cos^2x - \cos x - 1 = 0$, indicar las soluciones en $[0; 2\pi\rangle$

   Resolución:

   Esta es una ecuación de segundo grado en cosx y puede factorizarse (método del aspa simple).

   $2\cos 2x - \cos x - 1 = 0$

   $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

   Cada factor se iguala a cero:

   $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

   $\Rightarrow x_1 = \frac{2\pi}{3}$ y $x_2 = \frac{4\pi}{3}$

   $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x_3 = 0$

   Luego las soluciones pedidas son: $\left\{0, \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

3. Hallar el conjunto solución de la ecuación: $\text{sea}3x + \text{sen}x = \text{sen}2x$

   Resolución:

   Recordar:

   $\text{sen}a + \text{sen}b = 2\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

   $\text{sen}3x + \text{sen}x = \text{sen}2x$

   $2\text{sen}2x\cos x = \text{sen}2x \Rightarrow 2\text{sen}2x\cos x - \text{sen}2x = 0$

   $\text{sen}2x(2\cos x - 1) = 0$

   $\text{sen}2x = 0 \Rightarrow \text{sen}2x = \text{sen}k\pi \Rightarrow 2x = k\pi$

   $\Rightarrow CS_1 = \left\{x/x = \frac{k\pi}{2}\right\} k \in \mathbb{Z}$

   $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

   $\Rightarrow CS_2 = \left\{x/x = 2n\pi \pm \arccos\frac{1}{2}\right\}$

   $\Rightarrow CS_2 = \left\{x/x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\} n \in \mathbb{Z}$

   Luego el conjunto solución será la unión de estos conjuntos:

   $CS = \left\{x/x = \frac{k\pi}{2}\right\} \cup \left\{x/x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\},\ n \text{ y } k \in \mathbb{Z}$

4. Hallar el conjunto solución de la ecuacillón: $\text{sen}\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

   Resolución:

   Recordar:

   $\text{sen}\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\,\text{sen}(\alpha \pm 45°)$

   $\text{sen}\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

   $\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

   $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}(4k + 1)\frac{\pi}{2}$

   $\theta + \frac{\pi}{4} = (4k + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = (4k + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

   El conjunto solución es:

   $CS = \left\{\theta/\theta = \frac{(4k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\},\ k \in \mathbb{Z}$

   Este conjunto también se puede expresar como:

   $\left\{\theta/\theta = \frac{4k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} = \left\{\theta/\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right\},\ n \in \mathbb{Z}$

5. Resolver: $\cos 8x\cos 4x + \operatorname{sen}3x\operatorname{sen}x = 0$

Resolución:

Recordar:

$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$\Rightarrow \cos 8x\cos 4x + \operatorname{sen}3x\operatorname{sen}x = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[\cos 12x + \cos 4x] + \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x] = 0$

Simplificando: $\cos 12x + \cos 2x = 0$

$2\cos\left(\frac{12x + 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{12x - 2x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow 2\cos 7x\cos 5x = 0$

$\cos 7x = 0 \Rightarrow 7x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n + 1)\frac{\pi}{14}(S_1)$

$\cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = (2K + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{14}(S_2)$

Conjunto solución:

$S_1 \cup S_2 = \left\{x/x = (2n + 1)\frac{\pi}{14}\right\} \cup \left\{x/x = (2k + 1)\frac{\pi}{10}\right\}$

n y $k \in \mathbb{Z}$

6. Resolver: $\sqrt{2} + \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

Resolución:

Recordar: $\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec x + \tan x$

luego: $\sqrt{2} + \tan x = \sec x + \tan x \Rightarrow \sqrt{2} = \sec x$

Conjunto solución:

$\{x/x = 2k\pi \pm \operatorname{arc\,sec}\sqrt{2}\} = \left\{x/x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

7. Resolver: $\tan 2x = 3\tan x$

Resolución:

Aplicamos la identidad del ángulo doble.

$\tan 2x = 3\tan x$ observa que $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 3\tan x \Rightarrow \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} - 3\tan x = 0$

$\tan x\left(\frac{2}{1 - \tan^2 x} - 3\right) = 0 \Rightarrow \tan x\left(\frac{2 - 3 + 3\tan^2 x}{1 - \tan^2 x}\right) = 0$

$\Rightarrow \tan x\frac{(3\tan^2 x - 1)}{1 - \tan^2 x} = 0$

$\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\ (S_1)$

$3\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$CS = \left\{x/x = m\pi + \arctan\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

$CS = \left\{x/x = m\pi \pm \frac{\pi}{6}\right\}(S_2)$

Conjunto solución: $S_1 \cup S_2$

$CS = \{x/x = k\pi\} \cup \left\{x/x = m\pi \pm \frac{\pi}{6}\right\}$, n y $m \in \mathbb{Z}$

8. Resolver: $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$

Resolución:

Recordar: $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \frac{7}{8} \Rightarrow 1 - \frac{7}{8} = 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{4} = (2\operatorname{sen}x\cos x)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = \operatorname{sen}^2 2x \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1 - \cos 4x}{2}$

$\Rightarrow 1 - \cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$

$CS\ 4x = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$

$CS = \left\{x/x = \frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}\right\}$

9. Hallar el conjunto solución de:
$\tan 2x + 3\tan x = 2\sqrt{3}$

Resolución:

Recordar: $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\tan 2x + 3\tan x = 2\sqrt{3}$, observa que: $\begin{cases} x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \\ x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + 3\tan x = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2\tan x + 3\tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3}$

$2\tan x + 3\tan x - 3\tan^3 x = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\tan^2 x$

$3\tan^3 x - 2\sqrt{3}\tan^2 x - 5\tan x + 2\sqrt{3} = 0$

Factorizando el primer miembro se obtiene:

$(\tan x - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 2) = 0$

Igualamos cada factor a cero:

$\tan x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow (S_1)\ CS = \left\{x/x = n\pi + \frac{\pi}{6}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow (S_2)\ CS = \left\{x/x = k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}\tan x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow (S_3)\ CS = \left\{x/x = m\pi + \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\right\} m \in \mathbb{Z}$

El conjunto solución será: $S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$CS = \left\{x/x = m\pi + \frac{\pi}{6}\right\} \cup \left\{x/x = k\pi + \frac{\pi}{3}\right\} \cup$

$\left\{x/x = m\pi - \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\} n, m$ y $k \in \mathbb{Z}$

10. Dada la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = \cos x + \operatorname{sen}3x$ en la que x varía de $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Hallar el número de intersecciones de la función con el eje de abscisas.

Resolución:

Dada una función y = f(x), las intersecciones con el eje **x** se obtienen para y = 0, es decir: f(x) = 0, las intersecciones con el eje **y** se obtienen para x = 0, es decir: y = f(0).

Función: f(x) = cosx + sen3x

La intersección con el eje x: f(x) = 0

$\Rightarrow \cos x + \operatorname{sen}3x = 0$

$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$

$$2\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2}\right) = 0$$

Cada factor se iguala a cero:

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos(2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} - x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -x = \frac{(2n + 1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$-x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = n\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow CS = \left\{x/x = n\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$

Como: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

$n = 1 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Las soluciones son: $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}(S_1)$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{(2k + 1)\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$2x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow CS = \left\{x/x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

Como: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$

Las soluciones son: $\left\{-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}(S_2)$

$S_1 \cup S_2 = \left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{8}\right\}$

El número de intersecciones es: 5

SISTEMA DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un sistema de ecuaciones trigonométricas consiste en un conjunto de ecuaciones (de la cual al menos una es trigonométrica) donde intervienen dos o más incógnitas. Para resolver un sistema de ecuaciones trigonométricas debe haber tantas ecuaciones como incógnitas tenga el sistema.

Al igual que en los casos anteriores no existe un método a seguir para la resolución de un SET, lo aconsejable es aplicar ciertos conceptos algebraicos o trigonométricos que nos permita llegar a un punto en el cual se pueda determinar alguna relación simple entre las incógnitas o quizá el conjunto solución de ellas, de tal manera que nos facilite la obtención del conjunto solución de cada una de las otras incógnitas.

Nota

En un sistema de ecuaciones trigonométricas se debe tener mucho cuidado al momento de expresar el conjunto solución de cada una de las incógnitas. La forma de expresarlos debe ser tal que cuando estos se reemplazan (a la vez) en cualesquiera de las ecuaciones que componen el sistema se verifique la igualdad correspondiente.

Aplicaciones:

1. Resolver el Sistema:

$x + y = \frac{\pi}{3}$ ...(I)

$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 1$ ...(II)

Resolución:

$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1$ ...(III)

Reemplazamos (I) en (III):

$2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x - y}{2} = 2k\pi \Rightarrow x - y = 4k\pi$

De(I): $x + y = \frac{\pi}{3}$

Resolviendo se obtiene: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

$y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi$

2. Resolver el sistema: $\cos x \cos y = \frac{3}{4}$; $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = \frac{1}{4}$

Resolución:

Sumando miembro a miembro:

$\cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = +\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$\cos(x - y) = 1 \Rightarrow x - y = n(2\pi) \pm \arccos(1)$

$\arccos(1) = 0 \Rightarrow x - y = n(2\pi)$ ...(I)

Restando miembro a miembro:

$\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$\cos(x + y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = m(2\pi) \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x + y = m(2\pi) \pm \frac{\pi}{3}$ ...(II)

De (I) y (II)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = m(2\pi) \pm \frac{\pi}{3} \\ x - y = n(2\pi) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = (m + n)\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ y = (m - n)\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{array}$$

m y $n \in \mathbb{Z}$

Nota

Observar que los valores que se obtengan para x e y dependen de m y n, por ejemplo:
Si m = 1 y n= 2 entonces una solución es:

$x = 3\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $y = -\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$x_1 = \frac{19\pi}{6}$, $x_2 = \frac{17\pi}{6}$, $y_1 = \frac{5\pi}{6}$, $y_2 = \frac{7\pi}{6}$, usted puede reemplazar estos valores en las ecuaciones dadas y verificar el resultado.

3. Resolver el sistema:

$\tan x + \tan y = 1 + \sqrt{3}$ ...(I)

$\cot gx \,.\, \tan y = \sqrt{3}$ ...(II)

Resolución:

De(II): $\tan y = \sqrt{3}\tan x$ ...(III)

Reemplazando en (I):

$\tan x + \sqrt{3}\tan x = 1 + \sqrt{3}$

$\tan x(1 + \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow \tan x = 1$

$x = n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en (III):

$\tan y = \sqrt{3}(1) \Rightarrow \tan y = \sqrt{3} \Rightarrow y = m\pi + \frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$

Nota

Observar que en este caso los valores de **x** e **y** no están relacionados, es decir, **x** sólo depende de **n** e **y** solo depende de **m**.

4. Resolver el sistema:

$x + y = \frac{\pi}{2}$ ...(I)

$\operatorname{sen}x = \sqrt{3}\operatorname{sen}y$ ...(II)

Resolución:

De(I): $x = \frac{\pi}{2} - y$ ...(III)

Reemplazando en (II): $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sqrt{3}\operatorname{sen}y$

$\cos y = \sqrt{3}\operatorname{sen}y \Rightarrow \frac{\cos y}{\operatorname{sen}y} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot y = \sqrt{3}$

$y = k\pi + \operatorname{arccot}(\sqrt{3}) \Rightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en (III):

$x = \frac{\pi}{2} - \left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - k\pi - \frac{\pi}{6}$

$x = -k\pi + \frac{\pi}{3}$

5. Resolver el sistema:

$\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}2y = \frac{1}{2}$ ...(I)

$\operatorname{sen}x(x + y) = \frac{1}{2}$ ...(II)

Resolución:

En (I): transformación a producto.

$2\operatorname{sen}(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{2}$

$2\left(\frac{1}{2}\right)\cos(x - y) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x - y) = \frac{1}{2}$

$x - y = n(2\pi) \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x - y = n(2\pi) \pm \frac{\pi}{3}$...(III)

De(II): $\operatorname{sen}(x + y) = \frac{1}{2}$

$x + y = k\pi + (-1)^k \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow x + y = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$ ....(IV)

Sumamos: (III) + (IV):

$2x = n(2\pi) + k\pi \pm \frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{6}$

$x = n\pi + \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{12},\ n \text{ y } k \in \mathbb{Z}$

Restamos: (IV) − (III):

$2y = k\pi - n(2\pi) + (-1)^k\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3}$

$y = \frac{k\pi}{2} - n\pi + (-1)^k\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{6},\ n \text{ y } k \in \mathbb{Z}$

6. Resolver el sistema:

$\operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}^2y = \frac{1}{2}$ ...(I)

$x - y = \frac{\pi}{6}$ ...(II)

Resolución:

De (I): $\operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}^2y = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}(x - y)\operatorname{sen}(x + y) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}(x + y) = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}(x + y) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(x + y) = 1$

$\Rightarrow x + y = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2m\pi + \frac{\pi}{2} \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = m\pi + \frac{\pi}{3};\ m \in \mathbb{Z} \\ y = m\pi + \frac{\pi}{6};\ m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

7. Resolver el sistema:

$x + y = \frac{\pi}{3}$ $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, $y \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 1$

Resolución:

$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1$

$x + y = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1$

$2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x - y}{2} = 2m\pi$

$\Rightarrow x - y = 4m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 4m\pi \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2m\pi + \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{6} - 2m\pi \end{array}$$

Como $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \wedge y = \frac{\pi}{6}$

8. Resolver el sistema:
$\tan x + \tan y = -2\sqrt{3}$ ...(I)
$\cot x + \cot y = 2\sqrt{3}$ ...(II)

Resolución:

$$\text{De (II)} = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\tan y + \tan x}{\tan x \tan y} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{-2\sqrt{3}}{\tan x \tan y} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \tan x \tan y = -1 \Rightarrow \tan x = -\cot y \quad ...(III)$$

Reemplazamos (III) en (I):

$$-\cot y + \tan y = -2\sqrt{3} \Rightarrow -2\cot 2y = -2\sqrt{3}$$

$$\cot 2y = \sqrt{3} \Rightarrow 2y = k\pi + \operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \quad ...(IV)$$

Reemplazamos (IV) en (III):

$$\tan x = -\cot\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = n\pi + \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}$$

Conclusión:

$$x = n\pi + \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} \quad \wedge \quad y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, \ n \text{ y } k \in \mathbb{Z}$$

9. Resolver el sistema:
$r = 1 - \cos x$ ...(I)
$4r\cos x = 1$ ...(II)

Resolución:

Multiplicamos a la igualdad (I) por (4r):

$$4r^2 = 4r - 4r\cos x \Rightarrow 4r^2 = 4r - 1$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow (2r - 1)2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en (I): $\frac{1}{2} = 1 - \cos x$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ n \in \mathbb{Z}$$

INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

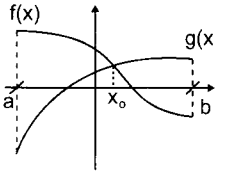
Para la resolución de inecuaciones trigonométricas se requiere de conocimientos previos de álgebra y lógicamente de trigonometría. No hay un método genérico que se debe seguir, en los diversos ejemplos que se resuelven a continuación se indican algunos procedimientos para resolver una inecuación pero que se pueden utilizar otros métodos en cada caso.
Es importante antes de proceder a la resolución de inecuaciones aclarar algunos conceptos:

1.° Para que exista solución en una inecuación debe haber intersección entre los dominios de las funciones que intervienen, si no existe intersección se dice que no hay soluciones.

2.° Puede ocurrir que exista intersección entre los dominios pero ningún valor de éste verifica la inecuación en ese caso también se dice que no hay soluciones.

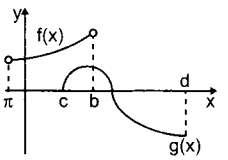
3.° Dadas dos funciones f(x) y g(x) tal que su dominio sea $\langle a, b\rangle$ y sus gráficos se indican en la figura adjunta entonces:

Observa que:



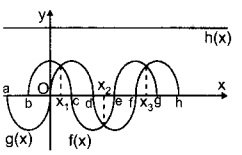
- Existe un punto de intersección cuya abscisa es: x_0, entonces para dicho valor se cumple: $f(x) = g(x)$.
- Antes de x_0 la curva de f(x) está por encima de la de g(x), entonces: $f(x) > g(x) \forall x \in \langle a ; x_0\rangle$
- Después de x_0 la curva de f(x) está por debajo de la curva de g(x), entonces: $f(x) < g(x) \ \forall \ x \in \langle x_0; b\rangle$

4.° En las figuras adjuntas se muestran dos funciones en este caso hay intersección entre los dominios $[c; b\rangle$, entonces:



$f(x) < g(x)$ no tiene soluciones.
$f(x) > g(x)$ se cumple $\forall \ x \in \langle c; b\rangle$
Por ejemplo: de la figura adjunta determinar la solución en cada caso:

- $f(x) > g(x)$
- $f(x) = g(x)$
- $f(x) < g(x)$
- $h(x) > f(x)$
- $g(x) > h(x)$



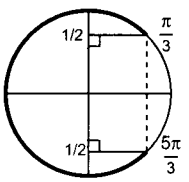
Resolución:

La intención de este ejemplo es que el estudiante aprenda a reconocer rápidamente de las gráficas de las funciones dónde se cumple la inecuación propuesta.
Primero observa que hay intersección en los dominios de las funciones que intervienen en la inecuación.

- $f(x) > g(x)$: La intersección de sus dominios es: $[b; g]$. La gráfica de f(x) está por encima de la de g(x) en: $[b; x_1\rangle \cup \langle x_2; x_3\rangle$
- $f(x) = g(x)$: La igualdad ocurre en la intersección de las gráficas $\{x_1 ; x_2; x_3\}$
- $f(x) < g(x)$: La gráfica de f(x) está por debajo de la gráfica de g(x) es: $\langle x_1; x_2\rangle \cup \langle x_3; g]$
- $h(x) > f(x)$: La gráfica de h(x) está por encima de la gráfica de f(x) para todos los valores de $x \in [b ;g]$
- $g(x) > h(x)$: La gráfica de g(x) está por debajo de la gráfica de h(x) para todo $x \in [a; h]$ esto significa que esta inecuación no se cumple por lo tanto no hay soluciones.

5.° Otro método para resolver las inecuaciones trigonométricas es utilizando la circunferencia trigonométrica, este método resulta sencillo cuando las funciones que intervienen en la desigualdad son las funciones trigonométricas básicas (senx, cosx, tanx, etc.) y cuando aparecen funciones trigonométricas compuestas (sen2x, cos3x, etc) lo recomendable es hacer un cambio de variable, tal como se indica en los ejemplos siguientes:

- $\cos x < 1/2$



Graficamos la CT y determinamos para qué valores: $\cos x = 1/2$ en $[0; 2\pi\rangle$, en este caso: $x = \pi/3$ y $5\pi/3$.
Ahora se analiza para qué valores: $\cos x < 1/2$, se obtiene de la figura que si: $\pi/3 < x < 5\pi/3$; se cumple: $\cos x < 1/2$, este es un conjunto de soluciones. Como cos x es periódica y su período es 2π se suma $2k\pi$ a cada extremo y se obtiene la solución del problema.

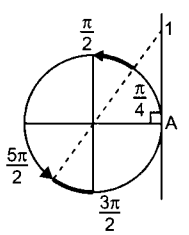
$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- $\cos 2x < 1/2$ este caso resulta más fácil de resolver graficando la función: $y = \cos 2x$; luego se resuelve la ecuación $\cos 2x = 1/2$ y finalmente de la gráfica se observa donde se verifica la desigualdad planteada. Pero se quiere utilizar la CT entonces se hace un cambio de variable.
Es decir sea: $\theta = 2x$ entonces nos queda: $\cos\theta < 1/2$, se analiza como en el ejemplo anterior y se llega a la conclusión de que: $2k\pi + \pi/3 < \theta < 5\pi/3 + 2k\pi$ ahora se regresa a la variable original.

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$



Se hace un cambio de variable: $\alpha = 3x + \frac{\pi}{4}$
Entonces resulta: $\tan\alpha > 1$ se analiza en la CT

$$\tan\alpha = 1 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Observa que $\tan\alpha > 1$ implica que:

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2};\ \text{analizando en } \langle 0; 2\pi\rangle$$

Como el período de la tangente es π se suma a los extremos $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$n\pi + \frac{\pi}{4} < \alpha < n\pi + \frac{\pi}{2} \wedge n\pi + \frac{5\pi}{4} < \alpha < n\pi + \frac{3\pi}{2}$$

En este caso resulta lo mismo decir:

$$n\pi + \frac{\pi}{4} < \alpha < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Volvemos a la variable original:

$$n\pi + \frac{\pi}{4} < 3x + \frac{\pi}{4} < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow n\pi < 3x < n\pi + \frac{\pi}{4} \therefore \frac{n\pi}{3} < x < \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

6.° Hasta el momento solo se han analizado inecuaciones trigonométricas donde solo interviene una incógnita, pero puede ocurrir que se presente una inecuación y dos incógnitas por ejemplo: $y > x + 2$, en este caso las soluciones son pares ordenados y se representa gráficamente.

En el ejemplo planteado primero graficamos: $y = x + 2$(fig.1) y luego tomamos un punto de los semiplanos que se determinan por ejemplo (0;0) si sustituimos estos valores en la inecuación obtenemos: $0 > 2$ que es falso, entonces la solución de la inecuación será el otro semiplano (fig. 2).

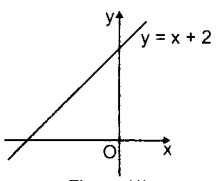


Figura (1)

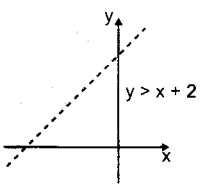


Figura (2)

7.° Cuando se presenta un sistema de inecuaciones lo que se hace es resolver cada inecuación separadamente y luego intersecarlas, la solución será la parte común.
Por ejemplo resolver el sistema:
$y \geq \operatorname{sen}x;\ \ y \leq \cos x;\ 0 \leq x \leq 2\pi$
Entonces graficamos cada inecuación separadamente, graficamos primero: $y \geq \operatorname{sen}x$, teniendo en cuenta que: $0 \leq x \leq 2\pi$ (figura 1). Luego graficamos: $y \leq \cos x$ para: $0 \leq x \leq 2\pi$ (figura 2). Finalmente intersectamos las gráficas. La respuesta es la parte común (Figura 3).

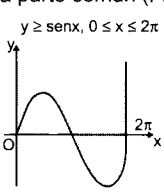


Figura 1

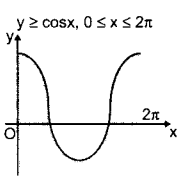


Figura 2

Respuesta:

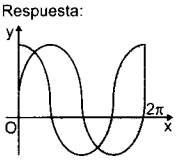


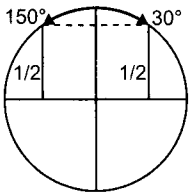
Figura 3

Aplicaciones:

1. Resolver: senx > 1/2

Resolución:

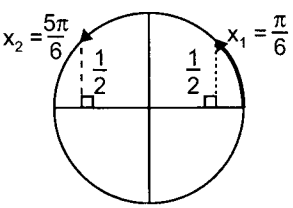
Para resolver esta inecuación usaremos la circunferencia trigonométrica.



Sabemos que: sen x > 1/2 es igual a: senx > sen30°
Observa que antes de 30° el seno es menor que 1/2 y después de 150° el seno también es menor que 1/2.
Entonces la solución sería: 30°<x<150° pero debido a la periodicidad de la función otras soluciones pueden ser:
$390° < x < 510°$; $750° < x < 870°$
En conclusión, la solución es:
$n(360°) + 30° < x < 150° + n(360°)$ o también:
$n(2\pi) + \pi/6 < x < 5\pi/6 + n(2\pi)$ o también:
$x \in \langle 2\pi n + \pi/6; 2n\pi + 5\pi/6\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$
(Observar que este intervalo representa a la unión de infinitos intervalos que se obtienen al asignar valores a **n**).

2. Resolver: sen $x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución:



En este caso para resolver esta inecuación emplearemos las gráficas de las funciones:
y = senx; y de la recta: $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, en un mismo plano.
Observa que hay dos puntos de intersección en $[0; 2\pi\rangle$; A y B.
El arco AB (señalado) cumple: $\text{sen}x < -\sqrt{3}/2$; hallamos la abscisa de A y B.

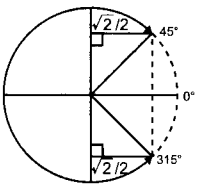
De A: $\text{sen}x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow x_1 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

De B: $\text{sen}x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Entonces una solución es:
$x \in \left\langle \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$ o $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
Debido a la periodicidad de la función:
y = senx; ($T = 2\pi$) el conjunto solución es:
$\left(2n\pi + \frac{4\pi}{3}; 2n\pi + \frac{5\pi}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$

3. Resolver:
$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; si: $0^0 \leq x \leq 360°$

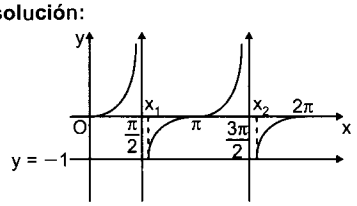
Resolución:



En los dos ejemplos anteriores se han mostrado diferentes formas de resolver una inecuación, de usted depende elegir una de ellas.
En este caso usaremos la CT
Primero hallamos los puntos de referencia resolviendo la ecuación:
$\cos x = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow x_1 = 45°$ y $x_2 = 315°$
En el arco señalado se cumple que: $\cos x \geq \sqrt{2}/2$
Como $0^0 \leq x \leq 360°$ (Dato) entonces la solución será: $0^0 \leq x \leq 45° \vee 315° \leq x \leq 360°$

4. Resolver: tanx < −1; si: $0 < x < 2\pi$

Resolución:

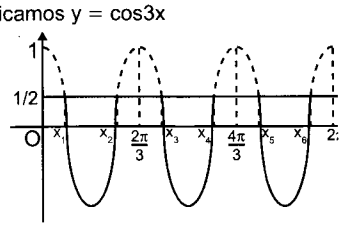


En este caso graficamos:
f(x) = tanx y g(x) = −1
Resolvemos la ecuación:
$\tan x = -1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \quad y \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$
La solución (observa la gráfica) es:
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$

5. Resolver: $\cos 3x > \frac{1}{2}$; si: $0 < x < 2\pi$

Resolución

Graficamos y = cos3x



Resolvemos la ecuación
$\cos 3x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow 3x = n(2\pi) \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$
$\Rightarrow 3x = n(2\pi) \pm \frac{\pi}{3} \qquad \therefore x = n\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{9}$

Observa de la gráfica que hay 6 soluciones en $\langle 0; 2\pi\rangle$ entonces:

$$n = 0 \Rightarrow x = 0 \pm \frac{\pi}{9}\begin{cases} x_0 = -\frac{\pi}{9}(\text{No}) \\ x_1 = \frac{\pi}{9} \end{cases}$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}\begin{cases} x_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{9} \\ x_3 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

$$n = 2 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}\begin{cases} x_4 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{11\pi}{9} \\ x_5 = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{13\pi}{9} \end{cases}$$

$$n = 3 \Rightarrow x = 2\pi \pm \frac{\pi}{9}\begin{cases} x_6 = 2\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{17\pi}{9} \\ x_7 = 2\pi + \frac{\pi}{9} = \frac{19\pi}{9}(\text{No}) \end{cases}$$

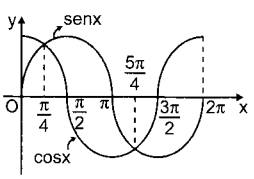
Una vez halladas las soluciones de la ecuación, pasamos a observar de la gráfica donde:
cos x > 1/2 tal como se indica en la figura.
Entonces el conjunto solución será:

$$x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{9}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}\right\rangle \cup \left\langle \frac{11\pi}{9}; \frac{13\pi}{9}\right\rangle \cup \left\langle \frac{17\pi}{9}; 2\pi\right\rangle$$

6. Resolver: senx > cosx, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Resolución:

Graficamos en un mismo plano: senx y cosx.



Resolvemos la ecuación senx = cosx

$$\frac{\text{senx}}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \quad \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$n = 0 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$n = 1 \quad \Rightarrow x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Observamos de la gráfica donde: senx > cosx, una solución es: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

Debido a la periodicidad el conjunto solución será:

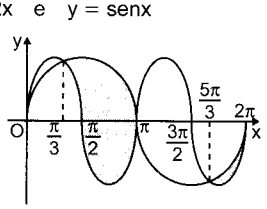
$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$$

7. Resolver: sen2x < senx; $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Resolución

Graficamos en $[0;2\pi\rangle$ las funciones:

y = sen2x e y = senx



Resolvemos la ecuación: sen2x = senx
$\Rightarrow$ 2senxcosx − senx = 0 $\Rightarrow$ senπ(2cos x − 1) = 0
senx = 0 $\Rightarrow$ x = {0; π}

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Observando la gráfica se determina que:

$$\text{sen}2x > \text{sen}x \text{ en: } \frac{\pi}{3} < x < \pi \vee \frac{5\pi}{2} < x < 2\pi$$

Período: 2π, entonces las soluciones son:

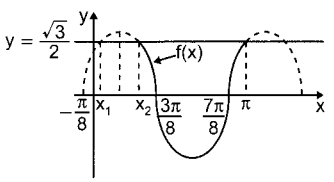
$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \pi \vee 2k\pi + \frac{5\pi}{3} < x < 2k\pi + 2\pi$$

8. Resolver: $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0 \le x < \pi$

Resolución:

Graficamos la función:

$f(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; en $[0; \pi\rangle$



Resolvemos la ecuación: $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + (-1)^k \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{24}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{24}$$

Observa que en $[0; x_1\rangle$; $f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

En: $\langle x_1; x_2\rangle$: $f(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

En: $\langle x_2; \pi\rangle$: $f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

El conjunto solución es: $\left[0; \frac{\pi}{24}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{24}; \pi\right\rangle$

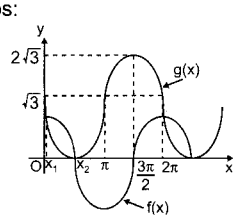
9. Resolver: $\sqrt{3}\,\text{senx} + \cos x > \sqrt{3}$; $0 < x < 2\pi$

Resolución:

La inecuación: $\sqrt{3}\,\text{senx} + \cos x > \sqrt{3}$; es equivalente a:

$$\cos x > \sqrt{3} - \sqrt{3}\,\text{senx} \quad \Rightarrow \cos x > \sqrt{3}(1 - \text{senx})$$

Graficamos:



$f(x) = \cos x$;

$g(x) = \sqrt{3}(1 - \text{senx})$

Resolvemos la ecuación:

$$\cos x = \sqrt{3}(1 - \text{senx}) \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}\,\text{senx}$$

$\sqrt{3}\,\text{sen}x + \cos x = \sqrt{3}$

$2\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6} + x = k\pi + (-1)^k \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$

$k = 1 \Rightarrow x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2}$

De la gráfica observamos que:
en: $\langle 0; x_1\rangle$: $f(x) < g(x)$
en: $\langle x_1; x_2\rangle$: $f(x) > g(x)$
en: $\langle x_2; 2\pi\rangle$: $f(x) < g(x)$
El conjunto solución es: $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

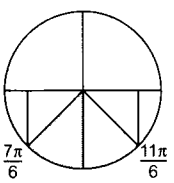
10. Resolver: $2\text{sen}^2x + 3\text{sen}x + 1 < 0$; $0 < x < 2\pi$

Resolución:

Sabemos que:
$2\text{sen}^2x + 3\text{sen}x + 1 = (2\text{sen}x + 1)(\text{sen}x + 1)$
$\Rightarrow (2\text{sen}\,x + 1)(\text{sen}x + 1) < 0 <>$

$$\underbrace{\left(\text{sen}x + \frac{1}{2}\right)(\text{sen}x + 1)}_{P} < 0$$

Observa que: $-1 \le \text{sen}x \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 + \text{sen}x \le 2$
entonces para que $P < 0$ sólo es necesario resolver.
$\text{sen}x + \frac{1}{2} < 0$, pero mucho cuidado:
$1 + \text{sen}x \ne 0 \Rightarrow \text{sen}x \ne -1 \Rightarrow x \ne \frac{3\pi}{2}$
$\text{sen}x < -\frac{1}{2}$
Resolvemos la ecuación: $\text{sen}x = -\frac{1}{2}$ en $\langle 0; 2\pi\rangle$
como este valor es notable sabemos que:
$x = \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$



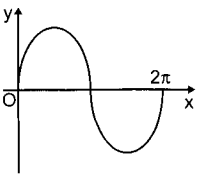
La desigualdad se cumple en la zona que se indica en la figura.
El conjunto solución es: $x \in \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\rangle - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

11. Representar gráficamente si: $x \in [0; 2\pi]$
• $y = \text{sen}x$ • $y < \text{sen}\,x$
• $y > \text{sen}x$ • $y \ge \text{sen}\,x$

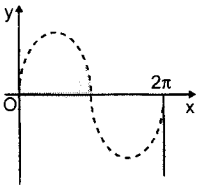
Resolución:

En este caso hay una ecuación con dos variables su solución se representa gráficamente en el plano cartesiano.
Recordar que: $y = \text{sen}x$ representa a todos los puntos de la curva que están en la gráfica del seno entonces: $y > \text{sen}x$ representa a todos los puntos que están por encima de la curva e $y < \text{sen}x$ representa a todos los puntos que están debajo de la curva.
Por lo tanto gráficamente se representa así:

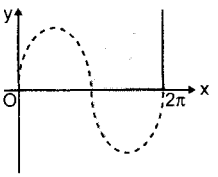
• $y = \text{sen}x$



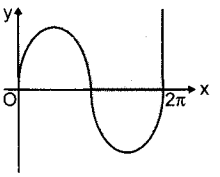
• $y < \text{sen}x$



• $y > \text{sen}x$



• $y \ge \text{sen}x$



12. Resolver gráficamente el siguiente sistema:
$y \le 1 - \cos x$; $y \ge 0$; si: $0 \le x \le 2\pi$

Resolución:

Graficamos la función $y = 1 - \cos x$, para: $0 \le x \le 2\pi$ tal como se muestra (figura 1).

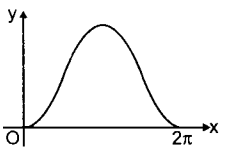


Figura 1

$y \le 1 - \cos x$ serán todos los puntos debajo de la curva (figura 2).

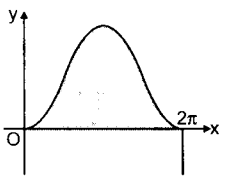


Figura 2

Pero otra condición es que: $y \ge 0$, entonces de la (figura 2), quitamos los valores negativos de y; quedando la (figura 3) que es la respuesta del problema.

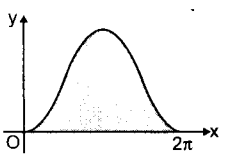


Figura 3

13. Resolver gráficamente el siguiente sistema:
$y \ge \text{sen}x; y - 2 \le \cos x$; si: $0 \le x \le 2\pi$

Resolución:

En este caso observa que hay que graficar dos funciones:
Primero: $y = \text{sen}x$, además señalamos en la figura 1: $y \ge \text{sen}\,x$

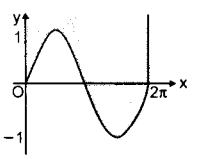


Figura 1

Segundo: $y - 2 = \cos x$ o $y = 2 + \cos x$, además señalamos en la figura 2: $y \leq 2 + \cos x$

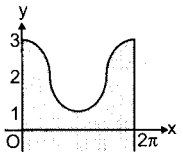
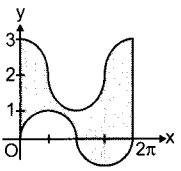


Figura 2

Ahora intersectamos estos dos conjuntos (figura 1 y figura 2) y se obtiene la respuesta del problema.



14. Resolver gráficamente si: $-1 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \pi$

Resolución:

Graficamos la función: $y = \arccos x$, y señalamos: $y \geq \arccos x$, teniendo en cuenta que: $-1 \leq x \leq 1$ (figura 1)

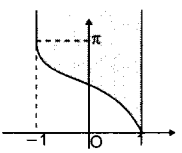


Figura 1

Pero además: $0 \leq y \leq \pi$ entonces la respuesta del problema se observa en la: (figura 2)

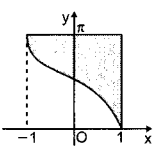


Figura 2

Aplicaciones

Ejemplos:

1. Resolver el sistema:

$\text{arcsen}x + \text{arcsen}y = 0$ ...(1)

$\text{arcsen}y + \text{arcsen}z = \frac{\pi}{3}$ ...(2)

$\text{arcsen}z + \text{arcsen}x = \frac{\pi}{6}$ ...(3)

Resolución:

Sumando (1) + (2) + (3):

$2(\text{arcsen}x + \text{arcsen}y + \text{arcsen}z) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \text{arcsen}x + \text{arcsen}y + \text{arcsen}z = \frac{\pi}{4}$ ...(4)

De (1) y (4): $0 + \text{arcsen}z = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \text{sen}\frac{\pi}{4}$

De(2) y (4): $\text{arcsen}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{arcsen}x = -\frac{\pi}{12}$

$x = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

De (3) y (4): $\text{arcsen}y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{arcsen}y = \frac{\pi}{12}$

$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

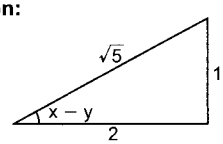
Luego: $x = -\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right);\ y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Sabiendo que: x e $y \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$; resolver el sistema:

$x - y = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ ...(1)

$\cot y - \cot x = 2$ ...(2)

Resolución:



Como: $(x - y) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\Rightarrow \cos(x - y) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow \cos(x - y) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Observamos que: $\cot(x - y) = 2$

$\Rightarrow \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x} = 2 \Rightarrow \frac{\cot x \cot y + 1}{2} = 2$

luego: $\cot x \cot y = 3 \Rightarrow \cot x = \frac{3}{\cot y}$ ...(3)

Reemplazando en(2): $\cot y - \frac{3}{\cot y} = 2$

$\cot^2 y - 2\cot y - 3 = 0 \Rightarrow (\cot y + 1)(\cot y - 3) = 0$

Dos posibles respuestas: $\cot y = -1$ o $\cot y = 3$

como $y \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \cot y = 3 \Rightarrow y = \text{arccot}(3)$

Reemplazando en (2):

$\cot y - \cot x = 2 \Rightarrow 3 - \cot x = 2 \Rightarrow \cot x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

3. Resolver el sistema:

$\text{sen}^2x + \text{sen}^2y + \text{sen}^2x = 1$ ...(1)

$\cos^2x + \cos^2y - \cos^2x = 1$ ...(2)

$\tan^2x + \tan^2y + \tan^2z = 1$ ...(3)

Resolución:

Sumando (1) y (2):

$\underbrace{\text{sen}^2x + \cos^2x}_{1} + \underbrace{\text{sen}^2y + \cos^2y}_{1} + \underbrace{\text{sen}^2z - \cos^2z}_{-\cos 2z} = 2$

$2 - \cos 2z = 2 \Rightarrow \cos 2z = 0 \Rightarrow 2z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

Observamos de la ecuación (3) que x, y, z son diferentes de $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$

Reemplazamos el valor de z en (3):

$\tan^2x - \tan^2y + \tan^2(2n + 1)\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \tan^2x - \tan^2y + 1 = 1$

$\tan^2x - \tan^2y = 0 \Rightarrow \tan^2x = \tan^2y \Rightarrow y = m\pi \pm x,\ m \in \mathbb{Z}$

Reemplazamos en (2):

$\cos^2x + \cos^2(m\pi \pm x) - \cos^2(2n + 1)\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow 2\cos^2x = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$2\cos^2x = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \cos 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

Conclusión:

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6};\ y = m\pi \pm \left(k\pi \pm \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow z = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

4. Resolver el sistema:

$\cos x + \cos y = \cos z$: ...(1)

$\cos 2x + \cos 2y = \cos 2z$ ...(2)

$\cos 3x + \cos 3y = \cos 3z$ ...(3)

Resolución:

De (3):

$4\cos^3 x - 3\cos x + 4\cos^3 y - 3\cos y = \cos 3z$

$4(\cos^3 x + \cos^3 y) - 3(\cos x + \cos y) = \cos 3z$

$4(\cos x + \cos y)(\cos^2 x - \cos x\cos y + \cos^2 y) - 3(\cos x + \cos y) = \cos 3z$

$\underbrace{(\cos x + \cos y)}_{\cos z}[4(\cos^2 x + \cos^2 y) - 4(\cos x\cos y) - 3] = \cos 3z$

$\cos z[4(\cos^2 x + \cos^2 y) - 4\cos x\cos y - 3] = \cos 3z$ ...(4)

De(1):

$\cos x + \cos y = \cos z \Rightarrow (\cos x + \cos y)^2 = \cos^2 z$

$2\cos x\cos y = \cos^2 z - \cos^2 x - \cos^2 y$

Reemplazamos en (4):

$\cos z[4(\cos^2 x + \cos^2 y) - 2\cos^2 z + 2\cos^2 x + 2\cos^2 y - 3] = \cos 3z$

$\cos z[6(\cos^2 x + \cos^2 y) - (1 + \cos 2z) - 3] = \cos 3z$

$\cos z[6(\cos^2 x + \cos^2 y) - \cos 2z - 4] = \cos 3z$ ...(5)

De (2):

$\cos 2x + \cos 2y = \cos 2z$

$2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 y - 1 = \cos 2z$

$\Rightarrow 2(\cos^2 x + \cos^2 y) = \cos 2z + 2$

Reemplazamos en (5):

$\cos z = (2\cos 2z + 2) = \cos 3z$

$\cos z[2(\cos 2z + 2)] = \cos 3z$

$2\cos 2z\cos z + 2\cos z = \cos 3z$

$\Rightarrow \cos 3z + \cos z + 2\cos z = \cos 3z$

$3\cos z = 0 \Rightarrow \cos z = 0 \Rightarrow z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}\ n \in \mathbb{Z}$

Reemplazamos el valor de z en (1) y (2):

$\cos x + \cos y = \cos(2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x + \cos y = 0$

$\Rightarrow \cos x = -\cos y$

$\cos 2x + \cos 2y = \cos(2n + 1)\pi \Rightarrow \cos 2x + \cos 2y = -1$

$\cos 2x = -1 - \cos 2y \Rightarrow \cos 2x = -(1 + \cos 2y)$

$\cos 2x = -2\cos^2 y \Rightarrow \cos 2x = -2(-\cos x)^2 = -2\cos^2 x$

$\cos 2x = -1 - \cos 2x \Rightarrow 2\cos 2x = -1$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2m\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 2x = 2m\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = m\pi \pm = \frac{\pi}{3}$

Como: $\cos y = -\cos x \Rightarrow \cos y = -\cos\left(m\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \cos y = -\cos(m\pi)\cos\frac{\pi}{3} = -\cos(m\pi)\left(\frac{1}{2}\right)$

Recordar: $\cos m\pi = (-1)^m \Rightarrow \cos y = \frac{-(-1)^m}{2}$

Analizamos dos posibilidades:

Si m es par $\Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

Si m es impar $\Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Conclusión, la solución del sistema es:

1.° $x = m\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $y = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ si m es par

2.° $x = m\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ si m es impar

5. Resolver: $|2\cos x| < \sqrt{3}$, para $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$

Resolución:

Recordar: $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$

entonces: $|2\cos x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < 2\cos x < \sqrt{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, resolvemos las ecuaciones:

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ como $x \in \langle -\pi; \pi \rangle \Rightarrow x = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$

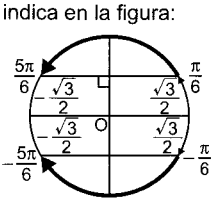
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ como $x \in \langle -\pi; \pi \rangle \Rightarrow x = \left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Usamos la circunferencia trigonometría y ubicamos los valores hallados.

Ahora analizamos para que valores:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

tal como se indica en la figura:



La solución será: $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

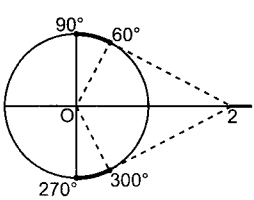
6. Resolver: $\sec x > 2$

Resolución:

Resolveremos la ecuación: $\sec x = 2$

$x = 60°$ o $x = 300°$

En la CT determinamos los valores para los cuales $\sec x > 2$



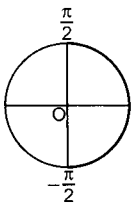
Observamos que esta desigualdad se cumple para: $60° < x < 90° \vee 270° < x < 300°$

Todas las soluciones se encuentran sumando n(360°) a cada extremo:

$n(360°) + 60° < x < 90° + n(360°) \vee$
$270° + n(360°) < x < 300° + n(360°)$

7. Resolver: $\cos x(\cos x - 1) \leq 0$

Resolución:



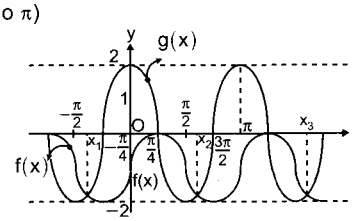
Sabemos que: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \cos x - 1 \leq 0$
entonces esta simplifica el problema:
$\cos x\underbrace{(\cos x - 1)}_{\leq 0} \leq 0$, esto implica que: $\cos x \geq 0$

Resolvemos:
$\cos x \geq 0$ por definición: $\cos x \leq 1$
$\Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1$, esto se cumple en la región que se indica en la CT.
Una solución: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
todas las soluciones se obtienen sumando: $2k\pi$
$\Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

8. Resolver: $\text{sen}^2x + 2\text{sen}x\cos x < 3\cos^2x$
   - Dar un conjunto solución comprendido en: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
   - Dar la solución general.

Resolución:
$\text{sen}^2x + 2\text{sen}x\cos x < 3\cos^2x$
$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \text{sen}2x < 3\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$
$\Rightarrow 1 - \cos 2x + \text{sen}2x < 3 + 3\cos 2x$
$\Rightarrow \text{sen}2x < 1 + 2\cos 2x$
$\Rightarrow \text{sen}2\pi - 1 < 2\cos 2x \Rightarrow \underbrace{\text{sen}2x - 1}_{f(x)} < \underbrace{2\cos 2x}_{g(x)}$

Graficamos: f(x) y g(x) en un mismo plano (período π)



Hallamos los puntos de intersección, resolviendo la ecuación: $\text{sen}2x = 1 + 2\cos 2x$

Recordar: $\text{sen}2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2x} \wedge \cos 2x = \frac{1 - \tan^2x}{1 + \tan^2x}$

$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1 + \tan^2x} - 1 = 2\left(\frac{1 - \tan^2x}{1 + \tan^2x}\right)$

$\Rightarrow 2\tan x - 1 - \tan^2x = 2 - 2\tan^2x$
$\Rightarrow \tan^2x + 2\tan x - 3 = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)(\tan x + 3) = 0$
Hallamos las soluciones en: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$, $\tan x + 3 = 0 \Rightarrow \tan x = -3$
$\Rightarrow x = -\arctan 3$

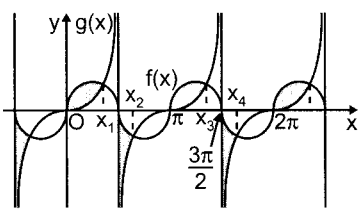
Esto significa que en la gráfica: $x_1 = -\arctan 3$

- Ahora observemos para que valores en: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ se cumple: $f(x) < g(x)$.
  de la gráfica se deduce que: $-\arctan 3 < x < \frac{\pi}{4}$
- Todas las soluciones se obtienen sumando a cada extremo del anterior:
  $nT, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ como $T = \pi$

La solución es: $n\pi - \arctan 3 < x < n\pi + \pi/4$

9. Resolver: $\text{sen}2x > \tan x$

Resolución:
sea: $f(x) = \text{sen}2x \wedge g(x) = \text{tg}x$,
graficamos ambas funciones.



Para hallar los puntos de intersección resolvemos la ecuación: $\text{sen}2x = \tan x$

$2\text{sen}x\cos x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$

$2\text{sen}x\cos^2x = \text{sen}x \Rightarrow 2\text{sen}x\cos^2x - \text{sen}x = 0$

$\text{sen}x(2\cos^2x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen}x\cos 2x = 0$

Como el período es ($T = \pi$); hallamos las soluciones en: $[0;\pi\rangle$

$\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$

Se deduce que: $x_1 = \frac{\pi}{4} \wedge x_2 = \frac{3\pi}{4}$

Analizamos de la gráfica para qué valores:
$f(x) > g(x)$, para que se entienda o visualice mejor se ha sombreado las partes donde se cumple la desigualdad. Entonces un conjunto de solución es:

$0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$

Como el período es π entonces todas las soluciones son:
$n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{4} \vee n\pi + \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{3\pi}{4}$

Este conjunto también se puede representar de la siguiente manera:

$\frac{k\pi}{2} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

10. Resolver: $2\sqrt{3}\cos^2 x - \text{sen}2x < \sqrt{3}$

Resolución:

$2\sqrt{3}\cos^2 x - \text{sen}2x < \sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3} < \text{sen}2x$

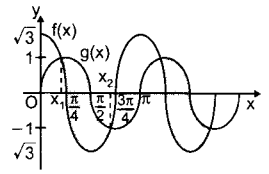
$\sqrt{3}(2\cos^2 x - 1) < \text{sen } 2x \Rightarrow \underbrace{\sqrt{3}\cos 2x}_{f(x)} < \underbrace{\text{sen}2x}_{g(x)}$

Resolvemos la ecuación:

$\sqrt{3}\cos 2x = \text{sen}2x \Rightarrow \sqrt{3} = \tan 2x$

$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

Comparando con la gráfica adjunta:



$x_1 = (0)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$

$x_2 = (1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi}{3}$

Observamos de la gráfica que:

$f(x) < g(x)$; para: $x_1 < x < x_2$ un conjunto de soluciones es: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$

El conjunto de todas las soluciones se obtiene sumando: $nT = n\pi$ a los extremos:

$n\pi + \frac{\pi}{6} < x < n\pi + \frac{2\pi}{3}\ n \in \mathbb{Z}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Indicar un conjunto solución de la ecuación:

$\frac{\cos 6x}{\cos 3x} - \frac{\text{sen}6x}{\text{sen}3x} = -2, \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$\frac{\cos 6x\text{sen}3x - \text{sen}6x\cos 3x}{\text{sen}3x\cos 3x} = -2$

$\frac{-\text{sen}(6x - 3x)}{\text{sen}3x\cos 3x} = -2 \Rightarrow \frac{-\text{sen}3x}{\text{sen}3x\cos 3x} = -2$

$\Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \therefore CS\, x = \left\{(6k \pm 1)\frac{\pi}{9}\right\}$

2. Hallar todos los valores de x:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2, k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

Dato: $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$

$2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$

Luego: $\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore CS: x = \left\{2k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$

3. Resolver la ecuación: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$, e indicar la suma de las soluciones en: $[0; 2\pi]$

Resolución:

Sea: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

$\Rightarrow \cos^2 2x + \cos^2 3x = \underbrace{1 - \cos^2 x}_{\text{sen}^2 x}$

$\cos^2 2x + \underbrace{\cos^2 3x - \text{sen}^2 x}_{} = 0$

$\cos(3x + x)\cos(3x - x)$

Factorizamos: $\cos 2x\underbrace{[\cos 2x + \cos 4x]}_{2\cos 3x\cos x} = 0$

$\Rightarrow 2\cos x\cos 2x\cos 3x = 0$

igualamos cada factor a cero:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$ ...(1)

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$x = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$ ...(2)

$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$x = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{6}\right\}$ ...(3)

Como se pide valores de $x \in [0; 2\pi]$ tendremos en:

(1) $x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

(2) $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

(3) $x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

luego las raíces son:

$x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Asi que: Σvalores de $x = 10\pi$

4. Si: $0 \le x \le 90°$, hallar la suma de las raíces de la ecuación trigonométrica: $\text{sen}x + \text{sen}2x + \text{sen}3x + \text{sen}4x = 0$

Resolución:

$\text{sen}x + \text{sen}2x + \text{sen}3x + \text{sen}4x = 0$

Tranformamos a producto:

$2\text{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\text{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

$2\text{sen}\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow 4\text{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$\text{sen}\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$

$\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

Como se pide valores de $x \in [0°; 90°]$

Damos valores a **k** (enteros) para obtener los valores de **x**.

Asi: $x = \left\{\frac{2\pi}{5}; 0\right\}$

$x = \{\phi\}$

$x = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Luego: Σvalores de $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{10}$

5. Resolver: $\text{sen}^4 2x + \cos^4 2x + \text{sen}^2 2x = 1$. Indicar un conjunto solución, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Resolución:

$\text{sen}^4 2x + \cos^4 2x + \text{sen}^2 2x = 1$

$\text{sen}^4 2x = \underbrace{1 - \text{sen}^2 2x}_{\cos^2 2x} - \cos^4 2x$

Factorizamos:

$\text{sen}^4 2x = \cos^2 2x\underbrace{(1 - \cos^2 2x)}_{\text{sen}^2 2x}$

$\text{sen}^4 2x - \text{sen}^2 2x\cos^2 2x = 0$

$\text{sen}^2 2x(\text{sen}^2 2x - \cos^2 2x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$\text{sen}^2 2x = 0 \Rightarrow \text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$

$\therefore\ x = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{\text{sen}^2 2x - \cos^2 2x} = 0$

$-\cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0$

$4x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$

o también si: $\cos 4x = 0$

$4x = (4k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{8}\ \vee$

$4x = (4k+3)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (4k+3)\frac{\pi}{8}$

$\therefore$ CS: $x = (4k+1)\frac{\pi}{8}$

6. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.
$\text{sen}x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x\cos x - \cos x - 2 = 0$

Resolución:

$(\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 2) + \cos x(\text{sen}^2 x - 1) = 0$

$(\text{sen}x + 2)(\text{sen}x - 1) + \cos x(\text{sen}x - 1)(\text{sen}x + 1) = 0$

$(\text{sen}x - 1)[\text{sen}x + 2 + \cos x(\text{sen}x + 1)] = 0$

1.° $\text{sen}x + 2 + \cos x(\text{sen}x + 1) = 0$

$\text{sen}x + 2 + \text{sen}x\cos x + \cos x = 0$

Multiplicado por 2

$\Rightarrow 2(\text{sen}x + \cos x) + 2\text{sen}x\cos x + 1 + 3 = 0$

$\Rightarrow (\text{sen}x + \cos x)^2 + 2(\text{sen}x + \cos x) + 1 + 2 = 0$

$(\text{sen}x + \cos x + 1)^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \{\phi\}$

2.° $\text{sen}x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 1$

$\therefore x = \left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{Z}$

7. Resolver la ecuación: $\sec^2\frac{x}{3} - 2\tan\frac{x}{3} = 0,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

Si: $\sec^2\frac{x}{3} = \tan^2\frac{x}{3} + 1 \Rightarrow \tan^2\frac{x}{3} - 2\tan\frac{x}{3} + 1$

$\Rightarrow \left(\tan\frac{x}{3} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \tan\frac{x}{3} = 1$

$\therefore \left(\frac{x}{3}\right) = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \left(3k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\ k \in \mathbb{Z}$

8. Si: $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, resolver la ecuación trigonométrica:
$\csc x + \csc 2x = \sqrt{3} - \cot^2 x$

Resolución:

Dato: $\csc 2x + \cot 2x = \cot x$

$\Rightarrow \csc x + \csc 2x + \cot 2x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \csc x + \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \cot\frac{x}{2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \left\{k\pi + \frac{\pi}{6}\right\} \quad \therefore$ CS: $x = \left\{2k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$

9. Hallar la suma de soluciones de la ecuación:
$\sqrt{3}\,\text{sen}x + \sqrt{2} = \cos x;\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Resolución:

$\sqrt{3}\,\text{sen}x - \cos x = -\sqrt{2}$

$2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}$

$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x = \left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

10. Si: $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, resolver la ecuación:
$\text{sen}x + \text{sen}x\cos x = 1 + \cos x + \cos^2 x$

Resolución:

$\text{sen}x(1 + \cos x) = (1 + \cos x) + \cos^2 x$

$0 = (1 + \cos x)(1 - \text{sen}x) + (1 - \text{sen}x)(1 + \text{sen}x)$

$0 = (1 - \text{sen}x)(2 + \text{sen}x + \cos x)$

1.° $1 - \text{sen}x = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 1$

$\therefore\ x = \left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

2° $2 + \text{sen}x + \cos x = 0$

$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$

$\Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow x = \{\phi\}$

11. Si: $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, resolver la ecuación trigonométrica:
$2\cos x + \cos^2 2x - \text{sen}^2 x = 0$

Resolución:

$2\cos x + \cos^2 2x - \text{sen}^2 x = 0$

$2\cos x + \cos 3x\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 + \cos 3x) = 0$

1.° $2 + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -2 \Rightarrow x = \{\phi\}$

2.° $\cos x = 0 \Rightarrow x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

12. Si: $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, hallar el conjunto solución de la ecuación trigonométrica:
$\text{sen}x(\text{sen}x + 3) + \cos x(1 + \text{sen}x) + 2 = 0$

Resolución:

$\Rightarrow \text{sen}^2x + 3\text{sen}x + \cos x + \text{sen}x\cos x + 2 = 0$

$\Rightarrow (\text{sen}^2x + 3\text{sen}x + 2) + \cos x(1 + \text{sen}x) = 0$

$\Rightarrow (\text{sen}x + 2)(\text{sen}x + 1) + \cos x(1 + \text{sen}x) = 0$

Factorizamos:

$(1 + \text{sen}x)(\text{sen}x + \cos x + 2) = 0$

$(\text{sen}x + 1)\left[\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\right] = 0$

1.° $\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow x = \{\phi\}$

2.° $\text{sen}x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = -1$

$\therefore\ x = \left\{(4k - 1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{Z}$

13. Si: $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, hallar el conjunto solución de la ecuación:

$(\sqrt{2} - 1)\text{sen}3x + \cos 3x = (\sqrt{2} - 1)\text{sen}x + \cos x$

Resolución:

$(\sqrt{2} - 1)(\text{sen}3x - \text{sen}x) = \cos x - \cos 3x$

Transformamos a producto:

$(\sqrt{2} - 1)(2\text{sen}x\cos 2x) = 2\text{sen}x\text{sen}2x$

$\text{sen}x[(\sqrt{2} - 1)\cos 2x - \text{sen}2x] = 0$

1.° $\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$

2.° $(\sqrt{2} - 1)\cos 2x - \text{sen}2x = 0$

$(\sqrt{2} - 1)\cos 2x = \text{sen}2x$

$\sqrt{2} - 1 = \tan 2x \Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow 2x = \left\{k\pi + \frac{\pi}{8}\right\};k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}\right\};k \in \mathbb{Z}$

Finalmente: CS: $x = \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}\right\} \cup \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$

14. Dado el siguiente sistema:

$\text{sen}^2x - \text{sen}^2y = \frac{1}{3};$

$\text{sen}(x + y) = \frac{1}{2}$

Hallar el valor de: cscx secy

Resolución:

1.° $\text{sen}^2x - \text{sen}^2y = \frac{1}{3}$

$\text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y) = \frac{1}{3}$ ...(1)

2° $\text{sen}(x + y) = \frac{1}{2}$ ...(2)

(2) en (1)

$\frac{1}{2}\text{sen}(x - y) = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{sen}(x - y) = \frac{2}{3}$ ...(3)

Sumamos (2) y (3)

$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

$2\text{sen}x\cos y = \frac{7}{6} \Rightarrow \text{sen}x\cos y = \frac{7}{12}$

$\therefore\ \csc x\sec y = \frac{12}{7}$

15. Resolver el sistema: $\text{sen}^2x + \text{sen}^2y = \frac{3}{4}$ ...(1)

$\text{sen}x\,.\,\text{sen}y = \frac{1}{8}$ ...(2)

Además: $\text{sen}x > \text{sen}y;\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle;$

dar como respuesta un valor de x.

Resolución:

Sea: $(\text{sen}x + \text{sen}y)^2 = \text{sen}^2x + \text{sen}^2y + 2\text{sen}x\text{sen}y$

$\Rightarrow \text{sen}x + \text{sen}y = \frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{8}\right) = 1$

$\Rightarrow |\text{sen}x + \text{sen}y| = 1$

como: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \Rightarrow \text{sen}x < 0$

luego: $0 > \text{sen}x > \text{sen}y$

$\Rightarrow \text{sen}x + \text{sen}y = -1$ ...(3)

Sea: $(\text{sen}x - \text{sen}y)^2 = \frac{3}{4} - 2\left(\frac{1}{8}\right)$

$(\text{sen}x - \text{sen}y)^2 = \frac{2}{4};\ \text{sen}x - \text{sen}y > 0$

$\Rightarrow \text{sen}x - \text{sen}y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ...(4)

(3) + (4)

$2\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{\sqrt{2} - 2}{4}$

$x = \csc\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2} - 2}{4}\right)$

16. Resolver el sistema:

$\text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y) = -\frac{1}{2}$ ...(1)

$\cos(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{2}$ ...(2)

Indicar el conjunto solución de y, si: $\forall\ k\ \pi\ \mathbb{Z}$.

Resolución:

De: (2) + (1), se obtiene:

$\cos(x + y).\cos(x - y) + \text{sen}(x + y).\text{sen}(x - y) = 0$

$\Rightarrow \cos 2y = 0$

$2y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \left(k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)$

17. Resolver:

$x + y = \pi$ ...(1)

$\tan x + \cot y = 2$ ...(2)

si: $x \in \langle 0; \pi\rangle$, dar como respuesta la suma de los valores hallados para el arco **x**.

Resolución:

De(1): $\cot y = \cot(\pi - x) = -\cot x$

Reemplazamos en (2)

$\tan x + (-\cot x) = 2$

$-2\cot 2x = 2 \Rightarrow \cot 2x = -1$

luego: $2x = \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\} \Rightarrow x = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}$

$\therefore\ \Sigma\text{valores de } x = \frac{5\pi}{4}$

18. Dado el siguiente sistema:

$\text{sen}x + \text{sen}y = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ...(1)

$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ...(2)

Si: $0 < x < \pi;\ 0 < y < \pi$, hallar: x e y.

Resolución:

De 1: $2\text{sen}\frac{(x+y)}{2}\cos\frac{(x-y)}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ...(3)

De 2: $2\cos\frac{(x+y)}{2}\cos\frac{(x-y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ...(4)

Dividimos: (3) y (4)

$\tan\frac{(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan\frac{(x+y)}{2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x+y = \frac{2\pi}{3}$ ...(5)

Reemplazamos en(3)

$\underbrace{2\text{sen}\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}}\cos\frac{(x-y)}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos\frac{(x-y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{2}$ ...(6)

Resolviendo: (5) y (6): $\therefore\ x = \frac{7\pi}{12} \wedge y = \frac{\pi}{12}$

19. Hallar $(b^2 - a^2)\tan(x+y)$, si **x** e **y** satisfacen el sistema de ecuaciones:

$\text{sen}x + \text{sen}y = a$ ...(1)

$\cos x + \cos y = b$ ...(2)

Resolución:

$\text{sen}x + \text{sen}y = a \Rightarrow 2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = a$

$\cos x + \cos y = b \Rightarrow 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = b$

Dividimos las dos expresiones obtenidas:

$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{a}{b}$

Ahora como:

$$\tan(x+y) = \frac{2\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \tan(x+y) = \frac{2\frac{a}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}} \Rightarrow \tan(x+y) = \frac{2ab}{b^2-a^2}$$

$\therefore\ (b^2 - a^2)\tan(x+y) = 2ab$

20. Resolver el sistema: $x - y = \frac{\pi}{12}$; $\text{sen}^2x + \text{sen}^2y = \frac{3}{4}$ indicar un conjunto solución de x, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Resolución:

$x - y = \frac{\pi}{12}$ ...(1)

$\text{sen}^2x + \text{sen}^2y = \frac{3}{4}$ ...(2)

De(2): $\text{sen}^2x = 1 - \cos^2x \Rightarrow 1 - \cos^2x + \text{sen}^2y = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos^2x - \text{sen}^2x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = \cos(x+y)\cos(x-y)$ ...(3)

Reemplazamos (1) en (3)

$\Rightarrow \frac{1}{4} = \cos(x+y)\cos\frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{1}{4} = \cos(x+y)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

$\Rightarrow \cos(x+y) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Una solución será: $x + y = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$ ...(4)

Resolviendo (1) ∧ (4)

un conjunto solución para x será: $x = \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$

21. Dado el sistema de ecuaciones:

$x + y = \theta$ ...(1)

$\text{sen}^2x + \text{sen}^2y = 1$ ...(2)

Indicar un valor de x.

Resolución:

$\Rightarrow 0 = \underbrace{1 - \text{sen}^2x}_{\cos^2x} - \text{sen}^2y \Rightarrow 0 = \cos(x+y)\cos(x-y)$

Reemplazamos (1) en (2):

$0 = \cos\theta\cos(x-y) \Rightarrow \cos(x-y) = 0$

Una solución será: $x - y = \frac{\pi}{2}$ ...(2)

Resolviendo (1) ∧ (3) obtenemos que: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$

22. Indicar las soluciones del primer cuadrante que verifican el sistema:

$x - y = \frac{\pi}{6}$ ...(1)

$(2-\sqrt{2})\tan x = \tan y \Rightarrow \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ...(2)

Resolución:

De (2): $\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

Pasamos a senos y cosenos: $\frac{\text{sen}x\cos y}{\cos x\text{sen}y} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

Por proporciones:

$\frac{\text{sen}x\cos y + \cos x\text{sen}y}{\text{sen}x\cos y - \cos x\text{sen}y} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$\frac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}(x-y)} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen}(x+y) = \sqrt{3}\,\text{sen}(x-y)$...(3)

Sustituimos (1) en (3)

$\text{sen}(x+y) = \sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como: $x; y \in IC$

$\Rightarrow x + y = \frac{\pi}{3}$ ...(4)

De (1) y (4): $x - y = \frac{\pi}{6}$

Resolviendo obtenemos: $x = \frac{\pi}{4} \wedge y = \frac{\pi}{12}$

23. Dada la ecuación trigonométrica: $\frac{\cos 5x}{\cos 7x} = \frac{\cos x}{\cos 3x}$; $k \in \mathbb{Z}$, determinar su solución general:

Resolución:

De la ecuación: $\cos 5x\cos 3x = \cos x\cos 7x$

transformamos de producto a suma:

$\Rightarrow \frac{\cos 8x + \cos 2x}{2} = \frac{\cos 8 + \cos 6x}{2}$

$\cos 2x - \cos 6x = 0 \Rightarrow 2\text{sen}4x\text{sen}2x = 0$

Igualamos cada factor a cero:

$\text{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$

$\text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

luego: CS: $x = \left\{\frac{k\pi}{4}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ $\therefore$ CS: $x = \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$

24. Si: $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, resolver la ecuación:

$2(\text{sen}^4x + \cos^4x) + 4(\text{sen}^6x + \cos^6x) = 4$

Resolución:

$2(1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x) + 4(1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x) = 4$

Simplificando:

$6 - 16\text{sen}^2x\cos^2x = 4$

$\text{sen}^2x\cos^2x = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{\text{sen}2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

$\text{sen}^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2}$

Luego: $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$\therefore\ x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{8}\right\}$

Como: $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$K = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8};\ K = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$

$\therefore\ \text{CS}: x = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right\}$

25. Al resolver el sistema: $x + y = \pi$; $\text{sen}x - \cos y = \sqrt{2}$ hallar la solución de x, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

Se tiene: $x + y = \pi \Rightarrow \cos x = -\cos x$ ...(1)

$\text{sen}x - \cos y = \sqrt{2}$ ...(2)

Reemplazamos (1) en (2)

$\text{sen}x + \cos x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Luego:

$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \text{CS}: x = \left\{(8k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$

26. Resolver la ecuación trigonométrica:

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan x + 2 = 0,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

Desarrollamos la tangente compuesta.

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x} + \tan x + 2 = 0$$

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \tan x + 2 = 0$$

$$\frac{3 - \tan^2 x}{1 - \tan x} = 0 \Rightarrow 3 - \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$$

Luego:

cuando: $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \pi/3$

cuando: $\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi - \pi/3$

$\therefore\ \text{CS}: x = \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$

27. Si: $x \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$; hallar la suma de todas las soluciones que se obtienen al resolver la ecuación trigonométrica:

$\cos 2x + \text{sen}^2x = \frac{1}{2}$

Resolución:

$2\cos 2x + 2\text{sen}^2x = 1 \Rightarrow$

$2\cos 2x + (1 - \cos 2x) = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$

Luego: $2x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad \therefore\ \text{CS}: x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$

Como por condición: $x \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

Para: $k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

Entonces: Σ valores de $x = \frac{15\pi}{4}$

28. Determinar la suma de las soluciones de la ecuación: $\sqrt{3}\,\text{sen}x - 1 = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$

Resolución:

$\underbrace{\sqrt{3}\,\text{sen}x - \cos x}_{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

Luego: $\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \text{CS}: x = \left\{k\pi + \frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{6}\right\}$

Cuando $x \in [0; 2\pi]$ tenemos los valores:

$k = 0 \Rightarrow x = \pi/3$ (si)

$k = 1 \Rightarrow x = \pi$ (si)

$k = 2 \Rightarrow x = \pi/3$ (no)

$\therefore\ \Sigma$valores de $x = \frac{4\pi}{3}$

29. Determinar un conjunto solución de la inecuación: $2\text{sen}^2x + 7\text{sen}x + 3 \le 0$

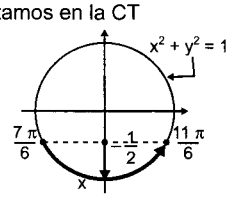
Resolución:

$2\text{sen}^2x + 7\text{sen}x + 3 \le 0$

$\Rightarrow (2\text{sen}x + 1)(\text{sen}x + 3) \le 0$; donde $\text{sen}x + 3 > 0$

$\Rightarrow 2\text{sen}x + 1 \le 0 \Rightarrow \text{sen}x \le -1/2$

Lo representamos en la CT



Del gráfico: $x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$

30. Determinar el conjunto solución de la inecuación: $\text{sen}6x < 5\text{sen}3x$; $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$\text{sen}6x < 5\text{sen}3x \Rightarrow 2\text{sen}3x\cos 3x < 5\text{sen}3x$

$\text{sen}3x(2\cos 3x - 5) < 0$ ...(1)

Pero: $-1 \le \cos 3x \le 1 \Rightarrow -7 \le 2\underbrace{\cos 3x - 5}_{(-)} \le -3$

Luego en (1):

$\text{sen}3x(-)\underbrace{(2\cos 3x - 5)}_{(-)} < 0 \Rightarrow \text{sen}3x > 0$

CS: $3x \in \langle 2k\pi\,;\,2k\pi + \pi\rangle \Rightarrow \text{CS}: x \in \left\langle\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right\rangle$

31. Obtener todas las soluciones de:

$$\text{sen}^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{sen}\frac{x}{2}\text{sen}\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

Dar por respuesta la solución general de x.

a) $2n\pi + 2k\pi \pm \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{4}$

Resolución:

Se sabe que:

$\text{sen}^2a - \text{sen}^2b = \text{sen}(a+b)\,\text{sen}(a-b)$

Luego de la 1ra ecuación:

$$\text{sen}\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{sen}x\ \text{sen}y = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Usando ángulos dobles:

$$2\,\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \times 2\text{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\text{sen}\frac{x}{2}\text{sen}\frac{y}{2}\right)}_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

Racionalizando:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8} \qquad ...(1)$$

también:

$$\text{sen}\frac{x}{2}\text{sen}\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} \qquad ...(2)$$

(1) + (2):

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{12} \qquad ...(3)$$

(1) − (2):

$$\cos\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \qquad ...(4)$$

(3) + (4):

$$x = 2n\pi + 2k\pi \pm \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{4}$$

32. Dar una solución del sistema siguiente, en el cual θ es constante.

$\text{sen}\theta + \text{sen}(\theta + x) + \text{sen}(\theta + y) = 0$

$\cos\theta + \cos(\theta + x) + \cos(\theta + y) = 0$

Resolución:

De la 1ra: $2\text{sen}\left(\theta + \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\text{sen}\theta$

De la 2da: $2\cos\left(\theta + \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\cos\theta$

Dividiendo y simplificando:

$$\tan\left(\theta + \frac{x+y}{2}\right) = \tan\theta$$

Entonces una solución se obtiene de:

$$\theta + \frac{x+y}{2} = \theta \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

En la primera ecuación:

$$\text{sen}\theta + \underbrace{\text{sen}(\theta - y) + \text{sen}(\theta + y)}_{2\text{sen}\theta\cos y} = 0$$

$$\text{sen}\theta\underbrace{(1 + 2\cos y)}_{0} = 0 \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3}$$

pero: $x = -y \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$

33. Obtener un valor aproximado de x − y en el siguiente sistema de ángulos agudos:

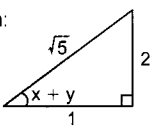
$x + y = \arctan 2$

$$\cos^2x + \cos^2y = \frac{\sqrt{2}+10}{10}$$

Resolución:

De la 1.ª ecuación:

$\tan(x + y) = 2 \Rightarrow$



multiplicando por 2 a la 2.a:

$$\underbrace{2\cos^2x} + \underbrace{2\cos^2y} = \frac{\sqrt{2}+10}{5}$$

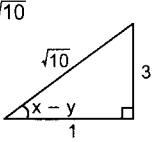
$$1 + \cos x + 1 + \cos y = \frac{\sqrt{2}+10}{5}$$

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}+10}{5} - 2$$

$$2\underbrace{\cos(x+y)}\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \cos(x-y) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



$\therefore x - y = 90° - 18°\,30' \Rightarrow x - y = 71°\,30'$

34. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x - y = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \tan\left(\frac{x-y}{4}\right)$$

Resolución:

Reemplazando la 1.a en la 2.a ecuación:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \tan\frac{\pi}{12}$$

además: $x = \frac{\pi}{3} + y$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)}{\cos y} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\cos y}{\cos y} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\text{sen}y}{\cos y} = 2 - \sqrt{3}$$

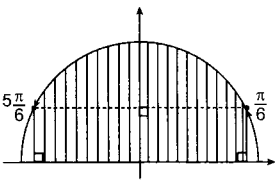
$$1 - \sqrt{3}\tan y = 4 - 2\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \tan y = 2 - \sqrt{3}$

Luego: $y = n\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + y = n\pi + \frac{5\pi}{12}$

35. Resolver: $\tan^4 x + 8\tan^3 x + 2\tan^2 x - 8\tan x + 1 < 0$ $(n \in Z)$

Resolución:



$\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1 < 8\tan x - 8\tan^3 x$

$\underbrace{(1 + \tan^2 x)^2}_{+} < 8\tan x(1 - \tan^2 x)$

$\Rightarrow 1 < 4\underbrace{\left(\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}\right)}_{\text{sen}2x}\underbrace{\left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)}_{\cos 2x}$

$\frac{1}{2} < 2\text{sen}2x \cos 2x \Rightarrow \text{sen}4x > \frac{1}{2}$

$\text{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x \in \text{I o II C}$

$\therefore \frac{\pi}{6} < 4x < 5\frac{\pi}{6}$

En general:

$2n\pi + \frac{\pi}{6} < 4x < 2n\pi + 5\frac{\pi}{6}$

$n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24} < x < n\frac{\pi}{2} + 5\frac{\pi}{24}$

36. Al resolver el sistema $x + 2y = \frac{\pi}{2}$

$3\tan x + 12\tan y = 5\sqrt{3}$, una solución de y es:

Resolución:

$x + 2y = \frac{\pi}{2}$ ...(I)

$3\tan x + 12\tan y = 5\sqrt{3}$ ...(II)

De (I): $\tan x = \cot 2y$

Reemplazamos en (II): $3\cot 2y + 12\tan y = 5\sqrt{3}$

$$3\left(\frac{1 - \tan^2 y}{2\tan y}\right) + 12\tan y = 5$$

de donde se obtiene:

$21\tan^2 y - 10\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$

$7\tan y \quad -\sqrt{3} \Rightarrow \tan y = \frac{\sqrt{3}}{7}$

$3\tan y \quad -\sqrt{3} \Rightarrow \tan y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Tenemos dos soluciones:

i) $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{7}$

$y = k\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right), k \in \mathbb{Z}$

ii) $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = k\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$

Una solución de y es:

$y = k\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right), k \in \mathbb{Z}$

37. Resolver el sistema:

$x + y = \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < x < \pi; -\frac{\pi}{2} < y < 0$

$\tan(x) - \tan(y) = 0$

Dar como respuesta: $x - y$

Resolución:

$x + y = \frac{\pi}{2}$ ...(I)

$\tan x - \tan y = 0$ ...(II)

Ojo con las condiciones:

$\frac{\pi}{2} < x < \pi, -\frac{\pi}{2} < y < 0$ ...(θ)

De (II) obtenemos:

$\tan x = \tan y$

$x = k\pi + y, k \in \mathbb{Z}$

$x - y = k\pi$

de donde: $x - y = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

Tomamos: $x - y = \pi$

De (I): $x + y = \frac{\pi}{2}$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$x = \frac{3\pi}{4}; y = \frac{\pi}{4}$

que cumplen con las condiciones señaladas en (θ).

$\therefore x - y = \pi$

38. Resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \text{sen}x = 2\text{sen}y \end{array}\right\}$

indicar la solución general de x

Dado que $x \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$x - y = \frac{\pi}{3}$ ...(I)

$\text{sen}x = 2\text{sen}y$ ...(II)

De(I): $y = x - \frac{\pi}{3}$

Reemplacemos en (II):

$\text{sen}x = 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\text{sen}x = 2\left[\text{sen}x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right]$

$\text{sen}x = 2\left[\text{sen}x \times \frac{1}{2} - \cos x \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\text{sen}x = \text{sen}x - \sqrt{3}\cos x$

$\cos x = 0$

$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

o lo que es lo mismo:

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

39. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica $|\text{sen}x| + |\cos x| = \sqrt{2}$, si $k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$\underbrace{\text{sen}2x + \cos 2x}_{1} + \underbrace{|2\text{sen}x\cos x|}_{\text{sen}2x} = 2 \Rightarrow |\text{sen}2x| = 1$

Como:

$\cos^2 2x = 1 - \text{sen}^2 2x \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - |\text{sen}2x|^2$

$\cos^2 2x = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$

$|\text{sen}x| + |\cos x| = \sqrt{2}$

Elevando al cuadrado se obtiene una ecuación equivalente:

$(|\text{sen}x| + |\cos x|)^2 = \sqrt{2}^2$

$|\text{sen}x|^2 + |\cos x|^2 + 2|\text{sen}x| \times |\cos x| = 2$

40. Una raíz de la ecuación:

$\text{sen}5x - \cos x + \text{sen}3x = 0$, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ es:

Resolución:

$\text{sen}5x - \cos x + \text{sen}3x = 0$

donde $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

Agrupemos para transformar a producto.

$\underbrace{\text{sen}5x + \text{sen}3x} - \cos x = 0$

$2\text{sen}4x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\,[2\text{sen}4x - 1] = 0$

Analicemos dos casos:

i) $\cos x = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$x = -\frac{\pi}{2}$

ii) $2\text{sen}4x - 1 = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$\text{sen}4x = \frac{1}{2}$

$4x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{k\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{24}$

$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24}$

$x = -\frac{7\pi}{24}$

$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$

$x = -\frac{11\pi}{24}$

41. Resolver: $\text{sen}^6x + \cos^6x + \frac{1}{16} = \text{sen}^4x + \cos^4x$ indicando la menor solución positiva.

Resolución:

$\text{sen}^6x + \cos^6x + \frac{1}{16} = \text{sen}^4x + \cos^4x$

Sabemos que:

$\text{sen}^4x + \cos^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$\text{sen}^6x + \cos^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{16} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$\frac{3}{8}\cos 4x - \frac{2}{8}\cos 4x = \frac{12}{16} - \frac{1}{16} - \frac{10}{16}$

$\frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4x = \frac{\pi}{3} \quad \therefore x = \frac{\pi}{12}$

42. Halle la suma de los valores positivos de x, menores de 90° que satisfacen la ecuación:

$\cos 3x + 3\cos 5x + 3\cos 7x + \cos 9x = 0$

Resolución:

$\cos 3x + 3\cos 5x + 3\cos 7x + \cos 9x = 0$

donde $0° < x < 90°$

Agrupemos para transformar a producto:

$(\cos 9x + \cos 3x) + 3(\cos 7x + \cos 5x) = 0$

$2\cos 6x \cos 3x + 3 \times 2\cos 6x \cos x = 0$

$2\cos 6x\,[\cos 3x + 3\cos x] = 0$

$\cos 6x \times 4\cos 3x = 0$

Analicemos los dos casos:

i) $\cos 6x = 0$; $0° < x < 90°$

$6x = (2n + 1)90°$, $n \in \mathbb{Z}$

$x = (2n + 1)15°$, $n \in \mathbb{Z}$

dando valores a n se obtiene:

$(\alpha)x = 15°, 45°, 75° \quad ...(I)$

ii) $\cos^3x = 0$, $0° < x < 90°$

$\cos x = 0$, $0° < x < 90°$

$\nexists\, x$

Finalmente, de (I):

Suma de soluciones = 135°

43. Para que valores de x; $0 < x < 2\pi$, se cumple:

$(1 - \cos x + \text{sen}x)^2 \geq 1 + \text{sen}x$

Resolución:

De la inecuación propuesta, desarrollamos el primer miembro:

$1 + \cos^2x + \text{sen}^2x - 2\cos x + 2\text{sen}x - 2\text{sen}x\cos x \geq 1 + \text{sen}x$

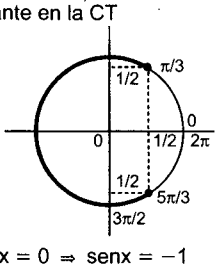
$1 + \text{sen}x - 2\cos x - 2\text{sen}x\cos x \geq 0$

$(1 + \text{sen}x) - 2\cos x(1 + \text{sen}x) \geq 0$

$(1 + \text{sen}x)(1 - 2\cos x) \geq 0$

Observación:

Representante en la CT



i) $1 + \text{sen}x = 0 \Rightarrow \text{sen}x = -1$

ii) $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

En el intervalo de $0 < x < 2\pi$: $0 \leq 1 + \text{sen}x \leq 2$

En el intervalo de $\frac{\pi}{3} \times x \times \frac{5\pi}{3}$: $0 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$

Luego cumple si: $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$

44. Para que valores de x, $0 < x < 2\pi$, se cumple. $\text{sen}(2x) > \cos x$?

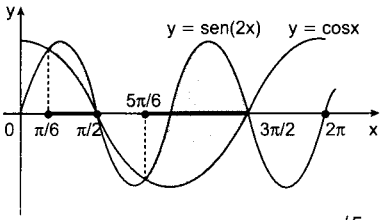
Resolución:

Inecuación propuestasen$(2x) > \cos x$; $0 < x < 2\pi$

Observar: $\text{sen}(2x) = \cos x \Rightarrow$

i) $2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

ii) $2x - x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}$



Luego: $\text{sen}(2x) > \cos x$, si $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

45. Del siguiente sistema de ecuaciones obtener z:

$\sqrt[3]{\cos x \cos y} = \cos z$

$\sqrt{\tan x \tan y} = \tan z$

$\text{sen}x = \text{sen}y \cos(x - y) + \cos y \cos z$

Resolución:

Sean las ecuaciones (1), (2) y (3) respectivamente:

De (1): $\cos x \cos y = \cos^3 z$ ...(4)

De (2): $\dfrac{\text{sen}x\text{sen}y}{\cos x \cos y} = \tan^2 z$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}x\text{sen}y}{\cos^3 z} = \dfrac{\text{sen}^2 z}{\cos^2 z}$

$\Rightarrow \text{sen}x\,\text{sen}y = \cos z\,\text{sen}^2 z$ ...(5)

(4) + (5):

$\cos(x - y) = \cos z\overbrace{(\text{sen}^2 z + \cos^2 z)}^{1}$

$\Rightarrow \cos(x - y) = \cos z$

$\therefore x - y = 2n\pi \in z$ ...(6)

De (3):

$\text{sen}[(x - y) + y] = \text{sen}y \cos(x - y) + \cos y \cos z$

$\text{sen}(x - y)\cos y + \text{sen}y \cos(x - y)$

$\text{sen}y \cos(x - y) + \cos y \cos z$

$\Rightarrow \text{sen}(x - y)\cos y = \cos y \cos z$

$\Rightarrow \text{sen}(x - y) = \cos z$

Reemplazando (6): $\text{sen}(2n\pi \pm z) = \cos z$

$\Rightarrow \pm\text{sen}z = \cos z$

$\therefore \tan z = \pm 1$

pero $\tan z = -1$ ¡No cumple!

$\therefore \tan z = 1$

$z = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$

46. Resolver la inecuación: $3\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x) < \tan x$, dar el conjunto solución comprendida en $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

Resolución:

$3\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x) - \tan x < 0$

$\dfrac{3\text{sen}(2x)\cos x + \text{sen}(4x)\cos x - \text{sen}x}{\cos x} < 0$

multiplicamos por 2:

$\dfrac{3[2\text{sen}(2x)\cos x] + 2\text{sen}(4x)\cos x - 2\text{sen}x}{\cos x} < 0$

de producto a suma:

$\dfrac{3[\text{sen}(3x)\cos x] + \text{sen}(5x) + \text{sen}(3x) - 2\text{sen}x}{\cos x} < 0$

$\dfrac{\overline{\text{sen}(5x)} + 4\text{sen}(3x) + \overline{\text{sen}x}}{\cos x} < 0$

$\dfrac{2\text{sen}(3x)\cos(2x) + 4\text{sen}(3x)}{\cos x} < 0$

$\dfrac{2\text{sen}(3x)\overbrace{[\cos(2x) + 2]}^{(+)}}{\underbrace{\cos x}_{(-)}} < 0$ ...(1)

analizando:

i) $\underbrace{\cos(2x + 2)}_{\text{factor positivo}} > 1$

ii) dado: $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \underbrace{\cos x}_{\text{factor negativo}} < 0$

luego la inecuación (1) se reduce a: $\text{sen}(3x) > 0$

Luego: $2n\pi < 3x < (2n + 1)\pi$; $n \in Z$

$2n\frac{\pi}{3} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{3}$; $n \in Z$

$n = 0$: $0 < x < \pi/3$

$n = 1$: $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ $\therefore x \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \pi \right\rangle$

47. Resolver: $\text{sen}^2 x + \text{sen}(2x) \leq 3\cos^2 x$, dar un conjunto solución comprendido en $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Resolución:

La inecuación propuesta se transforma en:

$\text{sen}(2x) \leq 3\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

uso de identidades:

$\text{sen}(2x) \leq 3\left(\dfrac{1 + \cos(2x)}{2}\right) - \left(\dfrac{1 - \cos(2x)}{2}\right)$

$\text{sen}(2x) \leq 1 + 2\cos(2x)$ ...(*)

Sea f y g dos funciones de modo que:

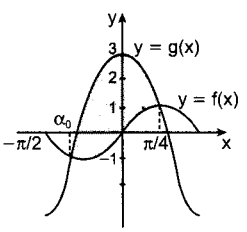
hacemos: $f(x) = \text{sen}(2x)$

$g(x) = 1 + 2\cos(2x)$

$\text{Dom}f \cap \text{Dom}g = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Graficamos en el dominio común

$f(x) < g(x) \Rightarrow x \in \left[\alpha_0; \frac{\pi}{4}\right]$



Hallando α_0:

$\text{sen}(2x) = 1 + 2\cos(2x)$

$\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = 1 + 2\left(\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)$

$\tan^2 x = 2\tan x - 3 = 0$

$\tan x = 1$ y $\tan x = -3$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\arctan(3)$

Luego la inecuación se cumple si:

$x \in \left[-\arctan 3; \frac{\pi}{4}\right]$

48. Hallar la solución general para x:
$\cos x + \cos y = 0$
$\tan x + \tan y = 0$
$(n, K \in Z)$

Resolución:
De la 1ra ecuación:
$\cos x = -\cos y \Rightarrow \cos x = \cos(\pi - y)$
$\therefore x = 2n\pi \pm (n - y)$ ...(1)
De la 2da ecuación:
$\tan x = -\tan y \Rightarrow \tan x = \tan(-y)$
$\therefore x = k\pi + (-y)$ ...(2)
(2) en (1): $k\pi - y = 2n\pi \pm (\pi - y)$
i) con el (+): $k\pi - y = 2n\pi + \pi - y$
no se obtiene y
ii) con el (−):
$k\pi - y = 2n\pi + \pi + y$
de donde: $2y = k\pi - 2n\pi + \pi$
$\Rightarrow y = k\frac{\pi}{2} - n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore y = (k+1)\frac{\pi}{2} - n\pi$
pero:
$k + 1$: n° entero cualquiera $\rightarrow k$
$-n$: n° entonces cualquiera $\rightarrow n$
Luego: $y = \frac{k\pi}{2} + n\pi$

49. Resolver: $\operatorname{sen}\frac{x}{55} + \operatorname{sen}\frac{x}{11} = \operatorname{sen}\frac{x}{5}$
y obtener una solución general

Resolución:
Sea: $x = 55\theta$
Reemplazando: $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}5\theta = \operatorname{sen}11\theta$
$\Rightarrow \operatorname{sen}5\theta = \operatorname{sen}11\theta - \operatorname{sen}\theta$
a producto:
$\operatorname{sen}5\theta = 2\operatorname{sen}5\theta\cos6\theta$ ...(*)
i) El factor cancelado se iguala a cero:
$\operatorname{sen}5\theta = 0 \Rightarrow 5\theta = n\pi + (-1)^n 0$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = 55\left(n\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow x = 11n\pi$
ii) De (*) queda lo siguiente:
$1 = 2\cos6\theta \Rightarrow \cos6\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow \theta = n\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \quad \therefore x = 55\left(n\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}\right)$

50. Resolver: $\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{3} = \cos\frac{x}{3} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}$
e indicar un conjunto solución $(n \in Z)$

Resolución:
Sea: $x = 6\theta$
Reemplazando:
$\cos3\theta + \operatorname{sen}2\theta = \operatorname{sen}3\theta + \cos2\theta$
$\cos3\theta - \operatorname{sen}3\theta = \cos2\theta - \operatorname{sen}2\theta$
y recordando que: $\cos\alpha \pm \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2}\cos\left(a \mp \frac{\pi}{4}\right)$
se tendrá en la ecuación:
$\sqrt{2}\cos\left(3\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ ...(*)
y usando la fórmula general para cosenos se tendrá de (*):
$3\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
i) con el (+): $3\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi + 2\theta - \frac{\pi}{4}$
$\therefore \theta = 2n\pi \Rightarrow x = 12n\pi$
ii) con el (−): $3\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi - 2\theta + \frac{\pi}{4}$
$\therefore \theta = 2n\pi \Rightarrow x = 12n\frac{\pi}{5} + 3\frac{\pi}{5}$

51. Hallar la suma de los tres primeros menores valores positivos de x, tales que:
$1 + 4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x = 8\cos x$

Resolución:
$1 + 4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x = 8\cos x$
$1 + 8\operatorname{sen}^2x\cos x = 8\cos x$
$1 + 8\cos x - 8\cos^3x = 8\cos x$
$\cos x = \frac{1}{2}$
$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in Z$
Luego: $x = \frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}; 7\frac{\pi}{3}$
Por consiguiente, la suma de las tres raíces es $13\frac{\pi}{3}$

52. Obtener un valor aproximado de x tal que:
$\tan(\pi\cot x) = \cot(\pi\tan x)$

Resolución:
En el segundo miembro, se usa la propiedad del complemento:
$\tan(\pi\cot x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \pi\tan x\right)$
ahora, usando la solución general para tangentes:
$\pi\cot x = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\tan x\right)$
cancelando π:
$\underbrace{\cot x + \tan x} = n + \frac{1}{2}$
$2\csc2x = \frac{2n+1}{2}$
$\csc2x = \frac{2n+1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}2x = \frac{4}{2n+1}$
siendo $n \in Z$, se dará valores hasta obtener x notables:
$n = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}2x = 4$ absurdo
$n = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}2x = \frac{4}{3} > 1$ absurdo
$n = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}2x = \frac{4}{5} < 1 \quad \therefore 2x = 53° \Rightarrow x = 26{,}5°$

53. Resolver: $\operatorname{sen}5x \times \csc^3x = -2$
e indicar una solución:

Resolución:
$\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}^3x} = -2 \Rightarrow \operatorname{sen}5x = -2\operatorname{sen}^3x$
sumando senx:
$\underbrace{\operatorname{sen}5x + \operatorname{sen}x} = \operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}^3x$
$2\operatorname{sen}3x\cos2x = \operatorname{sen}x\underbrace{(1 - 2\operatorname{sen}^2x)}_{\cos2x}$ ...(*)

i) cancelando cos2x e igualando a cero:

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \therefore\ x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

ii) ahora, en (*)

$2\text{sen}3x = \text{sen}x$

usando la fórmula especial del triple:

$\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos 2x + 1)$

Luego: $2\text{sen}x\,(2\cos 2x + 1) = \text{sen}x$

$\text{sen}x \neq 0$, pues en la ecuación original no cumple:

$2(2\cos 2x + 1) = 1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

54. La solución general de $\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \csc x$ es:

Resolución:

$\frac{\text{sen}3x\cos x - \cos 3x\,\text{sen}x}{\text{sen}x\cos x} = \csc x$

$2\text{sen}2x = \text{sen}2x\csc x \Rightarrow \text{sen}2x(2 - \csc x) = 0$

$\text{sen}2x = 0 \vee \csc x = 2$

$\text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z} \ldots(1)$

$\csc x = 2 \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z} \quad \ldots(2)$

se tiene que (1) no es conjunto solución de la ecuación dada.

55. Hallar la suma de las soluciones de la siguiente ecuación:

$\cos 2x \times \csc x + \csc x + \cot x = 0,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$

Resolución:

Sabemos que $\cos 2x = \cos 2x - \text{sen}2x$

$(\cos 2x - \text{sen}2x)\frac{1}{\text{sen}x} + \frac{1}{\text{sen}x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x} = 0$

$\frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1 + \cos x}{\text{sen}x} = 0$

$\cos x(2\cos x + 1) = 0,\ x \neq n\pi$

$\cos x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$

Si $\cos x = 0$ entonces $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z} \quad \ldots(1)$

Si $\cos x = -\frac{1}{2}$ entonces $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3};\ n \in \mathbb{Z} \ldots(2)$

de (1) y (2) tenemos que:

$x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$

Por consiguiente, la suma de las soluciones es 4π

56. Hallar la solución general de la ecuación

$\text{sen}^6 2x = \frac{7}{16} - \cos^6 2x$

Resolución:

$1 - 3\text{sen}^2 2x\cos^2 2x = \frac{7}{16}$

$1 - \frac{3}{4}\text{sen}^2 4x = \frac{7}{16} \Rightarrow 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 8x) = \frac{7}{16}$

$\cos 8x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8x = 2n\pi \pm 2\frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

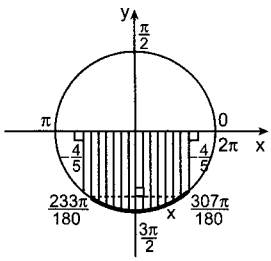
$x = n\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12},\ n \in \mathbb{Z}$

57. Si se tiene: $\pi \leq x \leq 2\pi$

Además: $\text{sen}x \leq -\frac{4}{5}$

obtener el intervalo de: $S = |3\text{sen}x - 4\cos x|$

Resolución:



Dato: $\pi \leq x \leq 2\pi$

Además: $\text{sen}x \leq -\frac{4}{5}$

Analizando en la circunferencia trigonométrica:

Del gráfico:

$\frac{233\pi}{180} \leq x \leq \frac{307\pi}{180}$

En S:

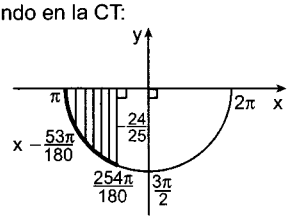
$S = \left|\sqrt{3^2 + 4^2}\,\text{sen}\left(x - \frac{53\pi}{180}\right)\right| = 5\left|\text{sen}\left(x - \frac{53\pi}{180}\right)\right|$

Como: $\frac{233\pi}{180} \leq x \leq \frac{307\pi}{180}$

Sumando: $\left(-\frac{53\pi}{180}\right)$

$\pi \leq x - \frac{53\pi}{180} \leq \frac{254\pi}{180}$

Graficando en la CT:



$-\frac{24}{25} \leq \text{sen}\left(x - \frac{53\pi}{180}\right) \leq 0$

Tomando valor absoluto: $0 \leq \left|\text{sen}\left(x - \frac{53\pi}{180}\right)\right| \leq \frac{24}{5}$

Multiplicando por (5):

$0 \leq \underbrace{5\left|\text{sen}\left(x - \frac{53\pi}{180}\right)\right|}_{S} \leq \frac{24}{5}$

$0 \leq S \leq \frac{24}{5}$

$\therefore\ S \in \left[0; \frac{24}{5}\right]$

58. Resolver la ecuación

$\cos x + \cos x\,\text{sen}x = \sec x + \sec x\,\text{sen}x$

Resolución:

$\cos x(1 + \text{sen}x) = \sec x\,(1 + \text{sen}x)$

$(1 + \text{sen}x)(\cos x - \sec x) = 0$

$1 + \text{sen}x = 0 \vee \cos x - \sec x = 0$

$\text{sen}x = -1 \Rightarrow x = 3\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \quad \ldots(1)$

$\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1 \Rightarrow x = n\pi,\ n \in Z$ ...(2)

Luego (1) no es conjunto solución pues para $x = 3\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, no existe secx, de donde $x = n\pi$, $n \in Z$

59. El número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}5x \csc x - 2\cos x = 0$, $x \in [0, 2\pi]$ es:

Resolución:

Tenemos que $\dfrac{\operatorname{sen}5x - 2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x} = 0$

$\operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}2x = 0$, si $x \neq n\pi$, $n \in Z$

$2\cos\frac{7x}{2}\operatorname{sen}\frac{3x}{2} = 0$, $x \neq n\pi$

$\cos\frac{7x}{2} = 0 \vee \operatorname{sen}\frac{3x}{2} = 0$

$\cos\frac{7x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{7}$, $n \in Z$ ...(1)

Asignando valores a n en (1) obtenemos las raíces en $[0, 2\pi]$

$x = \frac{\pi}{7}; 3\frac{\pi}{7}; 5\frac{\pi}{7}; 9\frac{\pi}{7}; 11\frac{\pi}{7}; 13\frac{\pi}{7}$

$\operatorname{sen}\frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow 3\frac{x}{2} = n\pi,\ n \in Z \Rightarrow x = 2\frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$

Luego: $x = 2\frac{\pi}{3};\ 4\frac{\pi}{3}$

Por consiguiente, el número de raíces es 8.

60. El menor ángulo positivo que satisface la ecuación $\operatorname{sen}8x + \operatorname{sen}4x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$, es:

Resolución:

$2\operatorname{sen}6x\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen}6x\cos 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(2\operatorname{sen}6x - 1) = 0$

$\cos 2x = 0 \vee 2\operatorname{sen}6x - 1 = 0$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{sen}6x = \frac{1}{2} \Rightarrow 6x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = n\frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{36}$

Entonces el menor ángulo positivo de x es p/36.

61. Hallar una raíz positiva perteneciente al IIIC, de la ecuación: $3\cot^2 x - 16\cos^2 x + 3 = 0$

Resolución:

$3(1 + \cot^2 x) = 16\cos^2 x$

$3 = 16\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x \Rightarrow 3 = 4\operatorname{sen}^2 2x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = \frac{3}{4}$

$\dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2}$

$4x = 2n\pi \pm 2\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = n\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6},\ n \in Z$

Luego, la raíz positiva perteneciente al IIIC es 210°

62. Resolver $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\ \frac{1}{4}$

$0 < \beta < \alpha < \pi/4$

Resolución:

i) $2\operatorname{sen}x\cos y = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)$

De $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(-\beta) = 1/2$

$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 1/2$ ...(1)

además: $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 1/4$ ...(2)

ii) De (1) $\operatorname{sen}\alpha = 1/2 + \operatorname{sen}\beta$

Reemplazando en (2)

$(1/2 + \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\beta = 1/4 \Rightarrow 4\operatorname{sen}^2\beta + 2\operatorname{sen}\beta - 1 = 0$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2(4)} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

Pero: $0 < \beta < \pi/2$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \beta = 18° = \pi/10\text{rad}$

iii) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ en (1)

$\operatorname{sen}\alpha - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\therefore\ \alpha = 54° = 3\pi/10\text{rad}$

Luego: $\alpha = \frac{3\pi}{10} \wedge \beta = \frac{\pi}{10}$

63. Resolver: $\tan(x) + \sec 2(y) = 5$ ...(I)

$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ...(II)

Siendo x e y ángulos agudos

Resolución:

$\tan x + \sec^2 y = 5$ ...(I)

$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2\frac{y}{2} = 0$ ...(II)

De (II): $\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^2\frac{y}{2} = 0$

$\operatorname{sen}^2 x - (1 - \cos y) = 0 \Rightarrow \cos y = 1 - \operatorname{sen}2x$

$\cos y = \cos 2x$

es decir: $\dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sec y = \sec^2 x$ ...(III)

Reemplazando (III) en (I) obtenemos:

$\tan x + (\sec^2 x)^2 = 5 \Rightarrow \tan x + (1 + \tan^2 x)^2 = 5$

de donde se obtiene: $\tan^4 x + 2\tan^2 x + \tan x - 4 = 0$

Aplicando la regla de Ruffini:

	1	2	1	−4
1	↓	1	3	4
	1	3	4	0

$(\tan x - 1)\underbrace{(\tan^2 x + 3\tan x + 4)}_{\neq 0} = 0$

$\tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 1$

Como x es agudo: $x = \frac{\pi}{4}$

Reemplazando en (III) se obtiene:

$\sec y = \sec^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sec y = 2$

Como y es agudo: $y = \frac{\pi}{3} < n$ $\therefore \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\}$

64. Si $x \in [0; 2\pi]$, halle la suma de las soluciones de la ecuación trigonométrica

$\text{sen}^4x + \cos^4x = \text{sen}^8x + \cos^8x$

Resolución:

$\text{sen}^4x + \cos^4x = \text{sen}^8x + \cos^8x$

donde $x \in [0; 2\pi]$

La ecuación equivale a:

$\text{sen}^4x - \text{sen}^8x + \cos^4x - \cos^8x = 0$

$\text{sen}^4x(1 - \text{sen}^4x) + \cos^4x(1 - \cos^4x) = 0$

$$\text{sen}^4x(1 + \text{sen}^2x)\underbrace{(1 - \text{sen}^2x)}_{\cos^2x}$$
$$+ \cos^4x(1 + \cos^2x)\underbrace{(1 - \cos^2x)}_{\text{sen}^2x} = 0$$

Factorizando: $\text{sen}^2x\cos^2x$ se obtiene:

$\text{sen}^2x\cos^2x[\text{sen}^2x(1 + \text{sen}^2x) + \cos^2x(1 + \cos^2x)] = 0$

$$\text{sen}^2x\cos^2x[\underbrace{\text{sen}^2x + \text{sen}^4x + \cos^2x}_{1} + \cos^4x] = 0$$

$$(\text{senxcosx})^2\underbrace{[1 + \text{sen}^4x + \cos^4x]}_{\neq 0} = 0$$

De donde necesariamente:

$\text{senx}\cos x = 0 \Rightarrow \dfrac{\text{sen2x}}{2} = 0 \Rightarrow \text{sen2x} = 0$

$2x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n\dfrac{\pi}{2}$

Dando valores a n obtenemos los $x \in [0; 2\pi]$:

$x = 0;\ \dfrac{\pi}{2};\ \pi;\ \dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi$

$\therefore$ Suma de soluciones = 5p

65. Resolver el sistema: $x - y = \dfrac{\pi}{6}$ ...(1)

$\cos^2x - \cos^2y + 2\text{senx} \times \text{cosy} = 0$ ...(2)

Indique una solución general para x, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$x - y = \dfrac{\pi}{6}$ ...(1)

$\cos^2x - \cos^2y + 2\text{senx} \times \text{cosy} = 0$ ...(2)

Multipliquemos por 2 a (2):

$2\cos^2x - 2\cos^2y + 2(2\text{senx cosy}) = 0$

$1 + \cos 2x - (1 + \cos 2y) + 2(2\text{senx cosy}) = 0$

$$\underbrace{\cos 2x - \cos 2y}_{\text{a producto}} + 2[\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)]$$

$-2\text{sen}(x + y)\text{sen}(x - y) + 2\text{sen}(x + y) + 2\text{sen}(x - y) = 0$

$-2\text{sen}(x + y)\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6} + 2\text{sen}(x + y) + 2\text{sen}\dfrac{\pi}{6} = 0$

$-\text{sen}(x + y) + 2\text{sen}(x + y) + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}(x + y) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x + y = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \text{de (1): } x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\}(+)$$

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$$

66. Dar un conjunto solución para x del sistema:

$\tan x + \tan y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ...(1)

$\tan^2x + \tan^2y = \dfrac{10}{3}$ ...(2)

Resolución:

$\tan x + \tan y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ...(1)

$\tan^2x + \tan^2y = \dfrac{10}{3}$ ...(2)

De (1): $\tan y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \tan x$

Reemplacemos en (2):

$\tan^2x + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \tan x\right)^2 = \dfrac{10}{3}$

$\tan^2x + \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan x + \tan^2x = \dfrac{10}{3}$

de donde resulta:

$3\tan^2x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$

$3\tan x \quad \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x \quad \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$

Tenemos dos soluciones:

i) $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

ii) $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

67. Halle la suma de soluciones positivas menores que 360° de la siguiente ecuación: $2\tan^2x + \sec x + 1 = 0$

Resolución:

$2\tan 2x + \sec x + 1 = 0 \Rightarrow 2(\sec^2x - 1) + \sec x + 1 = 0$

$2\sec^2x + \sec x - 1 = 0$

$2\sec x \quad -1 \Rightarrow \sec x =$

$\sec x \quad 1 \Rightarrow \sec x = -1$

Observemos que sólo es posible: $\sec x = -1$

Sólo hay una solución positiva menor que 360°:

$x = 180°$

68. Resolver: $\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - 3\cot x}{1 - 3\cot 2x} = 2$

Dar por respuesta, la suma de las soluciones comprendidas entre 0 y 2π

Resolución:

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - 3\cot x = 2 - 3\underbrace{(2\cot 2x)}$

fórmula especial $\rightarrow$ cotx − tanx del doble.

Luego efectuando y simplificando 3cotx:

$\underbrace{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} = 2 + 3\tan x$

$\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 2 + 3\tan x$

$\Rightarrow 1 + \tan x = 2 + 3\tan x - 2\tan x - 3\tan^2x$

$3\tan^2x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(+): $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30°,\ 180° + 30°$

(−): $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 180° - 30°,\ 360° - 30°$

Suma = 720°

69. Resolver: $\text{sen}^3x + \cos^3x = 1{,}5\,\text{sen}2x - 1$

Resolución:

$(\text{sen}x + \cos x)(\underbrace{\text{sen}^2x + \cos^2x}_{1} - \text{sen}x\cos x) =$

$= \frac{3}{2}(2\text{sen}x\cos x) - 1$

$(\text{sen}x + \cos x)(1 - \text{sen}x\cos x) = 3\text{sen}x\cos x - 1 \ldots(1)$

Sea: $\text{sen}x + \cos x = a$, elevando al cuadrado

$\underbrace{\text{sen}^2x + \cos^2x}_{1} + 2\text{sen}x\cos x = a^2$

$\Rightarrow \text{sen}x\cos x = \frac{a^2-1}{2}$

En (I): $a\left(1 - \frac{a^2-1}{2}\right) = 3\left(\frac{a^2-1}{2}\right) - 1$

$\Rightarrow u^3 + 3u^2 - 3u - 5 = 0$

$\Rightarrow u^3 + 1 + 3u^2 - 3u - 6 = 0$

$(a + 1)(a^2 - a + 1) + 3(a - 2)(a + 1) = 0$

$\left.\begin{array}{l}\underbrace{(a+1)}_{0}(a^2 + 2a - 5) = 0\end{array}\right\} a = -1$

$\Rightarrow \text{sen}x + \cos x = -1 \quad \therefore \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm 3\frac{\pi}{4}$

$\therefore x = 2n\pi \pm 3\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

70. Hallar la solución principal de la ecuación:

$\tan^2x + \frac{2\tan x}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - 1 = 0$

Resolución:

$\frac{2\tan x}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 1 - \tan^2x$

$\underbrace{\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$\tan 2x = \underbrace{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \underbrace{2+\sqrt{3}}$

$\csc 15° + \cot 15°$

y por fórmula especial del ángulo mitad:

$\csc\theta + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$

Luego, se tendrá:

$\tan 2x = \cot 7{,}5° \Rightarrow 2x + 7{,}5° = 90° \quad \therefore x = 41{,}25°$

71. Obtener una solución de la ecuación:

$\text{sen}x + \cot x = \cos x + \tan x$

Resolución:

$\text{sen}x - \cos x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \frac{\text{sen}^2x - \cos^2x}{\text{sen}x\cos x}$

$(\text{sen}x + \cos x)\text{sen}x\cos x = (\text{sen}x + \cos x)(\text{sen}x\cos x)$

i) $\text{sen}x - \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \cos x$

$\tan x = 1 \quad \therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

ii) $\text{sen}x\cos x = \text{sen}x + \cos x \quad \ldots(*)$

sea: $\text{sen}x + \cos x = u \Rightarrow \text{sen}x\cos x = \frac{u^2-1}{2}$

Luego en (*): $\frac{u^2-1}{2} = u \Rightarrow u^2 - 2u - 1 = 0$

$\Rightarrow u = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$u = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen}x + \cos x = 1 \pm \sqrt{2}$

pero: $-\sqrt{2} \le \text{sen}x + \cos x \le \sqrt{2}$

Luego, se toma el (−):

$\underbrace{\text{sen}x + \cos x} = 1 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$

$\therefore x = \arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2} + \frac{\pi}{4}$

72. Dar una solución de la ecuación:

$(4\text{sen}x + 3\cos x)^2 - (2\text{sen}x + \cos x)^2 = 20$

Resolución:

Efectuando los cuadrados y reduciendo:

$12\text{sen}^2x + 20\text{sen}x\cos x + 8\cos^2x = 20$

$3\text{sen}^2x + 5\text{sen}x\cos x + 2\cos^2x = 5$

Dividiendo entre $\cos^2x$:

$3\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x} + 5\frac{\text{sen}x\cos x}{\cos^2x} + 2\frac{\cos^2x}{\cos^2x} = 5\frac{1}{\cos^2x}$

$3\tan^2x + 5\tan x + 2 = \underbrace{5\sec^2x}_{1+\tan^2x}$

$\Rightarrow 0 = 2\tan^2x - 5\tan x + 3$

Factorizando: $(2\tan x - 3)(\tan x - 1) = 0$

i) $\tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \arctan(1{,}5)$

ii) $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

73. Resolver:

$\text{sen}(\pi\tan x) = 0,\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ y dar como respuesta la suma de las soluciones.

Resolución:

$\text{sen}(\pi\tan x) = 0,\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

Apliquemos:

$\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\pi\tan x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\tan x = k \quad \ldots(I)$

como la función tangente es creciente en $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ entonces:

si $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \tan x \in \left[\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right); \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\underbrace{\tan x} \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

$k \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \Rightarrow k = -1, 0, 1$

Reemplazando en (I) se obtiene:

$\tan x = -1,\ \tan x = 0,\ \tan x = 1$

Teniendo en cuenta que $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

resulta:

$x = -\frac{\pi}{4},\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4} \quad \therefore$ suma de soluciones $= 0$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Al resolver la inecuación: $\text{arcsen}x - \text{arccot}x < \frac{\pi}{2}$

Se tiene que: $x \in [a; b]$

Calcule el valor de: $(a^2 + b^2)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Resolución:

$\underbrace{\text{arcsen}x}_{(i)} - \underbrace{\text{arc}\cot x}_{(ii)} < \frac{\pi}{2}$

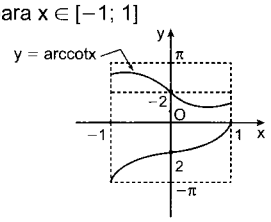
De (i) $\wedge$ (ii): $x \in [-1, 1]$

Sabemos que: $\text{arcsen}x = \frac{\pi}{2} - \text{arccos}x$

Reemplazando: $\frac{\pi}{2} - \text{arccos}x - \text{arccot}x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\text{arccos}x < \text{arccot}x$ ...(I)

Graficando para $x \in [-1; 1]$



Observamos que (I) se verifica: $\forall\, x \in [-1; 1]$

$\therefore$ CS = $[-1; 1]$

Comparando: $a = -1$; $b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

Cuántos valores de $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ satisfacen la ecuación:

$6\text{sen}(2x) - 8\cos x + 9\text{sen}x - 6 = 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Resolución:

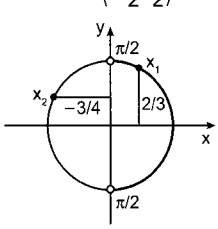
$6\text{sen}2x - 8\cos x + 9\text{sen}x - 6 = 0$

$12\text{sen}x\cos x - 8\cos x + 9\text{sen}x - 6 = 0$

Factorizando: $4\cos x(3\text{sen}x - 2) + 3(3\text{sen}x - 2) = 0$

$\Rightarrow (3\text{sen}x - 2)(4\cos x + 3) = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{2}{3} \vee \cos x = -\frac{3}{4}$

Graficando en la C.T.: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$



Solo un valor en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ satisface la ecuación.

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Determine el menor valor de k, para que se cumpla la siguiente desigualdad, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ si $\text{sen}(x) \times \cos(x) \neq 0$

$$\frac{1}{\text{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \leq k$$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Resolución:

Sea: $E = \frac{1}{\text{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \csc 2x + \sec 2x$

$E = 2 + \tan^2 x + \cot 2x$

Como: $\tan^2 x + \cot^2 x \geq 2 \Rightarrow E \geq 4$

Con la corrección en el sentido de la desigualdad, la pregunta sería mayor valor de k.

$k = 4$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

En la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}\cos(2x) = \frac{7}{8}$$

el número de soluciones en $[0; 2\pi]$, es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

Recuerda: $8\cos^4\theta = 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$

Dato: $8\cos^4\frac{x}{2} - \cos 2x = 7$

$3 + 4\cos x + \cos 2x - \cos 2x = 7 \Rightarrow \cos x = 1$

Como: $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = 0, 2\pi$

$\therefore$ Hay 2 soluciones.

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Para $1 < x < 3$ resolver la siguiente inecuación:

$\text{sen}(\pi x) - \cos(\pi x) < 0$

A) $\left\langle 1; \frac{5}{4} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{5}{4}; \frac{9}{4} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{5}{4}; \frac{5}{2} \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{9}{4}; \frac{5}{2} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{9}{4}; 3 \right\rangle$

Resolución:

Sabemos: $a\text{sen}x \pm b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}(x \pm \theta)$

Donde: $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$\underbrace{\text{sen}(\pi x) - \cos(\pi x)}_{\sqrt{2}\text{sen}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) < 0} < 0 \Rightarrow \pi < \pi x - \frac{\pi}{4} < 2\pi$

Despejando: $\frac{5}{4} < x < \frac{9}{4}$ $\therefore x \in \left\langle \frac{5}{4}; \frac{9}{4} \right\rangle$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resolver la inecuación

$$\frac{1+\tan x}{1+\sec x}+\frac{1-\tan x}{1-\sec x}\geq -2$$

donde $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

A) $x \in \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

B) $x \in \left[\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

C) $x \in \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

D) $x \in \left[\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right]-\left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$

E) $x \in \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]-\{\pi+2k\pi\}$

2. En la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{\overline{abcde}}{2002}\right]^{\operatorname{sen}\left(\alpha+2001\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-2003\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$\left[\frac{\text{Peruano}}{2003}\right]^{\cos(2002\pi+\alpha)+\operatorname{sen}\left(\alpha-2003\frac{\pi}{2}\right)}$$

Indicar la solución general ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $\frac{k\pi}{6}$ B) $(k+2003)\frac{\pi}{8}$

C) $(2k+2001)\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{k\pi}{2}$

E) $(2k+1)\pi\ !\ \frac{\pi}{7}$

3. Hallar el valor de α aproximadamente, a partir de la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}=\frac{\arctan\left[\frac{\operatorname{sen}(4k+1)\frac{\pi}{2}}{4\|\operatorname{sen}\alpha+1\|}\right]}{\operatorname{arc\,cot}(1{,}875)}$$

donde: $k \in \mathbb{Z}_0^-$, y $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right)<\alpha<\frac{\pi}{6}$

A) $\frac{\pi}{7}$ B) $\frac{\pi}{15}$

C) $\frac{\pi}{18}$ D) $\frac{\pi}{9}$

E) No existe valor alguno para α.

4. Resolver la siguiente ecuación:

$\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})=\arctan\left(\sqrt{\frac{2x-2}{2x+1}}\right)$; dar como respuesta la suma de soluciones.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) 2,5

5. Resolver: $2\operatorname{sen}(\cos 2x) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

A) $2n\pi\ !\ \arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ B) $n\pi\ !\ \frac{1}{2}\operatorname{arcos}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

C) $2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{3}\right)$ D) $3n\pi \pm \arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

E) $\pm \arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

6. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación: $\cos x = \frac{x}{127}$?

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

7. Dada la ecuación:

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)=16\tan\frac{\theta}{2}-\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)$$

Indicar la solución general.

A) $k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$; $k \in \mathbb{Z}$ B) $k\pi-\frac{\pi}{6}$; $k \in \mathbb{Z}$

C) $2k\pi \pm \frac{\pi}{12}$; $k \in \mathbb{Z}$ D) $(2k+1)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$; $k \in \mathbb{Z}$

E) $(4k+1)\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

8. Para qué valores de x es válida la siguiente inecuación: $f(x) \geq g(x)$, si: $x \in [0; 2\pi]$

$f(x) = \sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}$

$g(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}2x}$

A) $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

B) $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3};\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right]$

C) $x \in [0;\pi]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

D) $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$

E) $x \in \left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle\cup\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3};\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}2\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right]$

9. Reducir:

$$S=\cos\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{\arccos\left\{\frac{\arg(z^{\cos z})}{\arg z.\cos[\mathbb{R}e(\mathbb{Z})]}\right\}}{\mathbb{I}m(z)}\right)^{\frac{9}{2}}\right]$$

siendo: $z = x + iy$

A) -1 B) 0 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1 E) 2

10. Sabiendo que: $z \in \mathbb{C}$ y $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, además:

$z = \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$, calcular $\frac{|1-\bar{z}|}{|1+\bar{z}|}$

A) $-\tan\frac{\alpha}{2}$ B) $-\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

C) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ D) $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

E) $\cot\frac{\alpha}{2}$

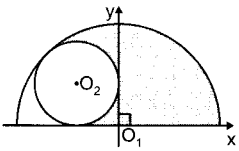
11. Reducir la siguiente expresión para: $n \in \mathbb{Z}$.

$$T=\frac{(1+i\tan x)^n+(1-i\tan x)^n}{(1+i\cot x)^n+(1-\cot x)}$$

A) $\tan^n x$ B) $(-1)^{n+1}\tan^n x$ C) $\tan nx$

D) $(-1)^n\cot^n x$ E) $n\tan x$

12. ¿A qué conjunto de números complejos **w** corresponde la región sombreada? O_1; O_2 son centros. $O_2(-1; 1)$



A) $w = \{z = re^{i\theta}; \in \mathbb{C}/|z| \leq \sqrt{2} \wedge$
$|z + 1 + i| \geq 1; 0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}\}$

B) $w = \{z = re^{i\theta}; \in \mathbb{C}/|z| \leq \sqrt{2} \wedge |z + i - 1| \geq 1\}$

C) $w = \{z = re^{i\theta}; \in \mathbb{C}/|z| \leq \sqrt{2} \wedge |z + i + 1| \geq 1\}$

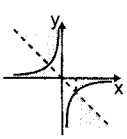
D) $w = \{z = re^{i\theta}; \in \mathbb{C}/|z| -1 \leq \sqrt{2} \wedge$
$|z + 1 - i| \geq 1; 0 \leq \arg(z + 1) \leq \frac{5\pi}{8}\}$

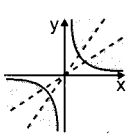
E) $w = \{z = re^{i\theta}; \in \mathbb{C}/|z| -1 \geq \sqrt{2} \wedge$
$|z + 1 - i| \leq 1; 0 \leq \arg(z + 1) \leq \frac{5\pi}{8}\}$

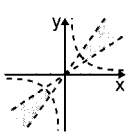
13. Hallar el equivalente de la siguiente expresión:
$\frac{2\text{sen}i}{i\cos i + \text{sen}i}$

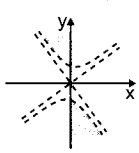
A) $1 - e^2$ B) e^2 C) $1 - e^{-2}$
D) $1 + e$ E) 1

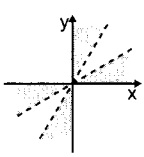
14. Graficar el conjunto de números complejos que verifican:
$R = \{z = x + iy/ \mathbb{R}e(z)\ \mathbb{I}m(z) \geq 1;$
$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$

A)


B)


C)


D)


E)


15. Resolver la inecuación: $\tan 2x + \tan x > 0$
si: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{12}\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right\rangle$

C) $\left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ D) $\left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\rangle - \{0\}$

16. Resolver: $a\text{sen}x - b\cos x < 0$; $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$; $ab > 0$

A) $\left\langle \frac{a}{b}; \frac{b}{a}\right\rangle$

B) $\left\langle \arctan\frac{a}{b} + \pi; 2\pi\right\rangle$

C) $\left\langle \arctan\frac{b}{a}; 2\pi - \arctan\frac{b}{a}\right\rangle$

D) $\left\langle \pi; \pi + \arctan\frac{b}{a}\right\rangle \cup \left\langle 2\pi - \arctan\frac{b}{a}; 2\pi\right\rangle$

E) $\left\langle \pi + \arctan\frac{b}{a}; 2\pi\right\rangle$

17. Resolver el sistema de ecuaciones:
$\text{sen}x + \text{sen}y = m$ ...(1)
$\cos x + \cos y = \sqrt{3}m$ ...(2)
además: $0 < x + y < \frac{\pi}{2}$

A) $x = \arccos(2m^2 - 1)$
$y = \arccos(2m^2 - 1)$

B) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\arccos(2m^2 - 1)$
$y = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\arccos(2m^2 - 1)$

C) $x = \frac{\pi}{6}\arccos(2m^2 - 1)$
$y = \frac{\pi}{6}\arccos(2m^2 - 1)$

D) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos(m^2 - 1)$
$y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos(m^2 - 1)$

E) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos(m^2 - 1)$
$y = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\arccos(m^2 - 1)$

18. Resolver la siguiente ecuación respecto de α si β puede asumir cualquier valor real admisible en:
$$\frac{2}{\tan(\alpha + 2002\pi) + \cot(\alpha + 2003\pi)} = \cos\left[\arctan\left(\frac{1}{\csc\beta}\right)\right]$$
donde $k \in \mathbb{Z}$.

A) $\left\langle \frac{k\pi}{2}; (2k + 1)\frac{\pi}{4}\right]$

B) $\left\langle (4k + 1)\frac{\pi}{2}; (2k + 1)\pi\right\rangle$

C) $\left[k\pi + \frac{\pi}{8}; k\pi + \frac{2\pi}{9}\right] - \left\{(4k + 1)\frac{\pi}{8}\right\}$

D) $\left[k\pi + \frac{\pi}{9}; k\pi + \frac{2\pi}{9}\right] - \left\{(4k + 1)\frac{\pi}{9}\right\}$

E) $\left[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}; \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right] - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$

19. Resolver la siguiente ecuación:
$$\left|\text{sen}\left(\text{sen}\frac{x}{2002} - \cos\frac{x}{2002}\right) - \cos\left(\cos\frac{x}{2002} - \text{sen}\frac{x}{2002}\right)\right|\frac{1}{\sqrt{2}} + \text{sen}\left(2003\frac{\pi}{2}\right) = \left[\log^2_{|\tan\alpha + \cot\alpha|}(\tan 2\beta \cot\beta)\right]$$
e indicar la solución general para β.

A) $(4k+1)\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$; $k \in \mathbb{Z}$

B) $k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

C) $k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

D) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{1001}$; $k \in \mathbb{Z}$

E) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $k \in \mathbb{Z}$

20. Resolver:
$\text{arcsen}[\cos(\text{arcsen}x)] + \arccos[\text{sen}(\arccos x)] = \frac{\pi}{2}\cos 2x$
Hallar la suma de las dos primeras soluciones positivas.

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 6π

21. Resolver e indicar las soluciones en la ecución:
$3x(1-x) - x^3 = \sqrt{2}(1-3x^2) - 1$

A) {tg7°; tg67°; tg127°}

B) {tg5°; tg65°; tg125°}

C) {tg7° 30'; tg67°30'; tg127°30'}

D) {tg5°30'; tg65°30'; 5tg125°30'}

E) {sen5 ; sen65°, sen125°}

22. Resolver la ecuación:
$\text{sen}3x + \text{sen}2x + \text{sen}x = \cos 3x + \cos 2x + \cos x$
e indicar un conjunto solución ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $\pi k + \frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}$ C) $2\pi k \pm \frac{\pi}{4}$

D) $\pi k + \frac{\pi}{4}$ E) $2\pi k + \frac{\pi}{8}$

23. Si: x_1; x_2 son las raíces de la ecuación:
$x^2\text{sen}3\phi\,\text{sen}5\phi + 1 = \frac{8\text{sen}\phi(1-\tan^2\phi)}{\sec^4\phi}.x$
Hallar un conjunto para ϕ que verifique la siguiente igualdad: $x_1^{-2} - x_2^{-2} = 1$; $k \in \mathbb{Z}$

A) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ B) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ C) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

D) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ E) $\frac{k\pi}{32} + \frac{\pi}{16}$

24. Hallar la solución del sistema:
$\text{sen}(\alpha + x) + \text{sen}(\alpha + \gamma) + \text{sen}\alpha = 0$
$\cos(\alpha + x) + \cos(\alpha + \gamma) + \cos\alpha = 0$
siendo α una constante, n y $k \in \mathbb{Z}$.

A) $(2n\pi\,;\,2k\pi)$ B) $(n\pi;\,k\pi)$

C) $\left(\frac{\pi}{3}; 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right)$ D) $\left(2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$

E) $\left(2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right)$

25. Resolver la ecuación:
$\tan 4x = 800\cos^2 x + 35\text{sen}^2 x$.
calcular la suma de soluciones para $x \in [0\,;\,2\pi]$

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

26. Hallar el intervalo del ángulo θ en grados, que satisface la ecuación:
$3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{1+\cos\theta} = -\sqrt{6}$

A) $\theta \in \langle 160°; 280°\rangle$ B) $\theta \in \langle 120°; 135°\rangle$
C) $\theta \in \langle -300°; 300°\rangle$ D) $\theta \in \langle 90°; 120°\rangle$
E) $\theta \in \langle 240°; 270°\rangle$

27. Hallar el número de elementos del conjunto:
$T = \{x \in [0; 2\pi] / \cos 2x\sec x + \sec x + 1 = 0\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:
$\cot\frac{x}{2} = \text{sen}x + \cot x$

A) $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ B) $\frac{1}{3}(2k+1)\pi$

C) $\frac{1}{4}(2k+1)\pi$ D) $\frac{1}{2}(4k+1)\pi$

E) $\frac{1}{2}(4k+3)\pi$

29. Indicar una solución general para la ecuación:
$4\cos x\cos 2x\cos 3x = 1$

A) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ B) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

C) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ D) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

E) $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

30. Si: $x_1 \wedge x_2$ son las dos menores soluciones positivas de la ecuación:
$3 - 5\tan^2 x = \tan^2 5x(5 - 3\tan^2 x)$; $x_1 < x_2$
Hallar: $\frac{x_2}{x_1}$

A) 3 B) 6 C) 4 D) 8 E) 5

31. Resolver: $\sqrt{\text{sen}^2\frac{x}{2}} - \text{sen}\frac{x}{4} = 0$; dar como respuesta la suma de soluciones en: $\langle 0; 8\pi\rangle$

A) 12π B) 16π C) 20π D) 15π E) 28π

32. Calcular la mayor solución negativa de la ecuación:
$\tan x = \tan\left(x + \frac{\pi}{18}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{9}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

A) $-\frac{\pi}{9}$ B) $-\frac{2\pi}{9}$ C) $-\frac{4\pi}{9}$

D) $-\frac{5\pi}{9}$ E) $-\frac{17\pi}{36}$

33. Resuelva:
$(\tan 2x + \cot 2x)^2 + |\tan 2x + \cot 2x| = 6$; $k \in \mathbb{Z}$

A) $\left\{\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right\}$ B) $\left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right\}$ C) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{k\pi - \frac{\pi}{16}\right\}$ E) $\left\{\frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8}\right\}$

34. Hallar el número de soluciones para la siguiente ecuación:
$|\text{Log}(\text{Sen}x)| = e^{-\text{sen}x}$; $\forall\, x \in \langle 0; 3\pi\rangle$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

35. Resolver:
$\cos^4\frac{9x}{2} - \cos^4\frac{3x}{2} = \text{sen}^4\frac{9x}{2} - \text{sen}^4\frac{3x}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

A) $\left\{(4k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{k\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{12}\right\}$

E) $\left\{(4k+1)\frac{\pi}{12}\right\}$

36. Resolver las inecuaciones en el intervalo de $\langle 0; 4\pi\rangle$
$2\text{sen}^2\frac{x}{2} + 3\text{sen}\frac{x}{2} + 1 < \text{sen}\pi$ ...(1)

$\left|\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{4}}{\sec^2\frac{x}{4}}\right| < \text{sen}\frac{\pi}{4}$ ...(2)

A) $\left\langle\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right\rangle - \{3\pi\}$ B) $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{2}\right\rangle$ D) G0; 4πH

E) $\left\langle\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right\rangle$

37. Al resolver la inecuación:
$\text{arcsen}(1+x) > \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1+x}{2}\right)$
¿Cuál de los siguientes valores no puede adoptar x?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{1}{12}$ E) -2

38. Hallar el menor valor positivo que resuelve la ecuación trigonométrica: $\cos 6x + 3 = 4\cos^2 2x$

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

39. Resolver la ecuación: $\frac{1}{3} + \cos^2 x + \frac{28|\cos x|}{9}$
e indicar la suma de soluciones en el intervalo de $\langle 0; 2\pi\rangle$

A) 5π B) 4π C) 6π D) $\frac{9\pi}{2}$ E) $\frac{7\pi}{2}$

40. Si: $x_1 = \text{sen}\frac{\pi}{14}$; es una raíz de:
$f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + n$, calcule **n**.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{7}$ D) -1 E) $-\sqrt{7}$

41. Resolver la ecuación:
$4\tan x = \sqrt[3]{\tan^6 x + 6\csc 2x \tan^3 x + 1}$; $k \in \mathbb{Z}$

A) $\left\{\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{12}\right\}$

C) $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{6}\right\}$

E) $\left\{\frac{k\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{12}\right\}$

42. Dar un intervalo que resuelve la inecuación:
$\dfrac{\tan^2 x + \cot^2 x + 1}{\tan x + \cot x + 1} + \dfrac{\tan^2 x + \cot^2 x - 2}{\tan x + \cot x - 2} > 11$

A) $\left\langle\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right);\frac{\pi}{2}\right\rangle$

B) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right)\right\rangle$

C) $\left\langle\frac{1}{2}\text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right);\pi\right\rangle$

D) $\left\langle\text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right);\pi - \text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right)\right\rangle$

E) $\left\langle\text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right);\frac{\pi}{4}\right\rangle$

43. Resolver: $\dfrac{1+3\cos x}{1-2\cos x} < \dfrac{1-4\cos^2 x}{4\text{sen}^2 x - 3}$; $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$ C) $\left[0;\frac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle 0;\frac{5\pi}{12}\right\rangle$ E) $\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$

44. Sumar las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:
$\text{sen}5x + \text{sen}3x = \sqrt{3}(\cos 5x + \cos 3x)$

A) 135° B) 180° C) 165° D) 160° E) 210°

45. Indicar la suma de las dos menores soluciones positivas de la ecuación:
$\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$

A) 90° B) 180° C) 270° D) 225° E) 135°

46. Resolver: $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - \dfrac{2}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{\cot^2 x} = 1$
luego, halle la suma de las dos primeras soluciones positivas.

A) 90° B) 135° C) 180° D) 225° E) 270°

47. Resolver la ecuación: $\dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} - \dfrac{\text{sen}4x}{\text{sen}2x} = 2\cos\pi$
luego, indicar la menor solución positiva.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{12}$

48. Resolver: $\cos(2\arccos x) = \frac{1}{2}$

A) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

C) $\left\{\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ D) $\left\{\pm 1;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

E) $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

49. Resolver: $\text{sen}2x = \cos\frac{\pi}{9}$; $n \in \mathbb{Z}$

A) $\left\{n\pi - (-1)\frac{5\pi}{18}\right\}$ B) $\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{7\pi}{36}\right\}$

C) $\left\{n\pi - (-1)^n\frac{7\pi}{18}\right\}$ D) $\left\{2n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{9}\right\}$

E) $\left\{\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\frac{5\pi}{18}\right\}$

50. Sumar las dos primeras soluciones positivas de: $\text{sen}2x = \frac{1}{2}$

A) 180° B) 360° C) 90° D) 270° E) 135°

51. Resolver: $2\cos5x\cos x - \cos6x = 1; n \in \mathbb{Z}$

A) $\{2n\pi\}$ B) $\{4n\pi\}$ C) $\{n\pi\}$ D) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$

52. Resolver: $\text{sen}2x > \cos x$; en $\langle 0; 2\pi\rangle$

A) $\left\langle\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right\rangle$ D) $A \cup B$

E) $A \cup C$

53. Dada la ecuación: $\cos x + \cos2x + \cos3x = 0$ hallar la suma de todas las soluciones de dicha ecuación, si estas soluciones están comprendidas entre 0 y 2π (radiantes).

A) π B) 2π C) 4π D) 3π E) 6π

54. Hallar la suma de las soluciones, en el intervalo: [0°; 360°] de la ecuación:
$\sqrt{2}\,\text{sen}2x = \text{sen}x + \cos x$

A) 450° B) 495° C) 600° D) 945° E) 1170°

55. Sea:
$A = \{x/|\text{sen}x| = |\cos x|$, x en radianes$\}$ y
$B = \{x/\text{sen}x = \cos x$, x en radianes$\}$
hallar el conjunto A – B

A) $\left\{x/x = (3 + 4k)\frac{\pi}{4}; k = 0 \pm 1, ...\right\}$

B) $\left\{x/x = (3 + 2k)\frac{\pi}{4}; k = 0 \pm 1, ...\right\}$

C) $\left\{x/x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}; k = 0 \pm 1, ...\right\}$

D) $\left\{x/x = (1 + 4k)\frac{\pi}{4}; k = 0 \pm 1, ...\right\}$

E) $\left\{x/x = (1 + 2k)\frac{\pi}{4}; k = 0 \pm 1, ...\right\}$

56. Señalar la afirmación que cumple con la siguiente inecuación: $\sqrt{3}\,\text{sen}x + \sqrt{2}\cos x < \sqrt{3}$

A) $x < \text{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right)$ B) $\cos x > \frac{2\sqrt{6}}{5}$

C) $\text{sen}x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ D) $\pi < x < \text{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi$

E) $\pi < x < \frac{9\pi}{4}$

57. Resolver:
$(\text{sen}4x + \cos4x)(\text{sen}x + \cos x) = 1 + \text{sen}5x$,
indicar la suma de los tres primeros valores positivos de **x**.

A) 2π B) 3π C) π D) $\frac{7\pi}{3}$ E) 4π

58. Hallar la suma de las dos primeras soluciones positivas de x en: $\cos3x = \frac{1}{2}$

A) 120° B) 240° C) 300° D) 260° E) 270°

59. Hallar la suma de las dos primeras soluciones positivas de x en:
$\tan(2x - 30°) = \sqrt{3}$

A) 170° B) 180° C) 200° D) 210° E) 150°

60. Si: x_1 y x_2 son los dos primeros valores positivos de **x** que verifican: $2\text{sen}^2x + \cos x = 1$
calcular: $\text{sen}(x_2 - x_1)$; $x_1 < x_2$
Si: $x_1 < x_2$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

61. Resuelva: $2\cos\frac{\theta}{2} + \sec\frac{\theta}{2} = \csc\theta\csc\frac{\theta}{2}$
donde k ! Z

A) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

B) $k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$

C) $k\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$

D) $\frac{k\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{3}\right)$

E) $2k\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{5} - 2}{3}\right)$

62. Resuelva la siguiente ecuación en el intervalo $\langle 0; 2\pi\rangle$
$2\cos^2x = \log(\text{sen}x)$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{8}$

63. Siendo x e y $\in \langle 0; \pi\rangle$, resuelva el sistema

$\csc x + \csc y = \frac{\sqrt{6}}{2}\csc x\csc y$ ...(1)

$\sec x + \sec y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sec x\sec y$ ...(2)

A) $x = \frac{7\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{12}$ B) $x = \frac{5\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{12}$ C) $x = \frac{11\pi}{12}$, $y = \frac{7\pi}{12}$

D) $x = \frac{\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{12}$ E) $x = \frac{7\pi}{12}$, $y = \frac{11\pi}{12}$

64. Dada la ecuación: $2\text{sen}3x + \cos3x = \cos x$
halle $\tan x_1$, siendo x_1 la mayor solución en el intervalo $\langle 0; \pi\rangle$

A) –3 B) 3 C) 2 D) 1 E) –1

65. A partir de la ecuación
$2\cos x\cos3x = \text{sen}6° + \text{sen}78° + \text{sen}30°$
un valor de x es:

A) 24° B) 12° C) 36° D) 18° E) 9°

66. Después de que se resuelva la ecuación siguiente $\text{arcsen}(\sqrt{3}x) + \text{arcsen}x = \frac{\pi}{2}$; halle los valores de x.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{-1}{2}; \frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{-1}{4}$ E) $\frac{1}{2} \vee \frac{-1}{2}$

67. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica $\sqrt{\text{sen}^2\frac{x}{2}} - \text{sen}\frac{x}{4} = 0$, e indique como respuesta la suma de soluciones en $\langle 0; 8\pi \rangle$

A) 12π B) 16π C) 20π D) 15π E) 28π

68. Si $x \in$ IIIC; calcule los valores que toma y si $\frac{\tan x + \cot x}{2} = \text{sen}y + \cos y$, además $k \in \mathbb{Z}$

A) $y \in \left\langle 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$

B) $y \in \langle (2k+1)\pi; (2k+3)\pi \rangle$

C) $y \in \left\langle \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$

D) $y \in \left\langle (2k+1)\frac{\pi}{2}; (2\pi+3)\frac{\pi}{3} \right\rangle$

E) $y \in \left\langle \frac{k\pi}{8}; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$

69. Resuelva, siendo $x \in \langle 3; 4 \rangle$
$\cot(45° - x) - \cot(45° + x) = 2\tan(x - 45°)\tan(x + 45°)\tan x$

A) 160° B) 170° C) 180° D) 240° E) 260°

70. Halle los valores de x e y, que cumplen la igualdad $2\text{arcsen}y = \pi\csc x$; $n \in \mathbb{Z}$

A) $y = \pm 1$
$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

B) $y = 1$
$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

C) $y = -1$
$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

D) $y = \pm 1$
$x = n\pi$

E) $y = \pm 1$
$x = (2n+1)\pi$

71. Resuelva la ecuación siguiente
$\text{arcsen}x + \text{arcsen}\frac{x}{2} + \text{arcsen}\frac{x}{3} + \text{arcsen}\frac{x}{4} = 0$

A) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\pm\frac{1}{2}$ E) 0

72. Luego de resolver
$8\pi + \text{arcsen}(\text{sen}x) - \arccos(\cos x) = \frac{1}{2}$
en el intervalo $\left\langle \frac{7\pi}{2}; 4\pi \right\rangle$, el valor de x será

A) $\frac{-1}{4}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\pi$ E) -4π

73. Encuentre el valor de y
$\text{sen}^4y - \text{sen}^2y + \text{sen}^2x\cos^2x = \frac{1}{20}\text{sen}(2x - 2y)$;
siendo $x \neq \frac{k\pi}{2} + y$, $k \in \mathbb{Z}$

A) $y = \frac{k\pi}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right)^k \text{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right) - x$

B) $y = \frac{k\pi}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right)^k \text{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right) + x$

C) $y = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \text{arcsen}\left(\frac{1}{10}\right) - x$

D) $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \text{arcsen}\left(\frac{1}{10}\right) + x$

E) $\frac{k\pi}{2} - (-1)^k \text{arcsen}\left(\frac{1}{10}\right) + x$

74. Resuelva la siguiente ecuación:
$\text{sen}x + \text{sen}2x + \text{sen}3x = 3\cos\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

A) $(2k+1)\frac{\pi}{9}$ B) $(3k+7)\frac{\pi}{9}$ C) $(2k+3)\frac{\pi}{7}$

D) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ E) { }

75. Siendo α el menor valor positivo y θ la segunda solución positiva que cumple
$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha = 0.25$ ... (1)
$\tan\theta \tan 2\theta \tan 4\theta = 4\theta = -\sqrt{3}$ ...(2)
halle $\sec\alpha \csc\theta \sec 2\theta$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 7

76. Resolver: $\text{sen}4x > 4\text{sen}x\text{sen}2x\text{sen}3x$
para $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$

77. Resolver:
$3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x \tan 2x$; $(k \in \mathbb{Z})$

A) $k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{12}\right)$ B) $k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$

C) $k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)$ D) $k\pi \pm \arccos\frac{1}{4}$

E) $k\pi \pm \arccos\frac{1}{4}$

78. Determine el rango de la función:
$F(x) = \arctan(\text{sen}^6x + \cos^6x)$

A) $\left[\arctan 4; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[\frac{1}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

C) $\left[\arctan\frac{1}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ D) $\left[\text{arcsen}\frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{\pi}{2}\right]$

E) $\left[\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{17}}; \frac{\pi}{4}\right]$

79. Sean las funciones: $G(x) = |1 - \cos x|$ y $F(x) = \cos x$

Determinar todos los valores de x en $[-\pi; \pi[$ tal que $G(x) \leq F(x)$.

A) $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ B) $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ C) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

D) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ E) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$

80. Resuelva e indique la suma de las tres primeras soluciones no negativas:

$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$

A) 4π B) $5\pi/2$ C) $9\pi/4$ D) $7\pi/2$ E) $17\pi/4$

81. Si: $F(x) = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$

$$G(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \langle 0; \pi\rangle \\ \tan x - 1; & x \in \langle \pi; 2\pi\rangle \end{cases}$$

resolver: $F(x) \geq G(x)$

A) $\left[\arctan\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left\langle\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle - \{\pi\}$

B) $\left[\arctan\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left\langle\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right\rangle$

C) $\left[\arctan\frac{1}{2}; \pi\right\rangle \cup \left\langle\pi; \frac{5\pi}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

E) $\langle 0; \pi\rangle \cup \langle \pi; 2\pi\rangle$

82. Calcule la mayor solución negativa de:

$\tan x = \tan\left(x + \frac{\pi}{18}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{9}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

A) $-\frac{\pi}{9}$ B) $-\frac{2\pi}{9}$ C) $-\frac{4\pi}{9}$ D) $-\frac{5\pi}{9}$ E) $-\frac{17\pi}{36}$

83. Si $x \in [0; 1\rangle$, reducir:

$$\theta = \arctan\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) + \arccos\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

A) $2\arctan x$ B) $-2\arctan x$
C) $\pi - 2\arctan x$ D) $\pi - 4\arctan x$
E) $\frac{\pi}{2} - \arctan x$

84. Calcule: $\Phi = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{8}{2} + \arctan\frac{8}{2}$

A) 0 B) π C) $3\pi/4$
D) $2\arctan 4$ E) $\pi - \arctan 4$

85. Si: $F(x) = (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \cos 3x)$
¿para cuál de los siguientes intervalos F(x) es negativo?

A) $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ B) $x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ C) $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right[$

D) $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$ E) $x \in \left]-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right[$

86. Resolver:

$$6\operatorname{sen} x \cos x + 3\operatorname{sen}^2 x + 11\cos^2 x = 2$$

A) $n\pi - \arctan 3;\ n \in Z$
B) $n\pi + \arctan 2;\ n \in Z$
C) $2n\pi \pm \arccos\ n \in Z$
D) $n\pi + (-1)^n \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right);\ n \in Z$
E) $n\pi \pm \arctan\left(\frac{1}{3}\right);\ n \in Z$

87. Resolver la ecuación

$$\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x};\ (k \in Z)$$

A) $k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2 - 3}{a^2 + 1}\right)$

B) $2k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2 - 3}{a^2 + 1}\right)$

C) $k\pi \pm \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{a^2 - 3}{a^2 - 1}\right)$

D) $2k\pi \pm \operatorname{arcsen}\left(\frac{a^2 - 3}{a^2 + 1}\right)$

E) $k\pi \pm \arctan\left(\frac{a^2 - 3}{a^2 + 1}\right)$

88. Reducir la sumatoria:

$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{6}{7} + \ldots$ n términos

A) $\arctan\frac{1}{n + 1}$ B) $\arctan\frac{n}{n + 1}$

C) $n\pi - \arctan\frac{n}{n + 1}$ D) $n\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{n}{n + 1}$

E) $n\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n}{n + 2}$

89. Resolver: $\cos 2x - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0$
en $[0; 2\pi]$

A) $[0; 2\pi] \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ B) $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

C) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{}\right]$ D) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

E) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \langle 2\pi\rangle$

90. Si: $0 < a < \frac{\pi}{2} \wedge 0 < b < \frac{\pi}{2}$

¿qué condición debe satisfacer a y b para que la ecuación $x^2 \tan a = 2x \tan b$ tenga raíces complejas?

A) $0 < a + b < \frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4} < a + b < \frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{2} < a + b < \pi$ D) $\frac{3\pi}{4} < a + b < \frac{\pi}{2}$

E) $0 < a + b < \pi$

CLAVES

1. C	13. C	25. C	37. E	49. B	61. A	73. A	85. C
2. D	14. C	26. C	38. B	50. C	62. B	74. E	86. A
3. D	15. A	27. B	39. B	51. D	63. A	75. B	87. A
4. D	16. E	28. A	40. A	52. D	64. A	76. C	88. E
5. B	17. B	29. C	41. E	53. E	65. B	77. B	89. E
6. D	18. E	30. C	42. A	54. B	66. A	78. E	90. C
7. A	19. E	31. C	43. C	55. A	67. C	79. C	
8. E	20. A	32. C	44. C	56. D	68. A	80. C	
9. D	21. C	33. A	45. B	57. E	69. C	81. A	
10. C	22. B	34. B	46. C	58. A	70. A	82. C	
11. B	23. C	35. B	47. B	59. B	71. E	83. D	
12. D	24. E	36. A	48. B	60. D	72. C	84. B	

Resolución de figuras geométricas

capítulo 11

Edward Kasner (1878-1955) fue un importante matemático judío-norteamericano. Llegó a ser profesor emérito del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Columbia y fue el primer judío en lograr ese honor en la sección de ciencias de dicha institución. El título de su tesis de doctorado fue *The Invariant Theory of the Inversion Group* (La teoría invariante del grupo de inversión). Su principal campo de investigación fue la geometría diferencial en el espacio euclídeo. Analizó sus aplicaciones en la mecánica, pero también en las proyecciones estereográficas y en la cartografía. Escribió artículos sobre el empaquetamiento de círculos y sobre el ángulo de contacto, y estudió una extensión de los triángulos rectángulos hacia el plano complejo. Sus exposiciones sobre matemáticas elementales lo hicieron popular entre los no matemáticos.

Sin duda alguna, es conocido por los profanos en las matemáticas por ser el creador del concepto relacionado con el número «gúgol» (*googol*, en el original en inglés), con el objeto de explicar lo ingente del infinito a través de un número tan grande que es inimaginable pero que, a pesar de esto no se acerca siquiera al infinito. En 1940, al lado de James R. Newman, Kasner escribió un libro no técnico de matemáticas, intitulado *Mathematics and the Imagination* (Las matemáticas y la imaginación) donde mencionó por vez primera el término *googol*.

Fuente: Wikipedia

INTRODUCCIÓN

Sabemos que todo triángulo tiene seis elementos básicos tres lados y tres ángulos. Además otros elementos auxiliares como alturas, medianas, bisectrices, ... etc.

Resolver un triángulo consiste fundamentalmente en hallar los elementos básicos de éste, para lo cual debemos conocer por lo menos tres de sus elementos (necesariamente uno de ellos no angular).

Nota

Frecuentemente a los ángulos de un triángulo se le representa por letras mayúsculas A,B,C... y a sus lados por letras minúsculas a,b,c, ... respectivamente.

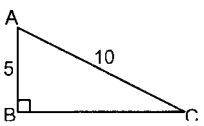
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Como en un triángulo rectángulo hay un dato implícito, el ángulo recto, entonces basta con conocer dos de sus elementos (al menos un lado) para hallar los restantes. Los casos que se presentan son dos:

- Cuando se conocen los lados (caso I)
- Cuando se conoce un lado y un ángulo agudo (caso II).

Aplicaciones:

1. Resolver el triángulo de la figura adjunta.



Resolución:

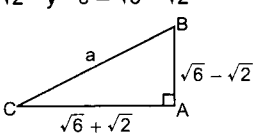
Observar que estamos en el caso I:

$\text{sen}C = \frac{5}{10} \Rightarrow \text{sen}C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30°$

$A = 90° - C \Rightarrow A = 90° - 30° \Rightarrow A = 60°$

$a^2 = (10)^2 - (5)^2 \Rightarrow a^2 = 75 \Rightarrow a = 5\sqrt{3}$

2. Resolver un triángulo ABC, recto en A, si: $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$



Resolución:

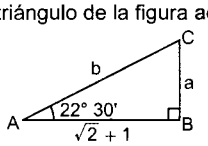
$a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$\text{sen}C = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow C = 15°$

$B = 90° - C \Rightarrow B = 90° - 15° \Rightarrow B = 75°$

3. Resolver el triángulo de la figura adjunta.



Resolución:

Observar que estamos en el caso II:

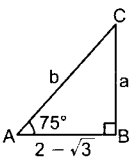
$C = 90° - A \Rightarrow C = 90° - 22°30' \Rightarrow C = 67°30'$

$\frac{a}{\sqrt{2}+1} = \tan 22°30' \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a = 1$

$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = (1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

4. Resolver un triángulo rectángulo ABC, recto en B; si: $A = 75°$ y $c = 2 - \sqrt{3}$



Resolución:

$C = 90° - 75° \Rightarrow C = 15°$

$\frac{a}{2-\sqrt{3}} = \tan 75° \Rightarrow a = (2 - \sqrt{3})\tan 75°$

$a = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow a = 1$

$\frac{b}{a} = \csc 75° \Rightarrow b = a\csc 75°$

$b = (1)(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

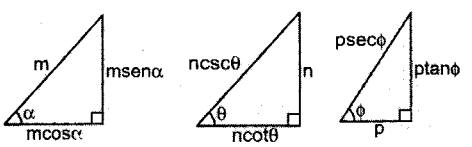
Nota

Analizar detenidamente estos 4 ejemplos y observar que se pueden resolver de otra manera, al final el resultado es el mismo.

Observaciones

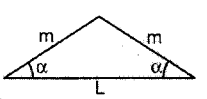
1. Es muy importante recordar lo estudiado en el capítulo 2.

a) Datos: m y α b) Datos: n y θ c) Datos p y ϕ

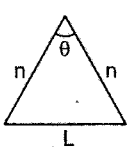


2. Un caso que se presenta con frecuencia es el de un triángulo isósceles:

- Datos: m y α
  Incógnita: lado desigual (L)
  Usando la observación anterior, se demuestra que: $L = 2m\cos\alpha$

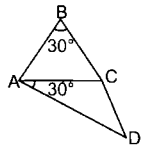


- Datos: n y θ
  Incógnita: lado desigual (L)
  Usando la observación anterior se demuestra que:
  $L = 2n\text{sen}\frac{\theta}{2}$



Ejemplo:

De la figura adjunta hallar AD, sabiendo que:
AB = BC = 10; AC = CD



Resolución:

Triángulo ABC es isósceles:

$AC = 2(10)\text{sen}\left(\frac{30°}{2}\right) \Rightarrow AC = 20\text{sen}15°$

$AC = 20\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow AC = 5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Triángulo ACD es isósceles:

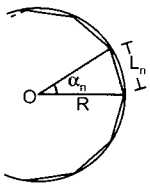
$AD = 2(AC)\cos 30° \Rightarrow AD = 2(5)(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow AD = 5\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

POLÍGONOS REGULARES

Se denomina polígono regular a todo polígono convexo de lados y ángulos respectivamente iguales. Todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible en circunferencias concéntricas.

Polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R



O: Centro de la circunferencia
N : Número de lados del polígono
L_n : Lado del polígono
α_n : Ángulo central

Angulo central: $\boxed{\alpha_n = \frac{360°}{n} \text{ o } \alpha_n = \frac{2\pi}{n}}$

Lado del polígono: $\boxed{L_n = 2R\text{sen}\frac{\pi}{n}}$

Perímetro del polígono: $\boxed{P_n = 2Rn\text{sen}\frac{\pi}{n}}$

Área del polígono: $\boxed{S_n = \frac{nR^2}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{n}}$

Nota

Estas fórmulas son fáciles de demostrar, teniendo presente que todo polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos isósceles congruentes, entonces para hallar el área del polígono, primero hallamos el área de un triángulo y luego lo multiplicamos por n; para hallar el perímetro del polígono, primero hallamos el lado desigual del triángulo y luego lo multiplicamos por n.

Por ejemplo: hallar el perímetro y el área de un pentadecágono regular inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es de 10 cm. (considerar: sen12° = 0,208 y sen24° = 0,406).

Resolución:

Pentadecágono: n = 15, dato: R = 5 cm

Perímetro:

$P_{15} = 2R(15)\text{sen}\frac{\pi}{15} = 2(5)(15)(0,208) = 31,2\text{ cm}$

Área:

$S_n = \frac{(15)(5)^2}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{15} = \frac{(15)(25)}{2}(0,406) = 76,125\text{ cm}^2$

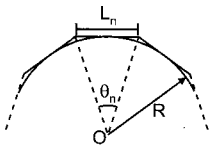
A continuación se muestra un cuadro en el cual se indica el ángulo central (α_n), lado(n), perímetro y área de algunos polígonos regulares que son de gran aplicación, R ⇒ radio de la circunferencia circunscrita).

No es recomendable intentar memorizar este cuadro, lo importante es comprobar (aplicando las fórmulas dadas) los resultados que se indican.

Polígono	α_n	L_n	Perímetro	Área
Triángulo equilátero	$\frac{2\pi}{3}$	$R\sqrt{3}$	$3R\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$
Cuadrado	$\frac{\pi}{2}$	$R\sqrt{2}$	$4R\sqrt{2}$	$2R^2$
Pentágono regular	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{5R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Hexágono regular	$\frac{\pi}{3}$	R	6R	$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$
Octógono regular	$\frac{\pi}{4}$	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}R^2$
Decágono regular	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$5R(\sqrt{5}-1)$	$\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Dodecágono regular	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$6R(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$3R^2$

Polígono regular circunscrito a una circunferencia de radio R

O: centro de la circunferencia
n : número de lados
L_n : lado del polígono
θ_n: angulo central:



Angulo central: $\theta_n = \dfrac{360°}{n}$ o $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$

Lado del polígono: $\boxed{L_n = 2R\tan\dfrac{\pi}{n}}$

Perímetro del polígono: $\boxed{P_n = 2nR\tan\dfrac{\pi}{n}}$

Área del polígono: $\boxed{S_n = nR^2\tan\dfrac{\pi}{n}}$

Por ejemplo:

En qué relación se encuentran las áreas de un pentágono regular y decágono regular circunscritos a una circunferencia de radio a.

Resolución:

Área del pentágono regular circunscrito:

$S_5 = 5a^2\tan\dfrac{\pi}{5} = 5a^2\tan 36°$

Àrea del decágono regular circunscrito:

$S_{10} = 10a^2\tan\dfrac{\pi}{10} = 10a^2\tan 18°$

Entonces:

$$\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{5a^2\tan 36°}{10a^2\tan 18°} = \frac{1}{2}\frac{\tan 36°}{\tan 18°} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}36°\cos 18°}{\cos 36°\operatorname{sen}18°}$$

$$\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{2\operatorname{sen}18°\cos 18°\cos 18°}{2\cos 36°\operatorname{sen}18°}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 18°}{\cos 36°} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 36°}{\cos 36°}\right) = \frac{1}{2}(\sec 36° + 1)$$

$$\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1 + 1) \Rightarrow \frac{S_5}{S_{10}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

A continuación se muestra un cuadro en el cual se indica el ángulo central (θ_n), lado (L_n), perímetro y área de algunos polígonos regulares (R ⇒ radio de la circunferencia inscrita).

Polígono	θ_n	L_n	Perímetro	Área
Triángulo equilátero	$\frac{2\pi}{3}$	$2\sqrt{3}R$	$6\sqrt{3}R$	$3\sqrt{3}R^2$
Cuadrado	$\frac{\pi}{2}$	$2R$	$8R$	$4R^2$
Pentágono regular	$\frac{2\pi}{5}$	$2R\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$10R\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$5\sqrt{5-2\sqrt{5}}R^2$
Hexágono regular	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$	$4R\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}R^2$
Octágono regular	$\frac{\pi}{4}$	$2R(\sqrt{2}-1)$	$16R(\sqrt{2}-1)$	$8(\sqrt{2}-1)R^2$
Decágono regular	$\frac{\pi}{5}$	$2R\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$20R\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$10\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}R^2$
Dodecágono regular	$\frac{\pi}{6}$	$2R(2-\sqrt{3})$	$24R(2-\sqrt{3})$	$12(2-\sqrt{3})R^2$

Ejemplos:

1. Si: 2m es el lado de un polígono regular de n lados, R y r los radios de las circunferencias circunscritas e inscrita respectivamente, demostrar:
$R + r = m\cot\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

Resolución:

Dato: El lado del polígono es 2m
Sabemos que cuando el polígono está inscrito entonces su lado:

$L_n = 2R\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} \Rightarrow 2m = 2R\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}$ ...(1)

Sabemos que cuando el polígono está circunscrito entonces su lado:

$L_n = 2r\tan\dfrac{\pi}{n} \Rightarrow 2m = 2r\tan\dfrac{\pi}{n}$ ...(2)

$$\left.\begin{array}{l} De(1) \Rightarrow R = m\csc\dfrac{\pi}{n} \\ De(2) \Rightarrow r = m\cot\dfrac{\pi}{n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} R + r = m\csc\dfrac{\pi}{n} + m\cot\dfrac{\pi}{n} \\ R + r = m\left(\csc\dfrac{\pi}{n} + \cot\dfrac{\pi}{n}\right) \end{array}$$

Recuerdas que:
$\csc\theta + \cot\theta = \cot\dfrac{\theta}{2}$
Entonces:
$R + r = m\cot\dfrac{\pi}{2n}$

2. Hallar la relación entre las áreas de dos polígonos regulares ambos de n lados uno inscrito y el otro circunscrito a una misma circunferencia.

Resolución:

Sea R el radio de la circunferencia

Sea S_i el área del polígono inscrito:

$\Rightarrow S_i = \frac{nR^2}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{n}$

Sea S_c el área del polígono circunscrito:

$\Rightarrow S_c = nR^2\tan\frac{\pi}{n}$

entonces:

$$\frac{S_i}{S_c} = \frac{\frac{nR^2}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{n}}{nR^2\tan\frac{\pi}{n}} \Rightarrow \frac{S_i}{S_c} = \frac{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\frac{S_i}{S_c} = \frac{2\text{sen}\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{2\text{sen}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}} \Rightarrow \frac{S_i}{S_c} = \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

3. Dos polígonos de n y 3n lados tienen igual perímetro, ¿cuál es la relación de los radios de las circunferencias circunscritas? (expresar la respuesta en términos de θ; $\theta = \frac{\pi}{3n}$)

Resolución:

El perímetro del polígono de n lados es:

$P_n = 2R_1\text{sen}\frac{\pi}{n}$

El perímetro del polígono de 3n lados es:

$P_{3n} = 6R_2\text{sen}\frac{\pi}{3n}$

Dato: $P_n = P_{3n}$

$2R_1n\text{sen}\frac{\pi}{n} = 6R_2\ n\text{sen}\frac{\pi}{3n}$; como: $\theta = \frac{\pi}{3n}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{n} = 3\theta$

Simplificando la igualdad anterior y reemplazando:

$\Rightarrow \frac{\pi}{n} = 3\theta$

$R_1\text{sen}3\theta = 3R_2\text{sen}\theta \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\text{sen}3\theta}{3\text{sen}\theta}$

$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\text{sen}\theta(2\cos 2\theta + 1)}{3\text{sen}\theta} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{2\cos 2\theta + 1}{3}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Triángulos oblicuángulos son aquellos que no son rectángulos, ya se ha mencionado que para resolver un triángulo se tienen que conocer tres de sus elementos necesariamente uno de ellos no angular. Para la resolución de triángulos oblicuángulos analizaremos cuatro casos (según los datos).

Caso 1: cuando se conocen dos ángulos y un lado.

Caso 2: cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

Caso 3: cuando se conocen tres lados.

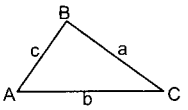
Caso 4: cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Este caso también se conoce como "caso ambiguo" ya que puede haber uno o dos triángulos o ninguno.

Para la resolución de triángulos es necesario saber las siguientes leyes:

Ley de senos

"En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos".

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}}$$



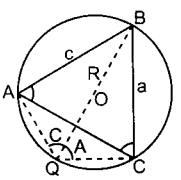
Demostración:

- Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia tal como se observa en la figura.
- Por B trazamos un segmento que pasa por el centro de la circunferencia hasta Q. (BQ = 2R, R: Radio)
- Observar que: $m\angle BAQ = 90°$ y $m\angle BCQ = 90°$
- Además: $m\angle BQA = C$ y $m\angle BQC = A$
- entonces:

$\triangle$ BAQ: $\text{sen}C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$

$\triangle$ BCQ: $\text{sen}A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = 2R$

$\Rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C}$



- Trazando el diámetro que pasa por A se demuestra en forma análoga: $\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$

Conclusión:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}}$$

Nota

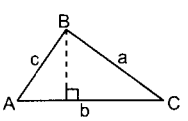
Observar que:

$\frac{a}{\text{sen}A} = 2R$; $\frac{b}{\text{sen}B} = 2R$; $\frac{c}{\text{sen}C} = 2R$

$\boxed{a = 2R\text{sen}A}$ $\boxed{b = 2R\text{sen}B}$ $\boxed{c = 2R\text{sen}C}$

Ley de proyecciones

"En todo triángulo cualesquiera de sus lados se puede expresar como la suma de las proyecciones de los otros dos sobre dicho lado".

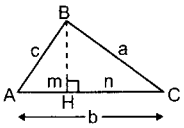


$\boxed{a = c\cos B + b\cos C}$

$\boxed{b = a\cos C + c\cos A}$

$\boxed{c = a\cos B + b\cos A}$

Demostración:



- Trazamos la altura BH
- Se determinan sobre el lado AC dos segmentos m y n, tal que: $b = m + n$

  ◺ AHB: $m = c\cos A$

  ◺ CHB: $n = a\cos C$

  $m + n = c\cos A + a\cos C$

  $b = c\cos A + a\cos C$
- Las demás igualdades se demuestran en forma similar.

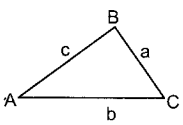
Ley de cosenos

"En todo triángulo la medida de cualesquiera de sus lados al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que estos forman".

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$



Demostración:

- De la ley de proyecciones sabemos que:

  $a = b\cos C + c\cos B$ ...(1)

  $b = a\cos C + c\cos A$ ...(2)

  $c = a\cos B + b\cos A$ ...(3)
- Multiplicamos: $(1) \times a$; $(2) \times b$; $(3) \times c$

  Obteniendo:

  $a^2 = ab\cos C + ac\cos B$

  $b^2 = ab\cos C + bc\cos A$

  $c^2 = bc\cos A + ac\cos B$
- entonces: $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$

  $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

  En forma análoga se demuestran las otras dos igualdades.

Nota

De la ley de cosenos se deduce:

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} \qquad \boxed{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\boxed{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

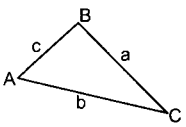
Ley de tangentes

"En todo triángulo la diferencia de dos de sus lados es a su suma como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a dichos lados es a la tangente de la semisuma de los mismos".

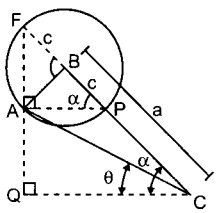
$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}} \qquad \boxed{\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}}$$

Demostración:



- Dado un triángulo ABC con centro en B y radio BA se traza una circunferencia que intersecta a BC en P.
- Por C se traza una paralela a AP hasta intersectar a la prolongación FA.



- Observar que:

  $FC = a + c$ y $PC = a - c$

  además: $\angle ABF = \angle A + \angle C$ (ángulo exterior)

  $\Rightarrow \alpha = \dfrac{A+C}{2}$

  También: $\theta = \alpha - C$

  $\Rightarrow \theta = \dfrac{A+C}{2} - C \Rightarrow \theta = \dfrac{A-C}{2}$

  $$\left.\begin{array}{l} ◺\ AQC: \tan\theta = \dfrac{AQ}{CQ} \\ ◺\ FQC: \tan\alpha = \dfrac{FQ}{CQ} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tan\theta}{\tan\alpha} = \frac{AQ}{FQ}$$

  Pero: ◺ FQC ~ ◺ FAP $\Rightarrow \dfrac{AQ}{FQ} = \dfrac{PC}{FC}$

  entonces: $\dfrac{\tan\theta}{\tan\alpha} = \dfrac{PC}{FC} \Rightarrow \dfrac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \dfrac{a-c}{a+c}$

Nota

De estas cuatro leyes las de mayor aplicación son la ley de senos y la ley de cosenos.

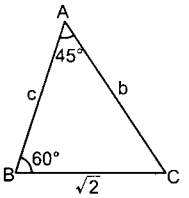
CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Caso 1: Cuando se conocen dos ángulos y un lado.

- Debemos observar que la suma de los dos ángulos sea menor de 180°.
- Usamos la ley de senos para hallar los lados desconocidos.

Ejemplo:

Resolver un triángulo ABC si: $a = \sqrt{2}$; $B = 60°$ y $A = 45°$



Resolución:

$C = 180° - (60° + 45°) \Rightarrow C = 75°$

Aplicamos ley de senos:

$$\frac{b}{\text{sen}60°} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}45°} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}60°}{\text{sen}45°}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}45°} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}75°}{\text{sen}45°} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

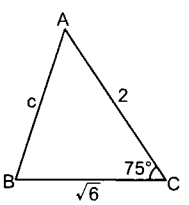
$$\Rightarrow c = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Caso 2: Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

- Aplicamos la ley de cosenos para hallar el lado que falta.
- Aplicamos la ley de senos o cosenos para hallar alguno de los ángulos desconocidos.
- El tercer ángulo se halla restando de 180° la suma de los otros dos.

Ejemplo:

Resolver un triángulo ABC si: $a = \sqrt{6}$; $b = 2$ y $C = 75°$.



Resolución:

$c^2 = (\sqrt{6})^2 + (2)^2 - 2(\sqrt{6})(2)\cos 75°$

$c^2 = 6 + 4 - 4\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow c^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

$c^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow c = (\sqrt{3} + 1)$

Como conocemos los tres lados del triángulo, entonces:

$$\cos A = \frac{(2)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2(2)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60°$$

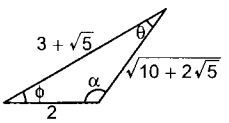
$B = 180° - (75° + 60°) \Rightarrow B = 45°$

Caso 3: Cuando se conocen tres lados.

- Aplicamos la ley de cosenos para hallar dos de sus ángulos.
- El tercer ángulo se halla restando de 180° la suma de los otros dos.

Ejemplo:

Los lados de un triángulo miden (en centímetros): $3 + \sqrt{5}$; $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ y 2. Hallar la medida de sus ángulos.



Resolución:

$$\cos\phi = \frac{(2)^2 + (3+\sqrt{5})^2 - (\sqrt{10+2\sqrt{5}})^2}{2(2)(3+\sqrt{5})}$$

$$\cos\phi = \frac{8+4\sqrt{5}}{4(3+\sqrt{5})} = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36° \Rightarrow \boxed{\phi = 36°}$$

$$\cos\alpha = \frac{(\sqrt{10+2\sqrt{5}})^2 + (2)^2 - (3+\sqrt{5})^2}{2(2)(\sqrt{10+2\sqrt{5}})} = \frac{-4\sqrt{5}}{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{\sqrt{80}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = -\cos 54°$$

Como: $\cos\alpha = -\cos 54° \Rightarrow \alpha + 54° = 180° \Rightarrow \alpha = 126°$

$\theta = 180° - (\alpha + \phi) = 180° - (126° + 36°) \Rightarrow \theta = 18°$

Caso 4: Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

- Sean a y b los lados del triángulo y el ángulo A los datos del problema. En este caso puede ocurrir de que se encuentren dos, uno o ningún triángulo con estas medidas la forma de proceder en este caso es la siguiente:
- Sabemos que en todo triángulo ABC se cumple: $\text{sen}B = \frac{b\,\text{sen}A}{a}$; entonces puede ocurrir que:
  1.° $a < b\,\text{sen}A$: esto implica que $\text{sen}B > 1$, por lo tanto **no hay solución**.
  2.° $a = b\,\text{sen}A$: esto implica que $\text{sen}B = 1$ entonces: $B = 90°$, por lo tanto ABC es un triángulo rectángulo.
  3.° $a > b\,\text{sen}A$: esto implica que $\text{sen}B < 1$ a su vez implica dos posibles soluciones para el ángulo B(B puede ser agudo o b puede ser obtuso), pero de acuerdo a los datos del problema (a y b) se presentan tres alternativas.
- Si: $a > b \Rightarrow$ B puede tomar solo un valor: el agudo.
- Si: $a = b \Rightarrow$ es evidente que el triángulo es isósceles: $A = B$

- Si: $a < b \Rightarrow B$ puede tomar los dos valores (caso ambiguo)(observar que estos dos valores son suplementarios).
- Una vez que hallamos la medida del ángulo B entonces podemos calcular el ángulo C restando de 180° la suma de los otros dos.
- Aplicamos la ley de senos o cosenos para hallar el lado que falta.

Aplicaciones:

1. Resolver el triángulo ABC si $a = 21$, $b = 12$ y $A = 60°$.

Resolución:

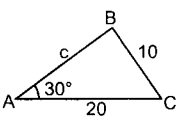
$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \text{sen}B = \frac{b\text{sen}A}{a}$$

$$\Rightarrow \text{sen}B = \frac{12\text{sen}60°}{21} = \frac{12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{21}$$

$\text{sen}B = \frac{2\sqrt{3}}{7} < 1 \Rightarrow$ como $\text{sen}B < 1 \Rightarrow$ **no hay solución.**

2. Resolver el triángulo ABC si: $a = 10$ m; $b = 20$ m y $A = 30°$

Resolución:



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \text{sen}B = \frac{b\text{sen}A}{a} = \frac{20\text{sen}30°}{10}$$

$$\Rightarrow \text{sen}B = \frac{20\text{sen}30°}{10} = \frac{20\left(\frac{1}{2}\right)}{10} = 1$$

$\text{sen}B = 1 \Rightarrow B = 90°$, por lo tanto, ABC es un triángulo rectángulo.

Como: $A = 30° \Rightarrow C = 60°$; $c = 10\sqrt{3}$ m

3. Resolver el triángulo ABC si: $a = \sqrt{3}$ m, $b = \sqrt{2}$ m y $A = 60°$

Resolución:

$$\text{sen}B = \frac{b\text{sen}A}{a} = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}60°}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

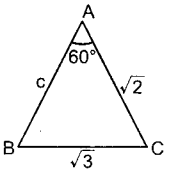
Como: $\text{sen}B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; entonces hay dos posibles soluciones: $B = 45°$; $B = 135°$

Como: $a > b$; entonces debe cumplirse que $A > B$ y por dato $A = 60°$; entonces $60° > B$; por lo tanto sólo aceptamos que $B = 45°$.

Luego: $C = 180° - (60° + 45°) \Rightarrow C = 75°$

$$\frac{c}{\text{sen}75°} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}45°} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}75°}{\text{sen}45°} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$c = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\text{m}$$



4. Resolver el triángulo ABC si: $a = \sqrt{3} - 1$; $b = \sqrt{3} + 1$ y $A = 15°$

Resolución:

$$\text{sen}B = \frac{b\text{sen}A}{a} = \frac{(\sqrt{3}+1)\text{sen}15°}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{sen}B = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow B = 75 \ \vee \ B = 105$$

Como: $a < b$ entonces $A < B$; por dato $A = 15°$ entonces $15° < B$. Observamos que las dos soluciones cumplen con la desigualdad. Por lo tanto, se aceptan las dos soluciones (caso ambiguo).

Si: $B = 75°$

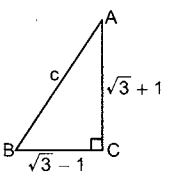
$C = 180° - (15° + 75°)$

$\Rightarrow C = 90°$

$$\frac{c}{\sqrt{3}-1} = \csc 15°$$

$\Rightarrow c = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$c = 2\sqrt{2}$



Si: $B = 105°$

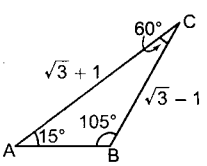
$C = 180° - (15° + 105°)$

$\Rightarrow C = 60°$

$$\frac{c}{\text{sen}60°} = \frac{\sqrt{3}-1}{\text{sen}15°}$$

$$c = \frac{(\sqrt{3}-1)\text{sen}60°}{\text{sen}15°}$$

$$c = \frac{(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow c = \sqrt{6}$$



Conclusión:

1.ª solución: $B = 75°$, $C = 90° \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$

2.ª solución: $B = 105°$, $C = 60° \Rightarrow c = \sqrt{6}$

5. Resolver el triángulo ABC si: $a = \sqrt{6}$, $b + c = 3 + \sqrt{3}$ y $A = 60°$

Resolución:

Sabemos: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$...(Ley de senos)

Dato: $a = \sqrt{6}$; $A = 60$

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{\sqrt{6}}{\text{sen}60°} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = 2\sqrt{2}$$

Luego:

$$\frac{b}{\text{sen}B} = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}\,\text{sen}B$$

$\frac{c}{\text{sen}C} = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}\,\text{sen}C$

Dato: $b + c = 3 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\,\text{sen}B + 2\sqrt{2}\,\text{sen}C = 3 + \sqrt{3}$

$\text{sen}B + \text{sen}C = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 2\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

Recordar que: $B + C = 120° \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 60°$

$2\text{sen}60°\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

$\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{B-C}{2} = 15°$

$\Rightarrow B - C = 30°$

Por lo tanto:

$B + C = 120;\ B - C = 30° \Rightarrow B = 75°$ y $C = 45°$

Luego:

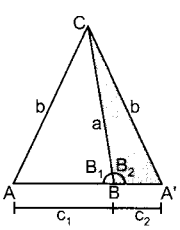
$b = 2\sqrt{2}\,\text{sen}75° = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow b = (\sqrt{3} + 1)$

$c = 2\sqrt{2}\,\text{sen}45° = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow c = 2$

6. Si: a, b y A son conocidos y c_1, c_2 son valores del tercer lado en el caso ambiguo, demostrar que si: $c_1 > c_2$ entonces:
   - $c_1 - c_2 = 2a\cos B_1$
   - $c_1c_2 = b^2 - a^2$
   - $c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos 2A = 4a^2\cos^2 A$

Resolución:

Caso ambiguo; observar que:



$B_1 + B_2 = 180°$

Por la ley de proyecciones:

$\triangle ABC$: $c_1 = b\cos A + a\cos B_1$

$\triangle A'BC$: $c_2 = b\cos A + a\cos B_2$

como:

$B_1 + B_2 = 180° \Rightarrow \cos B_2 = -\cos B_1$

entonces:

$c_1 - c_2 = a\cos B_1 - a\cos B_2$

$c_1 - c_2 = a\cos B_1 - a(-\cos B_1)$

$\Rightarrow c_1 - c_2 = 2a\cos B_1$

Sabemos que:

$B_1 + B_2 = 180° \Rightarrow \cos B_1 = -\cos B_2$

Aplicando ley de cosenos:

$\triangle ABC$: $\cos B_1 = \frac{a^2 + c_1^2 - b^2}{2ac_1}$;

$\triangle A'BC$: $\cos B_2 = \frac{a^2 + c_2^2 - b^2}{2ac_2}$

$\Rightarrow \frac{a^2 + c_1^2 - b^2}{2ac_1} = \frac{-(a^2 + c_1^2 - b^2)}{2ac_2}$

$\Rightarrow a^2c_2 + c_1^2c_2 - b^2c_2 = -a^2c_1 - c_2^2c_1 + b^2c_1$

$a^2c_2 + a^2c_1 - b^2c_2 - b^2c_1 = -c_2^2c_1 - c_1^2c_2$

$a^2(c_2 + c_1) - b^2(c_2 + c_1) = -c_2c_1(c_2 + c_1)$

$\Rightarrow c_2c_1 = b^2 - a^2$

De la figura: $AA' = c_1 + c_2$

Además:

$AA' = 2b\cos A$...(Ley de proyecciones $\triangle AA'C$)

Luego:

$c_1 + c_2 = 2b\cos A \Rightarrow (c_1 + c_2)^2 = (2b\cos A)^2$

$c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 = 4b^2\cos^2 A$

Acabamos de demostrar que:

$c_1c_2 = b^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = c_1c_2 + a^2$

Entonces:

$c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 = 4\cos^2 A(a^2 + c_1c_2)$

$c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 - 4c_1c_2\cos^2 A = 4a^2\cos^2 A$

$c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2(1 - 2\cos^2 A) = 4a^2\cos^2 A$

$c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2(-\cos 2A) = 4a^2\cos^2 A$

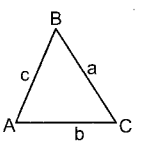
$c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos 2A = 4a^2\cos^2 A$

◄FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA MITAD DE UN ÁNGULO DE UN TRIÁNGULO EN TÉRMINOS DE LOS LADOS

Sabemos que: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ...(1)

$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ ...(2); $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ...(3)

Reemplazando (1) en (2) y (3) se obtiene:



$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}}$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$

Sea: $2p = a + b + c$; entonces: $a + c = 2p - b$;
$b + c = 2p - a$; $a + b = 2p - c$

Reemplazando se obtiene:

$$\boxed{\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}} \qquad \boxed{\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

Como: $\tan\frac{A}{2} = \frac{\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}$ $\boxed{\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}$

En forma análoga se demuestra que:

$$\boxed{\text{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}} \qquad \boxed{\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}}$$

$$\boxed{\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}} \qquad \boxed{\text{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}}$$

$$\boxed{\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}} \qquad \boxed{\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}}$$

Ejemplos:

1. Los lados de un triángulo ABC miden: a = 39 cm, b = 40 cm y c = 25 cm, calcular:

   $\text{sen}\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}$ y $\tan\frac{C}{2}$

   Resolución:

   Hallamos el valor de p:

   $2p = 39 + 40 + 25 \Rightarrow p = 52$

   $$\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(52-40)(52-25)}{40(25)}}$$

   $$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{9\sqrt{10}}{50}$$

   $$\cos\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \sqrt{\frac{52(52-40)}{39(25)}}$$

   $$\Rightarrow \cos\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{4}{5}$$

   $$\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{(52-39)(52-40)}{52(52-25)}}$$

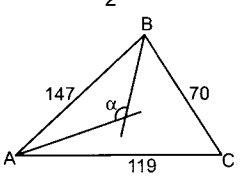
   $$\Rightarrow \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

2. Hallar el seno del ángulo obtuso formado por las bisectrices interiores de los menores ángulos de un triángulo ABC, si: a = 70 cm, c = 147 cm y b = 119 cm.

   Resolución:

   Sea α el ángulo formado por las bisectrices interiores de A y B.

   entonces: $\alpha = 90° + \frac{C}{2}$



   Luego:

   $\text{sen}\alpha = \text{sen}\left(90° + \frac{C}{2}\right)$

   $\text{sen}\alpha = \cos\left(\frac{C}{2}\right)$ ...(1)

   $2p = a + b + c \Rightarrow 2p = 119 + 147 + 70 \Rightarrow p = 168$

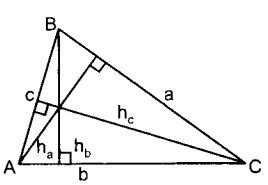
   $$\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{168(168-147)}{70(119)}}$$

   $$\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{6\sqrt{85}}{85}$$

   Luego: $\text{sen}\alpha = \frac{6\sqrt{85}}{85}$

ELEMENTOS AUXILIARES DE UN TRIÁNGULO

Altura

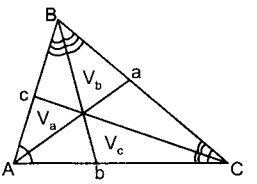


$\boxed{h_a = b\text{sen}C = c\text{sen}B}$ altura relativa al lado a

$\boxed{h_b = a\text{sen}C = c\text{sen}A}$ altura relativa al lado b

$\boxed{h_c = a\text{sen}B = b\text{sen}A}$ altura relativa al lado c

Bisectriz interior

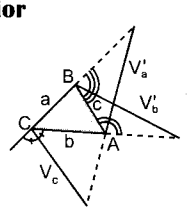


Bisectriz interior del ángulo A: $\boxed{V_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}$

Bisectriz interior del ángulo B: $\boxed{V_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}}$

Bisectriz interior del ángulo C: $\boxed{V_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}}$

Bisectriz exterior



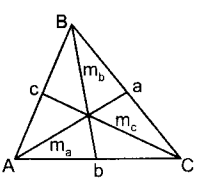
Bisectriz exterior del ángulo A: $\boxed{V'_a = \frac{2bc}{b-c}\text{sen}\frac{A}{2}}$

Bisectriz exterior del ángulo B: $\boxed{V'_b = \frac{2ac}{a-c}\text{sen}\frac{B}{2}}$

Bisectriz exterior del ángulo C: $\boxed{V'_c = \frac{2ab}{a-b}\text{sen}\frac{C}{2}}$

NOTA: En este caso observar que: a > b > c

Mediana



Mediana relativa al lado a:

$\boxed{4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$

Mediana relativa al lado b:

$\boxed{4m_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos B}$

Mediana relativa al lado c:

$\boxed{4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C}$

Nota

Otra forma de calcular la mediana:

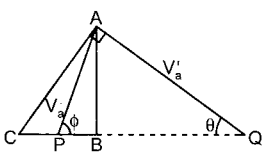
$$m_a^2 = \frac{a^2}{4} + bc\cos A \qquad m_b^2 = \frac{b^2}{4} + ac\cos B$$

$$m_c^2 = \frac{c^2}{4} + ab\cos C$$

Ejemplos:

1. La bisectriz interior y exterior del ángulo A de un triángulo ABC son: V_a y V_a' respectivamente, demostrar: $\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{V_a}{V_a'}$

Demostración



$\phi = \frac{A}{2} + C$

$\triangle$PAQ: $\tan\theta = \frac{V_a}{V_a'}$

$\theta = 90° - \phi$

$\theta = 90° - \frac{A}{2} - C$

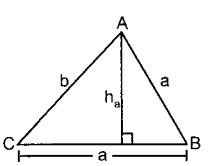
$\theta = \frac{180° - A - 2C}{2}$

$\theta = \frac{A + B + C - A - 2C}{2} \Rightarrow \theta = \frac{B-C}{2}$

$\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{V_a}{V_a'}$

2. En un triángulo ABC, se conoce el lado **a**, la altura correspondiente h_a y la diferencia **m** de los otros dos lados. Calcular: $\tan\frac{A}{2}$ en términos de los datos.

Resolución:



Dato: $b - c = m$

$\Rightarrow (b-c)^2 = m^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - 2bc = m^2$ ...(1)

Pero por ley de cosenos:

$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$

Reemplazando en (1):

$a^2 + 2bc\cos A - 2bc = m^2$

$a^2 - m^2 = 2bc(1 - \cos A)$ ...(2)

Sabemos por ley de senos: $b = \frac{a\,\text{sen}B}{\text{sen}A}$, reemplazando en (2).

$a^2 - m^2 = \frac{2ac\,\text{sen}B}{\text{sen}A}(1 - \cos A)$

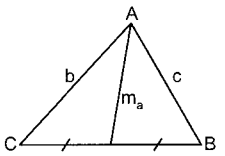
$\Rightarrow$ sabemos que: $h_a = c\,\text{sen}B$

$a^2 - m^2 = 2ah_a\left(\frac{1-\cos A}{\text{sen}A}\right) \Rightarrow a^2 - m^2 = 2ah_a\tan\frac{A}{2}$

$\therefore \tan\frac{A}{2} = \frac{a^2 - m^2}{2ah_a}$

3. En un triángulo ABC la mediana m_a es media proporcional entre los lados b y c.
Hallar $\text{sen}^2\frac{A}{2}$ en términos de estos lados.

Resolución:



Sabemos que: $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ ...(1)

Dato: $m_a^2 = bc$

Reemplazando en (1): $4bc = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

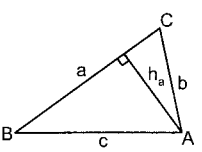
$2bc - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc$

$2bc(1 - \cos A) = (b-c)^2$

$\Rightarrow 2bc\left(2\text{sen}^2\frac{A}{2}\right) = (b-c)^2 \quad \therefore \text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(b-c)^2}{4bc}$

ÁREA DEL TRIÁNGULO

Área en términos de dos lados y el ángulo que éstos forman



Sea: S el área triángulo, sabemos que: $S = \frac{ah_a}{2}$

Pero: $h_a = b\,\text{sen}\,C$

$\Rightarrow \boxed{S = \frac{ab}{2}\text{sen}C}$

Análogamente:

$\boxed{S = \frac{bc}{2}\text{sen}A} \qquad \boxed{S = \frac{ac}{2}\text{sen}B}$

Área en términos del semiperímetro y los lados

Sea: p el semiperímetro

$\Rightarrow S = \frac{ab}{2}\text{sen}C = \frac{ab}{2}\left(2\text{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$

$S = ab\,\text{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = ab\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Área en términos de los lados y el circunradio (R)

Sabemos que: $\frac{c}{\text{sen}C} = 2R \Rightarrow \text{sen}C = \frac{c}{2R}$

$S = \frac{ab}{2}\text{sen}C = \frac{ab}{2}\left(\frac{c}{2R}\right) \Rightarrow \boxed{S = \frac{abc}{4R}}$

OTRAS RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO

Recordar que en todo triángulo ABC se cumple:

$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\text{sen}A + \text{sen}B - \text{sen}C = 4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Semiperímetro (p) de un triángulo en términos del circunradio (R) y los ángulos

Sabemos que: $2p = a + b + c$ ...(1)

De la ley de senos: $a = 2R\text{sen}A$, $b = 2R\text{sen}B$, $c = 2R\text{sen}C$

Reemplazando en (1): $2p = 2R(\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C)$

$$\Rightarrow \boxed{p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Inradio (r) en términos del circunradio (R) y los ángulos

Sabemos que el área(S) de un triángulo se puede expresar:

$S = pr$ ...(1) y $S = 2R^2\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C$ ...(2)

Igualando (1) y (2) se obtiene:

$pr = 2R^2\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C$; reemplazamos el valor de p:

$$\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) =$$

$$2R^2\left(2\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2R\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2R\text{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

Simplificando: $\boxed{r = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}$

Radios de las circunferencias exinscritas (exradios) en términos del semiperímetro y el ángulo respectivo

Sean r_a, r_b y r_c los exradios relativos a los lados a, b y c; respectivamente.

Observar que:

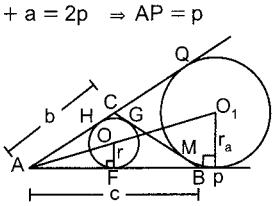
$BP = BM \quad MC = CQ \wedge AP = AQ$

$AP = c + BP = c + BM$

$AQ = b + CQ = b + MC$

$AP + \underbrace{AQ}_{AP} = b + c + \underbrace{BM + MC}_{a}$

$2AP = b + c + a = 2p \Rightarrow AP = p$



Entonces: $\triangle APO_1$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p} \Rightarrow \boxed{r_a = p\tan\frac{A}{2}}$$

En forma análoga se demuestra:

$$\boxed{r_b = p\tan\frac{B}{2}} \quad \boxed{r_c = p\tan\frac{C}{2}}$$

Radios de las circunferencias exinscritas (exradios) en términos del circunradio (R) y los ángulos

Sabemos que:

$p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \wedge r_a = p\tan\frac{A}{2}$ entonces:

$$r_a = 4R\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\text{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\boxed{r_a = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

En forma análoga se demuestra que:

$$\boxed{r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\boxed{r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}$$

Inradio (r) en términos de los lados y alguno de los ángulos

Observar en la figura anterior que: $FB = BG$, $HC = CG$ y $AH = AF$

Además:

$$\left.\begin{array}{l} AF = c - FB \\ AH = b - HC \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} AF + AH = b + c - (FB + HC) \\ 2AF = b + c - \underbrace{(BG + GC)}_{a} \end{array}$$

$2AF = b + c - a \Rightarrow 2AF = a + b + c - 2a$

$2AF = 2p - 2a \Rightarrow AF = p - a$

Luego en el $\triangle AFO$ se observa que:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{AF} = \frac{r}{p-a} \Rightarrow \boxed{r = (p-a)\tan\frac{A}{2}}$$

En forma análoga se demuestra que:

$$\boxed{r = (p-c)\tan\frac{C}{2}} \quad \boxed{r = (p-b)\tan\frac{B}{2}}$$

Área de un triángulo en términos de alguno de los exradios y los lados

Sabemos que:

$S = pr$, $r_a = p\tan\frac{A}{2} \wedge r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow S = \frac{r_a}{\tan\frac{A}{2}}(p-a)\tan\frac{A}{2} \Rightarrow \boxed{S = (p-a)r_a}$$

En forma análoga se demuestra que:

$$\boxed{S = (p-b)r_b} \quad \boxed{S = (p-c)r_c}$$

Área de un triángulo en términos de los exradios y el inradio

Sabemos que:

$S = pr$; $S = (p-a)r_a$; $S = (p-b)r_b \wedge S = (p-c)r_c$

multiplicando estas cuatro igualdades miembro a miembro:

$$S^4 = \underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2} r r_a r_b r_c \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{r r_a r_b r_c}}$$

Área de un triángulo en términos del semiperímetro y los ángulos

Sabemos que:

$r = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2} \wedge P = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

dividiendo estas igualdades se obtiene:

$$\frac{r}{p} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

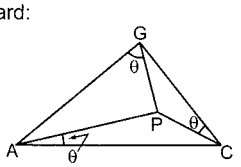
Como: $S = pr \Rightarrow \boxed{S = p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

Área de un triángulo en términos del inradio y los ángulos

Sabemos que: $p = r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \wedge S = pr$

Entonces: $\boxed{S = r^2 r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$

Punto de Brocard:



Se cumple: $\boxed{\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C}$

Aplicaciones:

1. Hallar el área de un triángulo cuyos lados miden 171 cm, 204 cm y 195 cm.

Resolución:

Sabemos que: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{171+204+195}{2} \Rightarrow p = 285$

Luego:

$S = \sqrt{285(285-171)(285-204)(285-195)}$

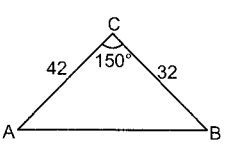
$S = \sqrt{285(114)(81)(90)}$

$S = \sqrt{57(5)(57)(2)(81)(9)(5)(2)}$

$S = 57(5)(9)(3)(2) \Rightarrow S = 15\,390\ cm^2$

2. Dos lados de un triángulo miden 42 cm y 32 cm, el ángulo que forman miden 150°. Calcular el área del triángulo.

Resolución:



$S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}C$

$S = \frac{1}{2}(42)(32)\text{sen}150°$

$S = \frac{1}{2}(42)(32)\left(\frac{1}{2}\right)$

$S = 336\ cm^2$

3. El área de un triángulo ABC es de $90\sqrt{3}$ y los senos de los ángulos A, B, C son proporcionales a los números 5,7,8 respectivamente. Hallar el perímetro del triángulo.

Resolución:

Datos:

$S = 90\sqrt{3}$, $\text{sen}A = 5n$, $\text{sen}B = 7n$ y $\text{sen}C = 8n$

Sabemos que:

$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$ ...(Ley de senos)

$\Rightarrow a = 5n \quad b = 7n \quad y \quad c = 8n \Rightarrow p = 10n$

$90\sqrt{3} = \sqrt{(10n)(10n-5n)(10n-7n)(10n-8n)}$

$90\sqrt{3} = \sqrt{(10n)(5n)(3n)(2n)}$

$\Rightarrow 90\sqrt{3} = 10n^2\sqrt{3} \Rightarrow n = 3$

Luego el perímetro es igual a 2p $\Rightarrow 2p = 2(10)(3)$

$\Rightarrow 2p = 60$

4. El diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC mide $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ cm y la media geométrica de sus lados es $2\sqrt[3]{91}$. Calcular el área del triángulo.

Resolución:

La media geométrica de a, b y c es: $\sqrt[3]{abc}$, del dato:

$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{91} \Rightarrow abc = 728$

El radio de la circunferencia circunscrita mide $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S = \frac{abc}{4R} = \frac{728}{4\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)} = 14\sqrt{3}\,cm^2$

5. Es un triángulo ABC se cumple que el radio de la circunferencia circunscrita es igual al triple del radio de la circunferencia inscrita. Hallar el valor de:

$$\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Resolución:

Dato: $R = 3r$; sea: $x = \frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$

Recordar: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow abc = 4RS$

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$S = pr$

Reemplazando:

$$x = \frac{4RS}{\frac{S^2}{p}} = \frac{4Rp}{S} = \frac{4Rp}{pr} = \frac{4R}{r} = \frac{4(3r)}{r}$$

$x = 12$

6. En qué tipo de triángulo se cumple: $2r_br_c = bc$

Resolución:

Sabemos que:

$r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad b = 2R\text{sen}B$

$r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2} \qquad c = 2R\text{sen}C$

entonces:

$$2\left(4r\cos\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}\right) = (2R\text{sen}B)(2R\text{sen}C)$$

Simplificando y aplicando la fórmula para el seno del ángulo doble:

$$32\left(\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\frac{\text{sen}B}{2}\right)\left(\frac{\text{sen}C}{2}\right) = 4\text{sen}B\text{sen}C$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{A}{2} = 45° \Rightarrow A = 90°$$

ABC es un triángulo rectángulo

7. Demostrar que en todo triángulo ABC se cumple:

- $a = r_a\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$
- $r_a = r\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

Demostración:

- $r_a = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

entonces:

$$r_a = \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\overbrace{\frac{\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}^{\cos\frac{A}{2}}\right)$$

$$r_a = \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} =$$

$$2R\left(2\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right) = 2R\text{sen}A = a$$

$$r_a\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) = a$$

- $r_a = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$r_a = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\left(\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}\right)\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$$

$$r_a = \left(\underbrace{4R\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}_{r}\right)\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$r_a = r\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Nota

- En forma análoga se puede demostrar que en todo triángulo ABC se cumple:

$b = r_b\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$ $\quad r_b = r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$

$c = r_c\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)$ $\quad r_c = r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$

- De las igualdades anteriores se comprueba que:

$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$ $\quad b = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$

$c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$

8. Demostrar que en todo triángulo ABC se cumple:

$$\frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b} = \frac{c}{r_c}$$

Demostración:

Sabemos: $S = (p - a)r_a$; $S = pr$

Sea: $F = \frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b}$

$$F = \frac{\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}}{a} + \frac{\frac{S}{p-b} - \frac{S}{p}}{b} =$$

$$\frac{pS - pS + aS}{p(p-a)a} + \frac{pS - pS + bS}{p(p-b)b}$$

$$F = \frac{aS}{p(p-a)a} + \frac{bS}{p(p-b)b} = \frac{S}{p(p-a)} + \frac{S}{p(p-b)}$$

$$F = \frac{S}{P}\left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}\right] = \frac{S}{P}\left[\frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)}\right]$$

$$F = \frac{S}{P}\left[\frac{c}{(p-a)(p-b)}\right]$$

$$F = \frac{Sc}{p(p-a)(p-b)}\frac{(p-c)}{(p-c)} = \frac{Sc(p-c)}{S^2}$$

$$F = \frac{c(p-c)}{(p-c)r_c} = \frac{c}{r_c} \Rightarrow \frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b} = \frac{c}{r_c}$$

9. Hallar: r_a, r_b y r_c, sabiendo que los lados del triángulo miden: a = 17 cm, b = 10 cm y c = 21 cm.

Resolución:

Sabemos que: $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $\quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}}$

Del dato: $p = \frac{17 + 10 + 21}{2} = 24$

$\Rightarrow P = \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(24-10)(24-21)}{24(24-17)}} \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$

Análogamente: $\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad \tan\frac{C}{2} = \frac{7}{6}$

Además: $r_a = \frac{a}{\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}} = \frac{17}{\frac{1}{4} + \frac{7}{6}} \Rightarrow r_a = 12$ cm

10. Si el área de un triángulo es de 96 y los radios de las circunferencias ex-inscritas r_a, r_b y r_c miden 8, 12 y 24 respectivamente, hallar los lados del triángulo.

Resolución:

Dato: $S = 96$, $r_a = 8$, $r_b = 12$ y $r_c = 24$

$S = (p - a)r_a \Rightarrow 96 = (p - a)(8) \Rightarrow p - a = 12$...(1)

$S = (p - b)r_b \Rightarrow 96 = (p - b)(12) \Rightarrow p - b = 8$...(2)

$S = (p - c)r_c \Rightarrow 96 = (p - c)(24) \Rightarrow p - c = 4$ ...(3)

Sumando (1) + (2) + (3):

$3p - (a + b + c) = 24 \Rightarrow 3p - 2p = 24 \Rightarrow p = 24$

Reemplazando:

$a = p - 12 \Rightarrow a = 12$, $b = p - 8 \Rightarrow b = 16$,

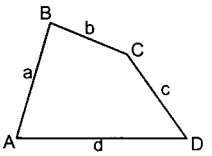
$c = p - 4 \Rightarrow c = 20$

Los lados del triángulo miden: 12, 16 y 20.

CUADRILÁTEROS

Área de un cuadrilátero convexo en términos de sus lados y ángulos opuestos

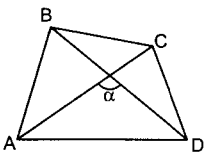
Sea S el área del cuadrilátero y p su semiperímetro $\left(p = \frac{a+b+c+d}{2}\right)$ entonces:



$$\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\theta}} \quad ...(1)$$

θ es igual a la semisuma de dos de sus ángulos opuestos.

Área de un cuadrilátero convexo en términos de sus diagonales y el ángulo comprendido entre estas



Sea: $AC = d_1$ y $BD = d_2$ entonces:

$$\boxed{S = \frac{d_1 d_2}{2}\operatorname{sen}\alpha} \quad ...(2)$$

Área de un cuadrilátero inscriptible (cuadrilátero cíclico)

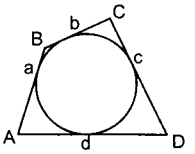
Si un cuadrilátero es inscriptible; entonces la suma de dos de sus ángulos opuestos es 180°.

Por lo tanto al reemplazar en la fórmula (1) se tiene que: $\theta = 90°$. Además: $\cos 90° = 0$, entonces se obtiene:

$$\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} \quad ...(3)$$

Área de un cuadrilátero circunscriptible

Si un cuadrilátero es circunscriptible se cumple: $a + c = b + d$ (teorema de Pitot) entonces el semiperímetro (p) se puede expresar como:



$p = a + c$ o $p = b + d$

De estas igualdades se deduce que:

$p - a = c$, $p - c = a$,

$p - b = d$, $p - d = d$

Reemplazando en la fórmula (1) se obtiene:

$$S = \sqrt{abcd - abcd\cos^2\theta} \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{abcd}\operatorname{sen}\theta} \quad ...(4)$$

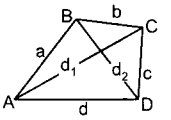
No olvidar que θ es la semisuma de dos de sus ángulos opuestos.

Área de un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible

Si un cuadrilátero es circunscriptible ya sabemos que la semisuma de sus ángulos opuestos es igual a 90° y como a la vez es inscriptible aplicamos la fórmula (2) y obtenemos:

$$\boxed{S = \sqrt{abcd}}$$

Relaciones entre las diagonales y lados de un cuadrilátero



Sea 2θ la suma de dos de sus ángulos opuestos, entonces se cumple: $(d_1d_2)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cos 2\theta$

Observar que si el cuadrilátero es inscriptible, entonces $2\theta = 180°$, reemplazando en la fórmula anterior se obtiene:

$$\boxed{d_1d_2 = ac + bd}$$

Observar que si en el cuadrilátero la suma de sus ángulos opuestos es igual a 90°, entonces:

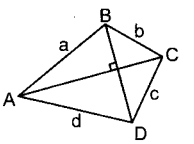
$$\boxed{(d_1d_2)^2 = (ac)^2 + (bd)^2}$$

También se cumple en todo cuadrilátero inscriptible que:

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{ad + bc}{ab + cd}}$$

En todo cuadrilátero cuyas diagonales se intersectan formando un ángulo de 90° se cumple que:

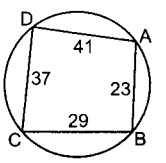
$$\boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$$



Aplicaciones:

1. Los lados de un cuadrilátero inscriptible miden 23 cm, 29 cm, 37 cm y 41 cm. Calcular su área.

   Resolución:



   Sea: $a = 23$, $b = 29$, $c = 37$ y $d = 41$,

   entonces: $p = \dfrac{23 + 29 + 37 + 41}{2} \Rightarrow p = 65$

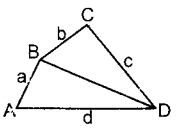
   Luego: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

   $S = \sqrt{(65-23)(65-29)(65-37)(65-41)}$

   $S = \sqrt{(42)(36)(28)(24)} \Rightarrow S = 1008\ cm^2$

2. Si en un cuadrilátero inscriptible ABCD se cumple: $a - c = b - d$. Calcular $\tan\dfrac{A}{2}$

   Resolución:



Como ABCD es un cuadrilátero inscriptible:

$\Rightarrow C = 180° - A$

Ley de cosenos: $\triangle BAD$

$BD^2 = a^2 + d^2 - 2adcosA$ ...(1)

Ley de cosenos: $\triangle BCD$

$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bccosC = b^2 + c^2 - 2bccos(180° - A)$

$BD^2 = b^2 + c^2 + 2bccosA$ ...(2)

De (1) y (2): $a^2 + d^2 - 2adcosA = b^2 + c^2 + 2bccosA$

$a^2 + d^2 + b^2 - c^2 = 2(ad + bc)cosA$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ ...(3)

Dato:

$a - c = b - d \Rightarrow a + d = b + c \Rightarrow (a + d)^2 = (b + c)^2$

$a^2 + d^2 + 2ad = b^2 + c^2 + 2bc$

$\Rightarrow a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(bc - ad)$

Reemplazando en (3):

$\cos A = \dfrac{2(bc - ad)}{2(bc + ad)} \Rightarrow \cos A = \dfrac{bc - ad}{bc + ad}$

Sabemos: $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$

entonces:

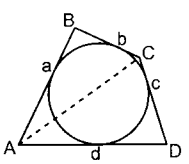
$\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{bc - ad}{bc + ad}\right)}{1 + \left(\dfrac{bc - ad}{bc + ad}\right)} \Rightarrow \tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{ad}{bc}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{ad}{bc}}$

3. Demostrar que en todo cuadrilátero circunscriptible ABCD se cumple: $\sqrt{ab}\,\text{sen}\left(\dfrac{B}{2}\right) = \sqrt{cd}\,\text{sen}\left(\dfrac{D}{2}\right)$

Resolución:

Como ABCD es circunscriptible: $a + c = b + d$ (Teorema de Pilot) Luego:



$a - b = d - c \Rightarrow (a - b)^2 = (d - c)^2$

$a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd$ ...(1)

Ley de cosenos en los triángulos ABC y ACD

$\triangle ABC$: $(AC)^2 = a^2 + b^2 - 2abcosB$;

$\triangle ACD$: $(AC)^2 = c^2 + d^2 - 2cdcosD$

Luego: $a^2 + b^2 - 2abcosB = c^2 + d^2 - 2cdcosD$

De (1): $a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd$

Restando: $-2abcosB + 2ab = -2cdcosD + 2cd$

$ab(1 - cosB) = cd(1 - cosD)$

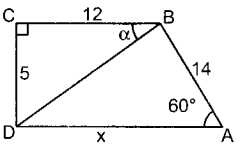
$\Rightarrow ab\left(2\text{sen}^2\dfrac{B}{2}\right) = cd\left(2\text{sen}^2\dfrac{D}{2}\right)$

$\therefore \sqrt{ab}\,\text{sen}\dfrac{B}{2} = \sqrt{cd}\,\text{sen}\dfrac{D}{2}$

4. En un cuadrilátero ABCD se sabe que: AB = 14, BC = 12, CD = 5, A = 60° y C = 90°. Hallar AD.

Resolución:

Como BCD es un triángulo rectángulo:



$(BD)^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow BD = 13$

ABD: Ley de cosenos

$(13)^2 = (14)^2 + x^2 - 2(14)(x)cos60°$

$169 = 196 + x^2 - 14x \Rightarrow x^2 - 14x + 27 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4(27)}}{2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{88}}{2}$

$x = 7 \pm \sqrt{22}$

Sólo aceptamos una solución: $x = AD = 7 + \sqrt{22}$

5. Las diagonales de un paralelogramo son 2m y 2n y un ángulo es θ. Hallar el área del paralelogramo (S).

Resolución:

Recordar que el área del paralelogramo es

$S = absen\theta$ ...(1)

Aplicamos la ley de cosenos:

$\triangle BAD$: $4n^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta$

$\triangle ADC$: $4m^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(180° - \theta)$

Restando:

$4n^2 - 4m^2 = 2abcxos\theta - 2abcos\theta$

$4(n^2 - m^2) = -4abcos\theta$

$\Rightarrow ab = \dfrac{m^2 - n^2}{\cos\theta}$

Reemplazando en (1):

$S = \left(\dfrac{m^2 - n^2}{\cos\theta}\right)\text{sen}\theta \Rightarrow S = (m^2 - n^2)\tan\theta$

6. Si: ABCD es un cuadrilátero circunscriptible de área (S), demostrar:

$S = absen\dfrac{B}{2}csc\dfrac{D}{2}\text{sen}\left(\dfrac{B + D}{2}\right)$

Resolución:

Sabemos que: $S = \sqrt{abcd}\,\text{sen}\left(\dfrac{B + D}{2}\right)$...(1)

Del ejemplo 3:

$\sqrt{ab}\,\text{sen}\dfrac{B}{2} = \sqrt{cd}\,\text{sen}\dfrac{D}{2} \Rightarrow \sqrt{cd} = \dfrac{\sqrt{ab}\,\text{sen}\dfrac{B}{2}}{\text{sen}\dfrac{D}{2}}$

Reemplazando en (1):

$S = \sqrt{ab}\sqrt{ab}\dfrac{\text{sen}\dfrac{B}{2}}{\text{sen}\dfrac{D}{2}}\text{sen}\left(\dfrac{B + D}{2}\right)$

$S = absen\dfrac{B}{2}csc\dfrac{D}{2}\text{sen}\left(\dfrac{B + D}{2}\right)$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un triángulo ABC (AB = c, AC = b, BC = a), el ángulo C mide 60° y los lados:
$a = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ y $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$
Hallar la medida del ángulo A.

Resolución:

Conocemos que: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$

Al reemplazar:

$$\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\tan 60°}{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)} \Rightarrow \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{A-B}{2}\right) = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A - B = 2\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ...(1)$$

$$A + B = \frac{2\pi}{3} \qquad ...(2)$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3} + \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. En un triángulo ABC(AB = c, AC = b, BC = a), simplificar:
$P = a(b^2 + c^2)\cos A + b(a^2 + c^2)\cos B + c(a^2 + b^2)\cos C$

Resolución:

$$P = ab^2\cos A + ac^2\cos A + ba^2\cos B + bc^2\cos B + ca^2\cos C + cb^2\cos C$$

$$P = ab\underbrace{(b\cos A + a\cos B)}_{c} + ac\underbrace{(c\cos A + a\cos C)}_{b} + bc\underbrace{(c\cos B + b\cos C)}_{a}$$

$$\therefore P = 3abc$$

3. En un triángulo ABC, si: BC = a, AC = b y AB = c, simplificar: $S = \left(\dfrac{a - c\cos B}{c - a\cos B}\right)\sec C$.

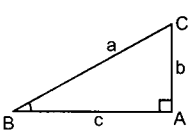
Resolución:

$$S = \left(\frac{\overset{\overset{c\cos B + b\cos C}{\downarrow}}{a - c\cos B}}{\underset{\underset{b\cos A + a\cos B}{\uparrow}}{c - a\cos B}}\right)\sec C = \left(\frac{b\cos C}{b\cos A}\right)\sec C$$

$$\therefore S = \frac{1}{\cos A} = \sec A$$

4. En un triángulo ABC recto en A, además: BC = a; AC = b; AB = c, simplificar:
$T = (a+b)^2 - 2bc\left[\cot\left(\dfrac{C}{2}\right)\right]$

Resolución:



Se pide:

$$T = (a+b)^2 - 2bc(\csc C + \cot C)$$

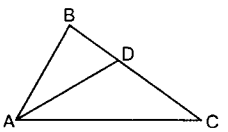
$$T = (a+b)^2 - 2bc\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$$

$$T = (a+b)^2 - 2bc\left(\frac{a+b}{c}\right)$$

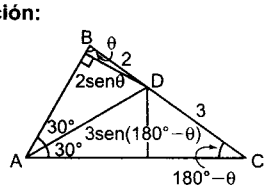
$$T = (a^2 + b^2 + 2ab) - (2ab + 2b^2)$$

$$T = a^2 - b^2 \qquad \therefore T = c^2$$

5. En la figura mostrada: AD es bisectriz, si m∠DAC = 30° y BD = 2 y DC = 3, determinar: m∠ABC.



Resolución:



$$2\text{sen}\theta = \underbrace{3\text{sen}(120 - \theta)}_{\text{sen}(60° + \theta)}$$

$$2\text{sen}\theta = 3(\text{sen}60\cos\theta + \cos 60\text{sen}\theta)$$

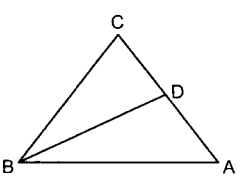
$$2\text{sen}\theta = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\text{sen}\theta\right)$$

$$2\text{sen}\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\text{sen}\theta$$

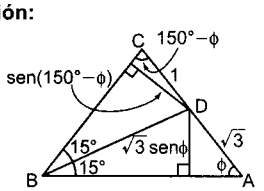
$$\frac{1}{2}\text{sen}\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \theta = \arctan 3\sqrt{3}$$

6. En la figura mostrada m∠ABC = 30°, m∠BAC = ϕ, BD es bisectriz; AD = $\sqrt{3}$ DC, halle la medida del ángulo ϕ.



Resolución:



$$\sqrt{3}\,\text{sen}\phi = \underbrace{\text{sen}(150° - \phi)}_{\text{sen}(30° + \phi)}$$

$\sqrt{3}\,\text{sen}\phi = \text{sen}30°\cos\phi + \cos30°\text{sen}\phi$

$\sqrt{3}\,\text{sen}\phi = \frac{1}{2}\cos\phi + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\phi$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\phi = \frac{1}{2}\cos\phi \Rightarrow \tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \phi = 30°$

7. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, simplificar: $N = \dfrac{\cos 2A - \cos 2C}{1 - \cos 2B}$

Resolución:

Condición: $C = 90° \Rightarrow A + B = 90°$

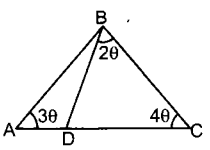
Como: $2A + 2B = 180°$

$\Rightarrow \cos2A = -\cos2B$

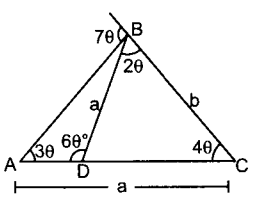
$N = \dfrac{\cos 2A - \cos 180°}{1 - (-\cos 2A)}$

$N = \dfrac{\cos 2A + 1}{1 + \cos 2A} \qquad \therefore\ N = 1$

8. De la figura mostrada: calcular m∠ABD sabiendo que AC = BD.



Resolución:



$\triangle ABC$: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{sen}(180° - 7\theta)}{\text{sen}3\theta} = \dfrac{\text{sen}7\theta}{\text{sen}3\theta}$

$\triangle BCD$: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{sen}4\theta}{\text{sen}(180° - 6\theta)} = \dfrac{\text{sen}4\theta}{\text{sen}6\theta}$

$\dfrac{\text{sen}7\theta}{\text{sen}3\theta} = \dfrac{\text{sen}4\theta}{\text{sen}6\theta}$

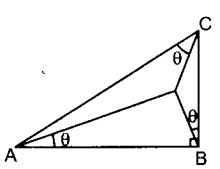
$\text{sen}7\theta\text{sen}6\theta = \text{sen}3\theta\text{sen}4\theta$

$\dfrac{\cos\theta - \cos 13\theta}{2} = \dfrac{\cos\theta - \cos 7\theta}{2}$

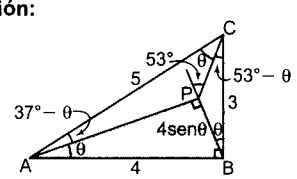
$\Rightarrow \cos 13\theta = \cos 7\theta \qquad 20\theta = 360°$

$\therefore\ \theta = 18°$

9. En la figura mostrada: AB = 4, BC = 3 y AC = 5. Calcular tanθ.



Resolución:



$\triangle BCP$: (ley de senos)

$\dfrac{4\text{sen}\theta}{\text{sen}(53° - \theta)} = \dfrac{3}{\text{sen}127°}$

$\dfrac{4\text{sen}\theta}{\text{sen}(53° - \theta)} = \dfrac{3}{\text{sen}53°}$

$4\text{sen}\theta\text{sen}53° = 3\text{sen}(53° - \theta)$

$\Rightarrow 4\text{sen}\theta\left(\frac{4}{5}\right) = 3\left(\frac{4}{5}\cos\theta - \frac{3}{5}\text{sen}\theta\right)$

$\Rightarrow 16\text{sen}\theta = 12\cos\theta - 9\text{sen}\theta$

$\Rightarrow 25\text{sen}\theta = 12\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{12}{25}$

10. En un triángulo ABC, si: AB = c, BC = a, AC = b (R; circunradio) además:

$\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3}$

determinar a qué es igual: senAsenBsenC.

Resolución:

Condición:

$\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3}$

$\dfrac{\overbrace{b\cos A + a\cos B}^{c}}{ab} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3}$

$\dfrac{c^2 + ab\cos C}{abc} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3}$

$\dfrac{2c^2 + 2ab\cos C}{2abc} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3}$

Pero: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\Rightarrow 2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$

Luego: $\dfrac{2c^2 + (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3}$

$R^3 = 2abc$

$R^3 = 2(2R\text{sen}A)(2R\text{sen}B)(2R\text{sen}C)$

$R^3 = 16R^3\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C$

$\therefore\ \text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C = \frac{1}{16}$

11. En un triángulo ABC se cumple que: $\dfrac{\cot B}{\cot A} = \dfrac{2c - b}{b}$

Calcular la medida del ángulo BAC:

Resolución:

$\dfrac{\cot B}{\cot A} = \dfrac{2c - b}{b}; \Rightarrow \dfrac{\tan A}{\tan B} = \dfrac{2c}{b} - 1$

$\dfrac{\overbrace{\text{sen}A\cos B + \text{sen}B\cos A}^{\text{sen}(A+B)}}{\text{sen}B\cos A} = 2\left(\dfrac{\text{sen}C}{\text{sen}B}\right)$

$\dfrac{\text{sen}C}{\text{sen}B\cos A} = \dfrac{2\text{sen}C}{\text{sen}B}$

$\cos A = 1/2 \qquad \therefore\ A = 60°$

12. En un triángulo ABC, simplificar:
$T = (a+b)^2(1-\cos C) + (a-b)^2(1+\cos C)$

Resolución:

$$T = \underbrace{(a+b)^2 + (a-b)^2}_{2(a^2+b^2)} - \cos C\underbrace{[(a+b)^2 - (a-b)^2]}_{4ab}$$

$T = 2(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) \Rightarrow 2$

$\therefore\ T = 2c^2$

13. En un triángulo ABC (BC = a, AC = b, AB = c), recto en B, determinar:

$$S = \frac{\text{sen}3A}{a} + \frac{\text{sen}3B}{b} + \frac{\text{sen}3C}{c}$$

Resolución:

Por ley de senos:
$a = 2R\text{sen}A \qquad b = 2R\text{sen}B \qquad c = 2R\text{sen}C$
reemplazamos:

$$S = \frac{\text{sen}3A}{2R\text{sen}A} + \frac{\text{sen}3B}{2R\text{sen}B} + \frac{\text{sen}3C}{2R\text{sen}C}$$

$$S = \frac{1}{2R}\left(\frac{\text{sen}3A}{\text{sen}A} + \frac{\text{sen}3B}{\text{sen}B} + \frac{\text{sen}3C}{\text{sen}C}\right)$$

Conocemos que

$$\frac{\text{sen}3\theta}{\text{sen}\theta} = 2\cos 2\theta + 1$$

$$S = \frac{1}{2R}(2\cos 2A + 2\cos 2B + 2\cos 2C + 3)$$

Por condición:
$B = 90° \quad \Rightarrow \quad \cos 2B = -1$
$A + C = 9\theta° \quad \Rightarrow \quad \cos 2A = -\cos 2C$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2R}$$

Ahora como el $\triangle$ es rectángulo: $b = 2R$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{b}$$

14. En un triángulo ABC (BC = a, AC = b, AB = c); r_a, r_b y r_c representa a las longitudes de los exradios relativos a los lados a, b y c respectivamente, calcular T.

$$T = \frac{r_a(r_b + r_c)\csc(A)}{r_b(r_a + r_c)}$$

Resolución:

$$T = \frac{r_a(r_b + r_c)\csc(A)}{r_b(r_a + r_c)}$$

Conocemos que:

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} \qquad r_b = p\tan\frac{B}{2} \qquad r_c = p\tan\frac{C}{2}$$

reemplazamos y simplificamos:

$$T = \frac{\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)}{\tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)}\csc A$$

$$T = \frac{\dfrac{\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}{\dfrac{\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}}\csc A$$

Como: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$

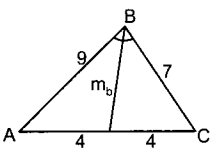
$$\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \ \wedge\ \text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\csc A$$

$$\frac{\frac{1}{2}\text{sen}A}{\frac{1}{2}\text{sen}B}\csc A \Rightarrow T = \frac{1}{\text{sen}B} \qquad \therefore\ T = \csc B$$

15. En un triángulo ABC, BC = 7 cm, AC = 8 cm y AB = 9 cm, hallar la longitud (en cm) del segmento que une B con el punto medio de AC.

Resolución:



Por ley de cosenos:
$8^2 = 9^2 + 7^2 - 2(9)(7)\cos B$ ...(1)
Por cálculo de la mediana
$4m_b^2 = 9^2 + 7^2 + 2(9)(7)\cos B$ ...(2)
Sumamos (1) $\wedge$ (2)
$4m_b^2 + 8^2 = 2(9^2 + 7^2) \Rightarrow m_b = 7$ cm

16. En un triángulo ABC (AB = c, AC = b, BC = a) se cumple que: $b^2 + c^2 = a^2 - \frac{3}{2}bc$

determinar el valor de: $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$

Resolución:

Condición $b^2 + c^2 = a^2 - \frac{3bc}{2}$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = (b^2 + c^2 - 2bc\cos A) - \frac{3bc}{2}$$

$$-\frac{3bc}{2} = 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{3}{4}$$

Conocemos que:

$$\tan^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{A}{2} = 7 \quad \therefore\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{7}$$

17. En un triángulo ABC (AB = c, AC = b, BC = a) su perímetro es 14 m. La suma de los productos de los lados tomados de dos en dos es 63 m^2 y el producto de los tres lados es 90 m^3.

Calcular el valor de: $T = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$

Resolución:

Condiciones:
$a + b + c = 14$
$ab + bc + ca = 63;\ abc = 90$
$abc = 5(6)(3) \Rightarrow a = 5;\ b = 6;\ c = 3$
Estos valores tambien verifican las condiciones anteriores. Se pide:

$$T = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$$

$$T = \frac{b\cos A + a\cos B}{ab} + \frac{\cos C}{c}$$

$$T = \frac{c}{ab} + \frac{\cos C}{c} = \frac{c^2 + ab\cos C}{abc}$$

$$T = \frac{2c^2 + 2ab\cos C}{2abc}$$

Como: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$

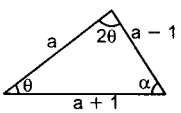
$$\Rightarrow T = \frac{2c^2 + (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

Sustituimos los valores de a, b y c.

$$T = \frac{5^2 + 6^2 + 3^2}{2(5)(6)(3)} \quad \therefore\ T = \frac{7}{18}$$

18. Las medidas de los lados de un triángulo son tres números consecutivos y el ángulo mayor es doble del menor. Hallar el coseno del ángulo de medida intermedia.

Resolución:



Por ley de senos:

$$\frac{a-1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{a+1}{\underbrace{\operatorname{sen}2\theta}_{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{a+1}{2(a-1)}$$

Por ley de cosenos

$(a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2 - 2a(a+1)\cos\theta$

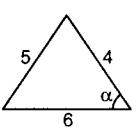
$2a(a+1)\cos\theta = (a+1)^2 - (a-1)^2 + a^2$

$$2a(a+1)\frac{(a+1)}{2(a-1)} = 4a + a^2$$

$$\frac{a(a+1)^2}{a-1} = a(4+a) \Rightarrow (a+1)^2 = (a+4)(a-1)$$

$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 3a - 4 \quad \Rightarrow a = 5$

luego el gráfico será:



$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2(4)(6)}$$

$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{9}{16}$$

19. En un triángulo ABC, si: BC = a, AB = c y AC = b reducir: $S = \dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{2R\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$

Resolución:

$$S = \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{2R\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

$$S = \frac{2R\operatorname{sen}A\cos A + 2R\operatorname{sen}B\cos B + 2R\operatorname{sen}C\cos}{2R\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

$$S = \frac{R(\operatorname{sen}2A + \operatorname{sen}2B + \operatorname{sen}2C)}{2R\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

$$S = \frac{4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} \quad \therefore\ S = 2$$

20. En un triángulo ABC de semiperímetro p cuya área de la región triangular es S, simplificar:

$$T = p^2\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

Resolución:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$s = \frac{abc}{4R} = 2R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

Ahora en T:

$$T = \left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

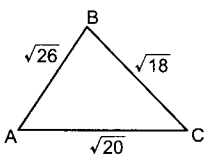
$$T = 16R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

$$T = 16R^2\left(\frac{\operatorname{sen}A}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}B}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}C}{2}\right)$$

$$T = 2R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \quad \therefore\ T = S_\triangle$$

21. Las longitudes de los lados de un triángulo miden: $\sqrt{26}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{18}$; calcular el área de la región triangular.

Resolución:



Conocemos que:

$$S_\triangle = \frac{\sqrt{26}\times\sqrt{20}}{2}\operatorname{sen}\theta \qquad ...(1)$$

Cálculo del cosθ:

$$\sqrt{18}^2 = \sqrt{26}^2 + \sqrt{20}^2 - 2\sqrt{26}\sqrt{20}\cos\theta$$

$$2\sqrt{26}\sqrt{20}\cos\theta = 28$$

$$2(2\sqrt{130})\cos\theta = 28 \Rightarrow \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

Ahora: $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{49}{130}}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

Reemplazamos en (1):

$$S_\triangle = \frac{\sqrt{26}(2\sqrt{5})}{2}\left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right) = 9$$

22. En un triángulo ABC(BC = a, AC = b, AB= c) , si $(2-\sqrt{2})bc = 4S\tan\frac{A}{2}$ y S es el área de la región triangular ABC, hallar: m∠BAC

Resolución:

Condición: $(2-\sqrt{2})bc = 4S\tan\frac{A}{2}$

Conocemos que: $S_\triangle = \frac{bc}{2}\operatorname{sen}A$

Reemplazamos:

$$(2-\sqrt{2})bc = 4\left(\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A\right)\tan\frac{A}{2}$$

$$(2-\sqrt{2}) = 2\left(2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\sqrt{\ }: \sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

Luego:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{8} \quad \therefore\ A = \frac{\pi}{4}$$

23. En un triángulo ABC (BC = a, AC = b, AB = c), si: $K = \dfrac{abc}{a+b+c}$

Hallar K en función del circunradio (R) y del inradio (r).

Resolución:

$$K = \frac{abc}{a+b+c}$$

$$S_\triangle = \frac{abc}{4R} \wedge S_\triangle = pr$$

$$\frac{abc}{4R} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r \Rightarrow \frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$$

24. Si el área de la región triangular ABC es S, expresar $T = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cot C}$ en función de S.

Resolución:

$$T = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cot C}$$

Conocemos que:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$ (ley de cosenos)

$2abcosC = a^2 + b^2 - c^2$

Luego en T:

$$T = \frac{2ab\cos C}{2\dfrac{\cos C}{\operatorname{sen}C}} = ab\operatorname{sen}C$$

$$T = 2\left(\frac{ab}{2}\operatorname{sen}C\right) \quad \therefore\ T = 2S_\triangle$$

25. En un triángulo ABC, donde:

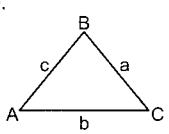
BC = a, AC = b y AB = c; el área de la región triangular ABC es S. Simplificar P en función de S.

$P = a^2b^2c^2\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(C)$

Resolución:

$P = (abc)^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$

Conocemos que:



$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{bc}{2}\operatorname{sen}A \\ S &= \frac{ac}{2}\operatorname{sen}B \\ S &= \frac{ba}{2}\operatorname{sen}C \end{aligned}\right\} S^3 = \frac{(abc)^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{8}$$

$\Rightarrow 8S^3 = (abc)^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C = P$

$\therefore\ P = 8S^3$

26. En un triángulo ABC, donde:

BC = a, AC = b, AB = c; 2p = a + b + c si:

$4(p-a)(p-b) = 3ab$, determinar: $\tan\left(\frac{c}{2}\right)$

Resolución:

$4(p-a)(p-b) = 3ab$

Conocemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\Rightarrow \frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \left(\frac{C}{2}\right) = 60°$$

Luego: $\tan\frac{C}{2} = \tan 60° = \sqrt{3}$

27. En un triángulo ABC; r_a, r_b y r_c son los exradios relativos a los lados BC, AC y AB respectivamente. Si: $r_a = r_b + r_c + r$, determinar de qué triángulo se trata.

Resolución:

$r_a = r_b + r_c + r$ ...(1)

Conocemos que

$r_a = p\tan\frac{A}{2}$ $\quad r_b = p\tan\frac{B}{2}$ $\quad r_c = p\tan\frac{C}{2}$

Tambien

$$S_\triangle = p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = pr$$

$$\Rightarrow r = p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

Reemplazamos en (1):

$$p\tan\frac{A}{2} = p\tan\frac{B}{2} + p\tan\frac{C}{2} + p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\left(1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right) = \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}}{1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

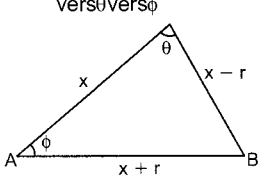
luego: $\frac{A}{2} = \frac{B+C}{2} \Rightarrow A = B + C$

Como: $A + B + C = 180° \Rightarrow A = 90°$

$\therefore$ $\triangle$ABC: rectángulo

28. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética, si θ y ϕ son su mayor y menor ángulo respectivamente.

calcular: $M = \dfrac{\cos\theta + \cos\phi}{\operatorname{vers}\theta\operatorname{vers}\phi}$



Resolución:

$$\cos\theta = \frac{(x)^2 + (x-r)^2 - (x+r)^2}{2x(x-r)} = \frac{x-4r}{2(x-r)}$$

$$\cos\phi = \frac{(x)^2 + (x+r)^2 - (x-r)^2}{2x(x+r)} = \frac{x+4r}{2(x+r)}$$

$$M = \frac{\dfrac{x-4r}{2(x-r)} + \dfrac{x+4r}{2(x+r)}}{\left[1 - \dfrac{x-4r}{2(x-r)}\right]\left[1 - \dfrac{x+4r}{2(x+r)}\right]} = \frac{\dfrac{2x^2-8r^2}{2(x-r)(x+r)}}{\dfrac{(x+2r)(x-2r)}{4(x-r)(x+r)}}$$

$$M = \frac{\dfrac{2(x^2-4r^2)}{2(x^2-r^2)}}{\dfrac{(x^2-4r^2)}{4(x^2-r^2)}} \Rightarrow \text{simplificando: } M = 4$$

29. En qué tipo de triángulo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2 \wedge \text{senAsenB} = \text{sen}^2C$$

(NOTA: a, b y c son los lados del triángulo y A, B, y C son los ángulos opuestos a dichos lados respectivamente).

Resolución:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2$$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a+b) + c^3 + a^3 - b^3 = c^2(a+b)$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = c^2(a+b)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab = c^2$ ...(1)

De la ley de cosenos sabemos que:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$ ...(2)

Igualando (1) = (2)

$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2abcosC$

Simplificando se obtiene: $\cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60°$

Sabemos que:

$\text{senA} = \frac{a}{2R}$, $\text{senB} = \frac{b}{2R}$, $\text{senC} = \frac{c}{2R}$

Como:

$\text{senAsenB} = \text{sen}^2C \Rightarrow \frac{ab}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow c^2 = ab$

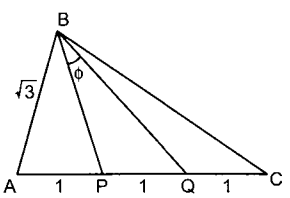
Reemplazando en (1):

$a^2 + b^2 - ab = ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$

Por lo tanto, el triángulo es equilatero.

30. En la figura adjunta se tiene un triángulo rectángulo ABC (B = 90°). Calcular cosϕ.



Resolución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$\triangle$ABC: $BC = \sqrt{6} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\cos C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Aplicamos Ley de cosenos:

$\triangle$APB: $(PB)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 - 2(\sqrt{3})(1)\cos A$

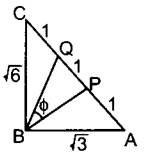
$\Rightarrow PB = \sqrt{2}$

$\triangle$BQC: $(BQ)^2 = (\sqrt{6})^2 + (1)^2 - 2(\sqrt{6})(1)\cos C$

$\Rightarrow BQ = \sqrt{3}$

$$\triangle PBQ: \cos\phi = \frac{(PB)^2 + (BQ)^2 - (PQ)^2}{2(PB)(BQ)}$$

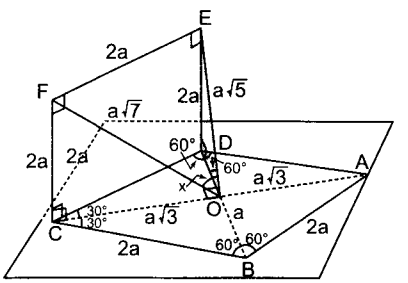
$$\cos\phi = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}^2) - (1)^2}{2(\sqrt{2})(\sqrt{3})} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



$\therefore \cos\phi = \frac{\sqrt{6}}{3}$

31. Se tiene un rombo ABCD, formado por dos triángulos equiláteros. Se construye el cuadrado CDEF perpendicular al plano del rombo. Halle la medida del ángulo EOF siendo O el punto de intersección de las diagonales del rombo y $\overline{BD}$ la menor de ellas.

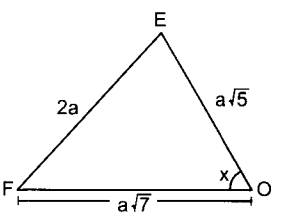
Resolución:



$\triangle$EDO: $EO = a\sqrt{5}$

$\triangle$FCO: $FO = a\sqrt{7}$

$\triangle$FOE



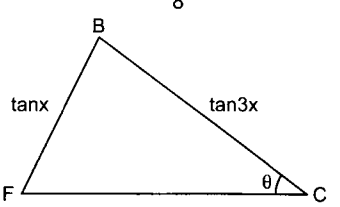
Por ley de cosenos:

$(2a)^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{7})^2 - 2(a\sqrt{5})(a\sqrt{7})\cos x$

$\Rightarrow \cos x = \frac{4}{\sqrt{35}}$

$\therefore x = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{35}}\right)$

32. Sabiendo que $\cos 2x = \frac{k}{8}$, del gráfico adjunto:



Hallar: senαcscθ

Resolución:

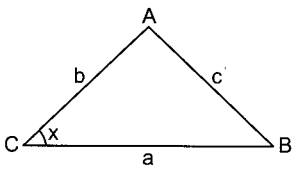
Dato: $\cos 2x = \frac{k}{8}$

Por ley de senos: $\frac{\tan x}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\tan 3x}{\operatorname{sen}\alpha}$

$\Rightarrow \frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}$

$\Rightarrow \frac{2\left(\frac{k}{8}\right) + 1}{2\left(\frac{k}{8}\right) - 1} = \operatorname{sen}\alpha\csc\theta \quad \therefore \operatorname{sen}\alpha\csc\theta = \frac{k+4}{k-4}$

33. En la figura $a^2 + b^2 - c^2 - ab = 0$. Hallar el valor del ángulo agudo x.



Resolución:

De dato: $a^2 + b^2 - c^2 - ab = 0$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab \quad ...(1)$

Por ley de cosenos para el ángulo C:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x$

Reemplazando (1):

$a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab\cos x$

$\cos x = 1/2 \quad \therefore x = 60°$

34. En un triángulo ABC:

$\frac{a}{b} = 3 \wedge C = 60°$

Determine el valor de $E = \tan(A - B)$

Resolución:

Datos: $a = 3b \wedge C = 60° \Rightarrow A + B = 120°$

De la ley de tangentes: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$

Reemplazando tenemos:

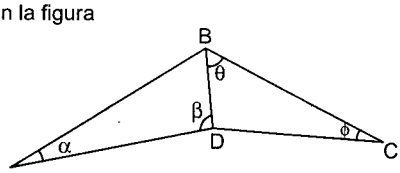
$\frac{3b-b}{3b+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan 60°} \Rightarrow \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ....(I)$

Luego piden: $\tan(A - B)$

$\Rightarrow \tan(A - B) = \frac{2\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad ....(II)$

Por lo tanto, reemplazando (I) en (II) tenemos: $\tan(A - B) = 4\sqrt{3}$

35. En la figura



$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{3}; \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} = \sqrt{2} \wedge DC = \sqrt{2}\,cm$

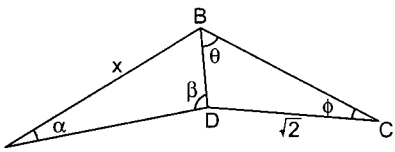
Hallar AB

Resolución:

Datos: $\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{3} \quad ...(1)$

$\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} = \sqrt{2} \quad ...(2)$

Además del gráfico:



I. Ley de senos en △ABD

$\frac{x}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{BD}{\operatorname{sen}\alpha} \quad ...(3)$

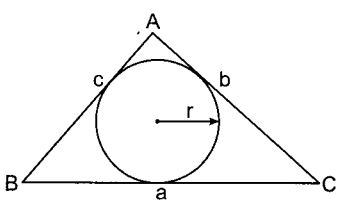
II. Ley de senos en △BDC

$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{BD}{\operatorname{sen}\phi} \quad ...(4)$

De (3) y (4): $BD = \frac{x\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}$

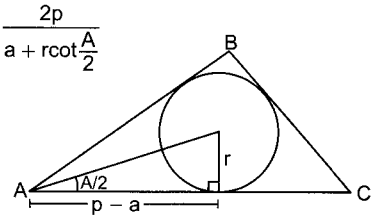
De (1) y (2): $x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{2}) \quad \therefore x = 2\sqrt{3}$ cm

36. Simplificar $\frac{2p}{a + r\cot\frac{A}{2}}$ (P: semiperímetro del triángulo ABC)



Resolución:

$M = \frac{2p}{a + r\cot\frac{A}{2}}$



Sabemos del gráfico: $r = (p - a)\tan\frac{A}{2}$

$M = \frac{2p}{a + (p-a)\tan\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}} = \frac{2p}{a + p - a}$

$\therefore M = 2$

37. Según los datos de la figura, determinar el valor de $\sqrt{19}\operatorname{sen}\alpha$

Por ley de cosenos:

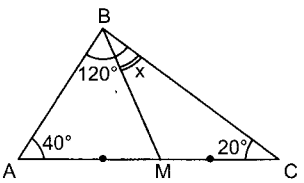
$x^2 = 14^2 + 12^2 - 2(12)(14)\cos\theta$

$x^2 = 196 + 144 - 336\left(\frac{5}{7}\right)$

$x^2 = 100 \quad \therefore\ x = 10$ cm

43. Se tiene un triángulo ABC, BM es mediana (M en AC), si $m\angle BCA = 20°$, $m\angle BAC = 40°$ y $m\angle MBC = x$. Halle $\sqrt{3}\cot x - 1$

Resolución:



Ley de senos en $\triangle MBC$

$$\frac{MC}{\operatorname{sen}x} = \frac{MB}{\operatorname{sen}20°} \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}20°} \qquad ...(1)$$

Ley de senos en $\triangle ABM$

$$\frac{AM}{\operatorname{sen}(120° - x)} = \frac{BM}{\operatorname{sen}40°}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{\operatorname{sen}(120° - x)}{\operatorname{sen}40°} \qquad ...(2)$$

$$(1) = (2):\ \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}20°} = \frac{\operatorname{sen}(120° - x)}{\operatorname{sen}40°}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}20°} = \frac{\operatorname{sen}120°\cos x - \operatorname{sen}x\cos 120°}{2\operatorname{sen}20°\cos 20°}$$

$$2\cos 20° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} + \frac{1}{2} \Rightarrow 4\cos 20° = \sqrt{3}\cot x + 1$$

$$4\cos 20° - 2 = \sqrt{3}\cot x - 1$$

$$\Rightarrow 2(2\cos 20° - 1) = \sqrt{3}\cot x - 1$$

$$2\left(\frac{\cos 30}{\cos 10}\right) = \sqrt{3}\cot x - 1 \ \therefore\ \sqrt{3}\sec 10° = \sqrt{3}\cot x - 1$$

44. En un $\triangle ABC$ (AB = c, BC = a, AC = b). Si $b\tan A = (2c - b)\tan B$

Halle: $\left(\frac{b+c}{b-c}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$

Resolución:

- Sabemos que: $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \left(\frac{b+c}{b-c}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

- $b\tan A = (2c - b)\tan B$

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{2c-b}{b} \Rightarrow \frac{\tan A}{\tan B} + 1 = \frac{2c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan B} = \frac{2(2R\operatorname{sen}C)}{2R\operatorname{sen}B}$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\operatorname{sen}B}{\cos B}} = \frac{2\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}B} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60°$$

$$\Rightarrow B + C = 120° \quad \therefore\ \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan 60° = \sqrt{3}$$

45. En un $\triangle ABC$ (AB = c, BC = a, AC = b), Simplificar:

$F = (a^2 - b^2)\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\csc(A - B)$

Nota: (S = área de la región triangular)

Resolución:

Por la ley de senos:

$E = [(2R\operatorname{sen}A)^2 - (2R\operatorname{sen}B)^2]\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\csc(A - B)$

$$E = 4R^2\Big[\underbrace{\operatorname{sen}^2A - \operatorname{sen}^2B}_{(\cos 2B - \cos 2A)/2}\Big]\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\csc(A - B)$$

$$E = 2R^2\Big[2\underbrace{\operatorname{sen}(A+B)}_{\operatorname{sen}C}\operatorname{sen}(A - B)\Big]\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\csc(A - B)$$

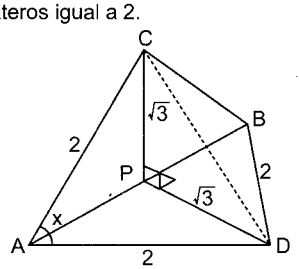
$$E = 4R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C = 2\underbrace{(2R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C)}_{S}$$

$\therefore\ E = 2S$

46. Dos triángulos equiláteros ABC y ABD forman un ángulo diedro de 90°. Hallar el coseno del ángulo DAC

Resolución:

Asumiendo la longitud de los lados de los triángulos equiláteros igual a 2.



El ángulo CPD = 90° es el ángulo diedro formado por los planos de los triángulos equilátero ABC y ABD, luego en el ◺CPD (isósceles) CD = $\sqrt{6}$

Aplicamos ley de cosenos en el $\triangle ACD$:

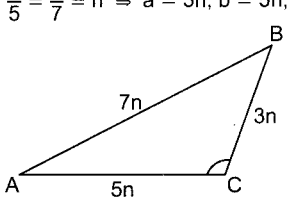
$(\sqrt{6})^2 = 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\cos x \quad \therefore\ \cos x = 1/4$

47. En un triángulo ABC se tiene la siguiente relación de lados: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$, según esto obtener secC.

Resolución:

Piden: secC

Dato: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = n \Rightarrow a = 3n,\ b = 5n,\ c = 7n$



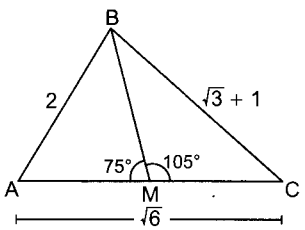
Por ley de cosenos

$(7n)^2 = (3n)^2 + (5n)^2 - 2(3n)(5n)\cos C$

$49 = 9 + 25 - 30\cos C$
$30\cos C = -15$
$\cos C = -1/2 \quad \therefore \sec C = -2$

48. En un △ABC sus lados miden $a = \sqrt{3}+1$; $b = \sqrt{6}$ ∧ $c = 2$
Halle la longitud de la ceviana $\overline{BM}$ si M está en $\overline{AC}$ y $m\angle BMC = 105°$

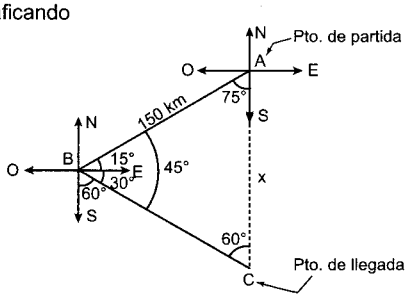
Resolución:



Aplicando ley de cosenos en el △ABC
$(\sqrt{3}+1)^2 = (2)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2(2)(\sqrt{6})\cos\theta$
$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
Pero $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \theta = 75°$
△ABM isósceles $\quad \therefore BM = AB = 2$

49. Un móvil recorre 150 Km en la dirección S75°O, luego cambia su dirección al S60°E hasta un punto situado al Sur de su punto de partida. Hallar la distancia desde su punto de partida hasta su punto de llegada.

Resolución:
Graficando



En el △ABC (ley de senos)

$$\frac{x}{\text{sen}45°} = \frac{150}{\text{sen}60°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{150}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = 150\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$\therefore x = 50\sqrt{6}$ km

50. En un triángulo ABC se cumple que: $1 - \cos A = \cos^2 B + \cos^2 C - \cos^2 A$.
Hallar cscBcscC

Resolución:
$1 - \cos A = \cos^2 B + \cos^2 C - \cos^2 A$.
$1 - \cos A = 1 - \text{sen}^2 B + 1 - \text{sen}^2 C - (1 - \text{sen}^2 A)$
$-\cos A = -\text{sen}^2 B - \text{sen}^2 C + \text{sen}^2 A$

pero: $\dfrac{a}{\text{sen}A} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{2R} = \text{sen}A$

$\cos A = \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - \text{sen}^2 A$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4R^2} \Rightarrow 2bc = 4R^2$$

$\Rightarrow bc = 2R^2$

$$\Rightarrow \csc B\csc C = \frac{1}{\text{sen}B\,\text{sen}C} = \frac{1}{\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{C}{2R}\right)} = \frac{4R^2}{bc}$$

$\therefore \csc B\csc C = 2$

51. En un △ABC, se conoce que su área (S) es igual a $2\sqrt{R}$ (R = circunradio). Calcule $h_a h_b h_c$, siendo h_a, h_b y h_c las alturas relativas a los lados del △ABC.

Resolución:

Se sabe que: $S = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$

$\Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a}, \quad h_b = \dfrac{2S}{b}, \quad h_c = \dfrac{2S}{c}$

$\therefore h_a h_b h_c = \dfrac{2S}{a}\left(\dfrac{2S}{b}\right)\left(\dfrac{2S}{c}\right) = \dfrac{8S^3}{abc}$ ...(1)

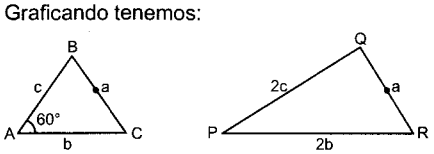
pero: $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow abc = 4RS$ ...(2)

(2) en (1): $h_a h_b h_c = \dfrac{8S^3}{4RS} = \dfrac{2S^2}{R} = \dfrac{2(2\sqrt{R})^2}{R}$

$\therefore h_a h_b h_c = 8$

52. Se tiene un triángulo ABC, donde $m\angle BAC = 60°$. Se construye otro triángulo PQR tal que PQ = 2AB, PR = 2AC y BC = QR. Determinar el mínimo valor del coseno del ∠QPR.

Resolución:
Graficando tenemos:



Aplicando ley de cosenos: (△ABC)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°$
$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ...(1)

Analógicamente en el: △PQR

$$\cos\theta = \frac{(2c)^2 + (2b)^2 - a^2}{2(2c)(2b)} = \frac{4c^2 + 4b^2 - a^2}{8bc} \quad ...(2)$$

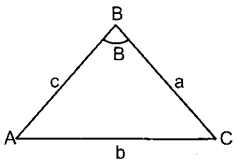
Reemplazando (1) en (2):

$$\cos\theta = \frac{4c^2 + 4b^2 - (b^2 + c^2 - bc)}{8bc}$$

$$\therefore \underbrace{\cos\theta}_{\text{mínimo}} = \frac{3}{8}\underbrace{\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)}_{\text{mínimo} = 2} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}(2) + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

53. En un triángulo ABC, se conocen los lados b, c y el ángulo B. Si a_1 y a_2 son los valores que puede tomar el tercer lado desconocido, hallar el equivalente de:
$K = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B$

Resolución:



Del gráfico:
Por ley de cosenos

$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$

$a^2 - (2ccosB)a + c^2 - b^2 = 0$

$\Rightarrow a_1 + a_2 = 2ccosB \wedge a_1a_2 = c^2 - b^2$

$\Rightarrow (a_1 + a_2)^2 = 4c^2cos^2B$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = 4c^2cos^2B$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 = 4c^2cos^2B - 4a_1a_2$

$(a_1 - a_2)^2 = 4c^2cos^2B - 4(c^2 - b^2)$

Reemplazando en K:

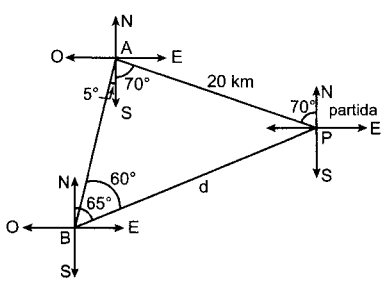
$K = 4c^2cos^2B - 4(c^2 - b^2) + 4c^2cos^2B\dfrac{sen^2B}{cos^2B}$

$K = 4c^2\underbrace{(cos^2B + sen^2B)}_{1} - 4(c^2 - b^2)$

$K = 4c^2 - 4c^2 + 4b^2 \quad \therefore K = 4b^2$

54. Un móvil recorre 20 km en la dirección N70°W; luego recorre una cierta distancia en la dirección S5°W hasta un punto, a partir del cual observa su posición inicial en la dirección N65° E. Si la distancia que separa la posición inicial de la final es d, halle: $M = 0{,}05\sqrt{6}\,d$

Resolución:



Aplicando la ley de senos:

$\dfrac{d}{sen75°} = \dfrac{20}{sen60°}$

Nos piden: $M = 0{,}05\sqrt{6} = 0{,}05\sqrt{6}\left(\dfrac{20sen75°}{sen60°}\right)$

$\therefore M = 1 + \sqrt{3}$

55. Hallar la medida del mayor ángulo de un triángulo que verifica la relación $\dfrac{cosA}{a} + \dfrac{cosB}{b} + \dfrac{cosC}{c} = \dfrac{c}{ab}$

Resolución:

$\underbrace{\dfrac{cosA}{a} + \dfrac{cosB}{b}}_{c} + \dfrac{cosC}{c} = \dfrac{c}{ab}$

$\dfrac{bcosA + acosB}{ab} + \dfrac{cosC}{c} = \dfrac{c}{ab}$

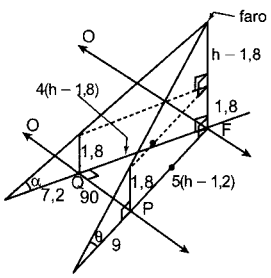
$\dfrac{c}{ab} + \dfrac{cosC}{c} = \dfrac{c}{ab}$

$\dfrac{cosC}{c} = 0 \Rightarrow cosC = 0 \quad \therefore C = 90°$

56. Una persona que está al Sur de un faro, observa que su sombra proyectada por la luz del faro tiene 7,2 m de longitud; caminando 90 m hacia el Este observa que su sombra es de 9 m de longitud. Si la altura de la persona es de 1,8 m, halle la altura del faro.

Resolución:

Nos piden hallar la longitud del faro: (h)



Del gráfico:

$\tan\alpha = \dfrac{1{,}8}{7{,}2} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{h - 1{,}8}{x} = \dfrac{h}{x + 7{,}2}$

$\tan\theta = \dfrac{1{,}8}{9} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{h}{y + 9} = \dfrac{h - 1{,}8}{y}$

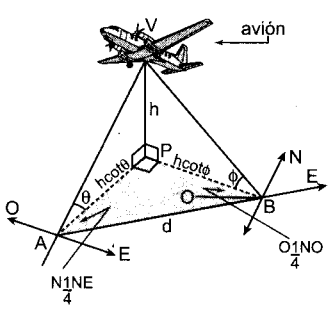
En el $\triangle PQF$ ($m\angle Q = 90°$)

$3(h - 1{,}8) = 90 \quad \therefore h = 31{,}8$ m

57. Dos estaciones de radar tienen que calcular la altura de un avión por ubicación simultánea; de A se ve en la dirección N(1/4)NE con un ángulo de elevación θ, de B se ve en la dirección O 1/4 NO, con un ángulo de elevación ϕ la distancia entre ambas estaciones es d. ¿Cuál fue dicho cálculo?

Resolución:

Del enunciado,
Resolviendo los triángulos rectángulos APV / BPV,
Tenemos: $AP = hcot\theta$; $PB = hcot\phi$



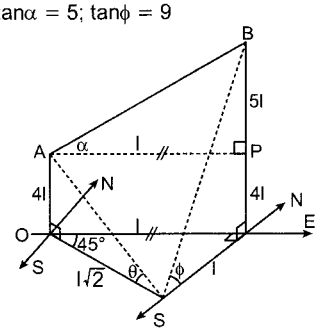
En el triángulo rectángulo sombreado:

$d^2 = (hcot\theta)^2 + (hcot\phi)^2 \quad \therefore h = \dfrac{d}{\sqrt{cot^2\theta + cot^2\phi}}$

58. Dos torres están situadas de tal manera que la de menor altura se encuentra al Oeste de la otra, siendo A y B sus puntos más altos, respectivamente. Además desde A se observa a B con un ángulo de elevación α. Si desde un punto situado al SE de la menor y al Sur de la mayor se observa los puntos A y B con ángulos de elevación de medidas θ y ϕ respectivamente, halle $\tan\theta$, sabiendo que $\tan\alpha = 5$ y $\tan\phi = 9$.

Resolución:

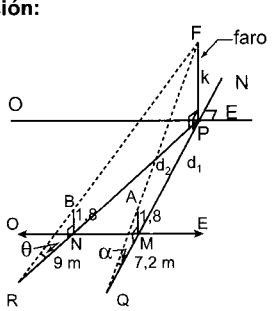
Datos: $\tan\alpha = 5$; $\tan\phi = 9$



Del gráfico: $\tan\theta = \dfrac{4l}{l\sqrt{2}}$ $\quad\therefore\ \tan\theta = 2\sqrt{2}$

59. Un alumno de 1,8 m de estatura se encuentra al Sur de un faro, a una distancia d, y se observa que su sombra tiene una longitud de 7,2 m luego camina hacia el Oeste tal que su distancia al pie del faro es d_2 y se observa que su sombra mide 9 m. Halle: d_1/d_2.

Resolución:



De la figura:

I. $\measuredangle$RNB ~ $\measuredangle$RPF:

$$\tan\theta = \frac{h}{1,8} = \frac{d_2 9}{9} \Rightarrow \frac{h-1,8}{1,8} = \frac{d_2}{9} \qquad ...(1)$$

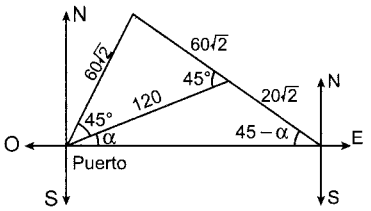
II. $\measuredangle$QMA ~ $\measuredangle$QPF:

$$\tan\alpha = \frac{h}{1,8} = \frac{d_1+7,2}{7,2} \Rightarrow \frac{h-1,8}{1,8} = \frac{d_1}{7,2} \qquad ...(2)$$

Igualando (1) y (2): $\quad\therefore\ \dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{4}{5}$

60. Un bote sobre un puerto parte en la dirección $N(90° - \alpha)E$ avanzando 120 m. Si otro al Este del puerto, lo alcanza recorriendo $20\sqrt{2}$ m, en la dirección $O(45° - \alpha)$ N; halle $\cot(45° + \alpha)$.

Resolución:



Del gráfico: $\cot(45° + \alpha) = \dfrac{60\sqrt{2}}{80\sqrt{2}}$

$\therefore\ \cot(45° + \alpha) = 3/4$

61. Dado un triángulo ABC de lados a, b y c.

Simplificar: $E = \dfrac{b - c\cos A}{c\,\text{sen}A}$

Resolución:

De la ley de proyecciones, para el $\triangle$ABC tenemos:

$b = a\cos C + c\cos A$

$\Rightarrow b - c\cos A = a\cos C$

De la ley de senos tenemos:

$a = 2R\,\text{sen}A$; $c = 2R\,\text{sen}C$

Reemplazando en E: $E = \dfrac{a\cos C}{c\cos A} = \dfrac{2R\,\text{sen}A\cos C}{2R\,\text{sen}C\,\text{sen}A}$

$\therefore\ E = \cot C$

62. En un triángulo ABC, si BC = a, AC = b, AB = c, simplificar:

$$E = \frac{b\cos^2\left(\frac{C}{2}\right) + c\cos^2\left(\frac{B}{2}\right)}{(b+c)\cos A + (a+c)\cos B + (a+b)\cos C}$$

Resolución:

$$M = b\cos^2\left(\frac{C}{2}\right) + c\cos^2\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2M = b\left(2\cos^2\left(\frac{C}{2}\right)\right) + c\left(2\cos^2\left(\frac{B}{2}\right)\right)$$

$$2M = b(1 + \cos C) + c(1 + \cos B) = b + c + \underbrace{b\cos C + c\cos B}_{a}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+b+c}{2}$$

$N = (b + c)\cos A + (a + c)\cos B + (a + b)\cos C$

$N = b\cos A + c\cos A + a\cos B + c\cos B + a\cos C + b\cos C$

$\Rightarrow N = a + b + c$

$$\Rightarrow E = \frac{M}{N} = \frac{\frac{a+b+c}{2}}{\frac{a+b+c}{1}} \qquad \therefore\ E = \frac{1}{2}$$

63. En un $\triangle$ABC, se tiene $2a = b + c$. Halle $E = r/r_a$ (siendo r el inradio y r_a el exradio relativo al lado a).

Resolución:

En todo triángulo: $a + b + c = 2p$

$$a + 2a = 2p \Rightarrow a = \frac{2p}{3}$$

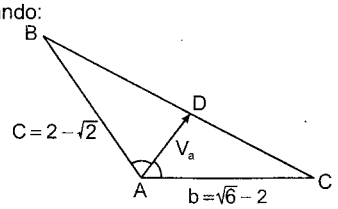
Se sabe que: $S_{\triangle ABC} = pr = r_a(p - a)$

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} = \frac{p-\frac{2}{3}p}{p} \quad \therefore \frac{r}{r_a} = \frac{1}{3}$$

64. En un △ABC, AC = $\sqrt{6}-2 \wedge$ AB = $2-\sqrt{2}$. Calcular la longitud de la bisectriz relativa al ángulo A, sabiendo que el ángulo A = 150°.

Resolución:

Graficando:



Sabemos que:

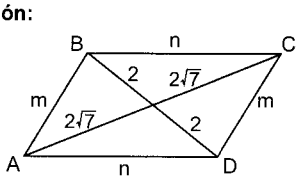
$$V_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2(\sqrt{6}-2)(2-\sqrt{2})}{\sqrt{6}-2+2-\sqrt{2}}\cos\left(\frac{150°}{2}\right)$$

$$V_a = \frac{2(2\sqrt{6}-4-2\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\therefore V_a = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

65. Calcular el área de un paralelogramo ABCD, cuyas diagonales son AC = $4\sqrt{7}$, BD = 4, en el cual cosA = 4/5

Resolución:



Sean AB = CD = m $\wedge$ BC = AD = n

como $\cos A = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}A = \frac{3}{5}$

Área del paralelogramo = S = 2 Área △ABD

$$S = 2\left(\frac{1}{2}mn\operatorname{sen}A\right) = \frac{3}{5}mn \qquad ...(\alpha)$$

en △ABD, por la ley de cosenos:

$4^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos A$

$16 = m^2 + n^2 - 2mn\left(\frac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow 16 = m^2 + n^2 - \frac{8}{5}mn \qquad ...(1)$

En △ABD, por líneas notables (medianas):

$4(2\sqrt{7})^2 = m^2 + n^2 + 2mn\cos A$

$112 = m^2 + n^2 + 2mn(\frac{4}{5})$

$\Rightarrow 112 = m^2 + n^2 + \frac{8}{5}mn \qquad ...(2)$

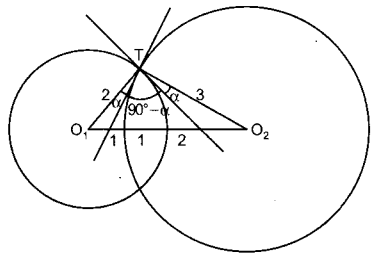
de (2) y (1) restando $112 - 16 = 2(\frac{8}{5}mn)$

$\Rightarrow 96 = \frac{16}{5}mn \Rightarrow mn = 30$

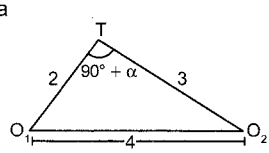
en (α) $S = \frac{3}{5}(30) = 18 \quad \therefore S = 18$

66. Dos circunferencias de radios 2 y 3, tienen sus centros separados una distancia igual a 4. El coseno del ángulo agudo que forman las tangentes a ambas circunferencias en un punto de corte, es igual a.

Resolución:



De la figura



Por Ley de cosenos

$(4)^2 = (2)^2 + (3)^2 - 2(2)(3)\cos(90° + \alpha)$

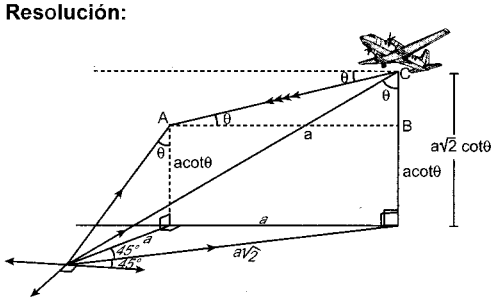
$16 = 4 + 9 - 12(-\operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$

Nos piden: $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$

$\therefore \cos(90° - \alpha) = \frac{1}{4}$

67. Un avión cae con una inclinación θ en la dirección ESTE – OESTE. ¿Cuál es el valor de la secθ para que un observador vea al avión primero hacia el NE y hacia el NORTE con ángulos iguales al complemento de θ.

Resolución:



Nos piden la secθ ⇒ ⊿ABC:

$$\tan\theta = \frac{a\cot\theta(\sqrt{2}-1)}{a} \quad \tan^2\theta = \sqrt{2}-1$$

$1 + \tan^2\theta = \sqrt{2}$

$\sec^2\theta = \sqrt{2} \quad \therefore \sec\theta = \sqrt[4]{2}$

68. En un △ABC acutángulo el equivalente de:

$bc\sqrt{1+\cos 2A} + ac\sqrt{1+\cos 2B} + ab\sqrt{1+\cos 2C}$ es:

Resolución:

Recordando la identidad: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ y designando E a la expresión solicitada se tiene:

$$E = bc\sqrt{\underbrace{1+\cos 2A}_{2\cos^2 A}} + ac\sqrt{\underbrace{1+\cos 2B}_{2\cos^2 B}} + ab\sqrt{\underbrace{1+\cos 2C}_{2\cos^2 C}}$$

Del enunciado A, B y C son ángulos agudos, entonces cosA, cosB y cosC son positivos:

$E = \sqrt{2}(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$

$\sqrt{2}E = 2bc\cos A + 2ac\cos B + 2ab\cos C$

De la ley de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\Rightarrow 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ ...(I)

Análogamente:

$\Rightarrow 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$ ...(II)

$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ ...(III)

Sumando I, II y III

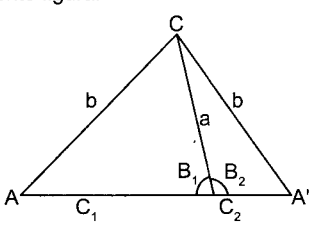
$$\underbrace{2bc\cos A + 2ac\cos B + 2ab\cos C}_{\sqrt{2}E} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore E = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{2}}$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2006 - II)

En la siguiente figura:



Se conoce a, b, $\angle A$ y $\angle B_1$, Si $c_1 > c_2$, entonces se cumple:

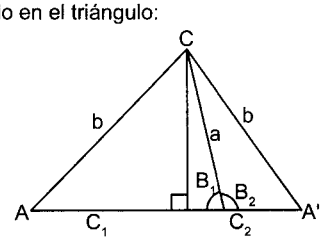
A) $c_1 + c_2 = 2a\cos B_1$ B) $c_1 - c_2 = 2b\cos A$

C) $c_1 + c_2 = 2a\cos A$ D) $c_1 - c_2 = 2a\cos B_1$

E) $c_1 + c_2 = 2b\cos B_1$

Resolución:

Trabajando en el triángulo:



En la figura tenemos que en el $\triangle ACA'$ se da lo siguiente:

$AC = CA'$ ... (1)

$\Rightarrow m\angle A = m\angle A'$

También, en el gráfico:

$c_1 = AD + DB$

$= b\cos A + a\cos B_1$ ... (2)

$c_2 = DA' - DB$

$= b\cos A' - a\cos B_1$

$= b\cos A - a\cos B_1$ ... (3)

De (1):

Sumando c_1 y c_2, de (2) y (3):

$c_1 + c_2 = (b\cos A + a\cos B_1) + (b\cos A - a\cos B_1)$

$= 2b\cos A$

Restando: c_1 y c_2, de (2) y (3):

$c_1 - c_2 = (b\cos A + a\cos B_1) - (b\cos A - a\cos B_1)$

$= 2a\cos B_1$

Por lo tanto, dentro de las alternativas solo se cumple:

$c_1 - c_2 = 2a\cos B_1$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

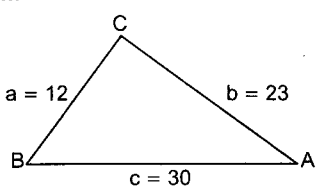
Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, 1,2; 2,3 y 3,0 son las longitudes de sus lados opuestos a dichos ángulos respectivamente y senA = L, calcule el valor de la expresión siguiente:

$$D = \frac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A+C) + \operatorname{sen}(B+C)}{53\cos A + 42\cos B + 35\cos C}$$

A) $\frac{L}{4}$ B) $\frac{L}{6}$ C) $\frac{L}{8}$

D) $\frac{L}{10}$ E) $\frac{L}{12}$

Resolución:



Piden:

$$D = \frac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A+C) + \operatorname{sen}(B+C)}{(b+c)\cos A + (a+c)\cos B + (a+b)\cos C}$$

Como: $A + B + C = 180°$

$$D = \frac{\operatorname{sen}C + \operatorname{sen}B + \operatorname{sen}A}{b\cos A + c\cos A + a\cos B + c\cos B + a\cos C + b\cos C}$$

Por T. de proyecciones:

$$D = \frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C}{a+b+c}$$

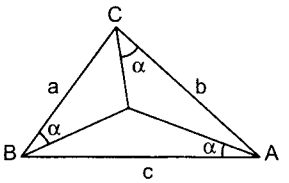
Por T. de senos: $D = \frac{\operatorname{sen}A}{a}$

$$\therefore D = \frac{L}{12}$$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - II)

En la figura:



Si a = 3, b = 25, c = 26, $\tan\alpha = \frac{m}{n}$, donde m y n son primos entre sí, calcule m + n.

A) 727 B) 728 C) 729
D) 730 E) 731

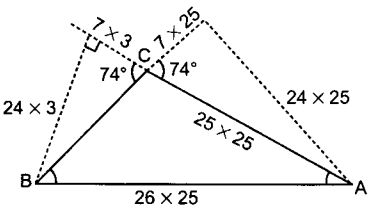
Resolución:

T. de cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$26^2 = 3^2 + 25^2 - 2(3)(25)\cos C$

$\cos C = -\frac{7}{25} \Rightarrow c = 106°$



De la figura obtenemos:

$\cot B = \frac{5}{12}$; $\cot A = \frac{323}{36}$

Por Brocard:

$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

$\cot\alpha = \frac{655}{72}$; $\tan\alpha = \frac{72}{655} = \frac{m}{n}$

$\therefore$ m + n = 727

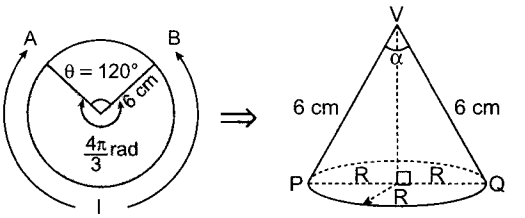
Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

De un disco de cartulina de radio 6 cm, se corta un sector circular de ángulo central $\theta = 120°$. Con la parte restante, uniendo los bordes se forma un cono. Determine el coseno del ángulo en el vértice del cono construido.

A) 0 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{9}$

Resolución:



Perímetro de la base $L = \left(\frac{4\pi}{3}\right)(6) = 8\pi$

Además: la base es un círculo

$8\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 4$ cm

En el $\triangle VPQ$

Por ley de cosenos

$\cos\alpha = \frac{6^2 + 6^2 - (2R)^2}{2(6)(6)}$ $\therefore \cos\alpha = \frac{1}{9}$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

En todo triángulo ABC, la suma de los cuadrados de sus lados es igual a K(bccosA + accosB + abcosC) donde K vale:

A) 1/4 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 4

Resolución:

Por condición:

$a^2 + b^2 + c^2 = k(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$

Por teoría: $\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}\right\}$ sumando

$2bc\cos A + 2ac\cos B + 2ab\cos C = a^2 + b^2 + c^2$

Igualando con la condición nos da K = 2

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un triángulo ABC, reducir:

$$T = \frac{a\cos B + b\cos A}{\text{sen}C}$$

A) R B) 2R C) R/2
D) 4R E) R/4

2. En un triángulo ABC, reducir:

$$S = \frac{ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B}{a^2 + b^2 + c^2}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 4 E) 1/4

3. Se tiene un prisma triangular regular ABC – A'B'C' cuya arista de la base mide a.
Se ubican los puntos medios M y N de AB y BC respectivamente. Si los segmentos C'M y A'N forman un ángulo agudo θ, hallar el volumen del prisma.

A) $\frac{3a^3}{16}\sqrt{3\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}$ B) $\frac{2a^3}{9}\sqrt{3\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1}$

C) $\frac{4a^3}{15}\sqrt{1 + \cot^2\theta}$ D) $\frac{5a^3}{12}\sqrt{2\cot^2 + 1}$

E) $\frac{a^3}{8}\sqrt{\cot 2\theta + 1}$

4. En un triángulo ABC, se traza el segmento BD con D sobre el lado AC, también trazamos el segmento CE con E sobre el lado AB.

Si sabemos que: $\frac{AB}{AC} = \frac{13}{36}$ y $\frac{CD}{AE} = \frac{12}{5}$

determinar la relación: $\frac{\text{área}(\triangle BCD)}{\text{área}(\triangle AEC)}$

A) $\frac{15}{13}$ B) $\frac{13}{15}$ C) $\frac{14}{15}$
D) $\frac{15}{14}$ E) $\frac{15}{17}$

5. Los lados de un triángulo oblicuángulo ABC, miden: b = (senA + cosA) ; c = (senA – cosA)
Además: $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$, hallar la medida del mayor valor de A.

A) 60° B) 72° C) 54°
D) 65° E) 45°

6. En un triángulo acutángulo ABC, las distancias del ortocentro a los vértices A, B y C son m, n y p respectivamente.
Con esta referencia, a partir del gráfico adjunto:

se demuestra que:

$$\frac{\cos x}{\cos C} + \frac{\cos y}{\cos A} + \frac{\cos z}{\cos B} = V\,(\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A) + T$$

Calcular: S = V – T

A) 1 B) 2 C) 4
D) – 2 E) – 4

7. Dos de los lados de un cuadrilátero ABCD miden: c = 21 y d = 15. Calcular los valores de a y b (enteros) de tal manera que: $\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{5a}{7b}$
Dar como respuesta los menores valores de a y b.

A) 21 y 15 B) 29 y 25 C) 12 y 4
D) 15 y 3 E) 8 y 12

8. En un triángulo ABC, la bisectriz interior relativa al lado a forma con dicho lado, un ángulo agudo θ, si además: $3\cot\theta = \cot\frac{A}{2}$
calcular la relación entre los lados b y c.

A) 3b = 4c B) b = 2c C) 5b = 3c
D) 4b = 3c E) 3b = 5c

9. En un triángulo ABC, se tiene que:

$$\frac{a\,\text{sen}(B - C)}{b\cos B + c\cos C} + \frac{b\,\text{sen}(C - A)}{a\cos A + c\cos C} = \frac{5c\,\text{sen}(A - B)}{a\cos A + b\cos B}$$

calcular: M = tan(B – C)tan(C – A), siendo: $A \neq B \neq C$

A) 1 B) 9 C) 6
D) 4 E) 2

10. Sean los ángulos: A = $\pi/7$, B = $2\pi/7$, C = $4\pi/7$, hallar la relación que guardan los lados a, b y c de un triángulo ABC.

A) $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$ B) $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$

C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ D) $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

E) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

11. Siendo ABC un triángulo de lados a, b y c, entonces respecto a S podemos afirmar que:

$$S = \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2}\right)\left(\frac{a - c\cos B}{a - b\cos C}\right)$$

A) K = 1 B) K = 2 C) K = 4
D) $K \geq 2$ E) $K \geq 4$

12. Si S es el área de la región limitada por el triángulo ABC, determinar a qué es igual.

$$T = \frac{\cot A + \cot B}{c^2} + \frac{\cot B + \cot C}{a^2} + \frac{\cot C + \cot A}{b^2}$$

A) $\frac{3}{S}$ B) $\frac{3}{2S}$ C) $\frac{6}{S}$
D) $\frac{2}{S}$ E) $\frac{3}{4S}$

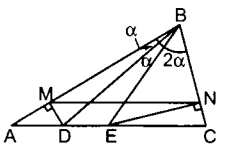
13. Si el circunradio de un triángulo ABC mide 5cm, además se cumple:
sen(A − B) = 2cosAcosB ...(1)
sen(C − B) = cosBcosC ...(2)
calcular el área de la reglón triangular ABC.

A) 35 cm^2 B) 30 cm^2 C) 40 cm^2
D) 50 cm^2 E) 60 cm^2

14. En los triángulos ABC y A'B'C', se cumple que los ángulos B y B' son iguales, mientras que los ángulos A y A' son suplementarios. Determinar:
$T = \frac{bb' + bc'}{aa'}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

15. En la figura adjunta, se tiene que:
BD = BE = 1, $\alpha = \pi/13$; calcular: MN

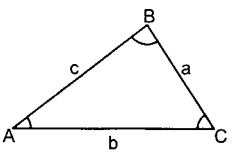


A) 1 B) 1/2 C) $\sqrt{3}/2$
D) $\sqrt{5}/2$ E) $\sqrt{13}/4$

16. En un triángulo ABC cuyo perímetro es 12, se sabe que la suma de los productos de sus lados tomados de dos en dos es 47 y que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo tiene un radio de $\sqrt{5}$. Hallar el valor de la siguiente expresión:
$T = sen^2A + sen^2B + sen^2C$

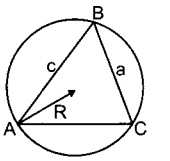
A) 2 B) 5 C) 5/2
D) 3/2 E) 1

17. En la figura, se muestra un triángulo en el que se cumple: $\cos A + \cos B = 4sen^2\frac{C}{2}$
Hallar el valor de: a + b



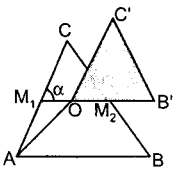
A) 4c B) 3c/2 C) 2c
D) 5c/4 E) 5c/3

18. En la figura mostrada, el triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de radio R. Si se cumple que: $c^2 - a^2 = 2R^2$ y la medida del ángulo B es 30°, hallar los valores de los ángulos A y C.



A) 45° y 105° B) 35° y 115°
C) 60° y 90° D) 30° y 120°
E) 25° y 125°

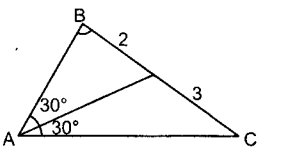
19. Hallar el área del triángulo OB'C', si AB = 4 = BC, $M_1O = \frac{AB}{4}$, AC = 6, M_1 y M_2 puntos medios en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente $\overline{AC}//\overline{OC'}$ y $\overline{BC}//\overline{B'C'}$, AO = OC'.



A) $\left(\frac{29}{3}\right)\sqrt{7}$ B) $\left(\frac{29}{6}\right)\sqrt{7}$ C) $\left(\frac{29}{7}\right)\sqrt{7}$
D) $\left(\frac{29}{2}\right)\sqrt{7}$ E) $\left(\frac{29}{24}\right)\sqrt{7}$

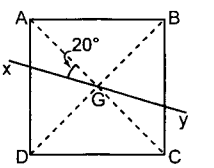
20. Dado el triángulo ABC, hallar el ángulo B.

A) arcsen3$\sqrt{3}$
B) arctan$\sqrt{3}$
C) arctan3
D) arcsec3$\sqrt{3}$
E) arctan3$\sqrt{3}$



21. En la figura mostrada G es el centro del cuadrado ABCD. Hallar la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices del cuadrado de la recta XY, si el lado del cuadrado es L.

A) L^2
B) $2L^2$
C) $3L^2$
D) $4L^2$
E) $5L^2$



22. Sea el triángulo ABC y sean a, b y c las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente. Si se cumple la relación:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$$

Determinar que tipo de triángulo es:

A) Acutángulo B) Obtusángulo C) Isósceles
D) Equilátero E) Rectángulo

23. Sea el triángulo ABC de lados AB = AC y BC = $\sqrt{2}$. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en D y BD = 1, hallar los ángulos A y B.

A) 60°; 60° B) 90°; 45° C) 100°; 40°
D) 120°; 30° E) 150°; 15°

24. Dos autos parten simultáneamente desde un punto P en direcciones que forman un ángulo θ uno a 5 Km/h y el otro a 12 Km/h.
Calcular el cosθ, sabiendo que al cabo de 1 hora la distancia desde el punto P al punto medio del segmento que separa ambos autos es de 7 Km.

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{7}{16}$ C) $\frac{3}{80}$
D) $\frac{9}{40}$ E) $\frac{13}{25}$

25. Si en un triángulo ABC: $\frac{a - b\cos C}{b - a\cos C} = 3$

calcular: $S = \dfrac{\tan\frac{C}{2}}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

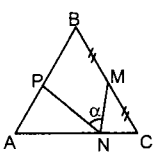
A) 1 B) 2 C) 4
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

26. Si en un triángulo ABC: $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{1}{2}ab$,
calcular: $\tan\frac{C}{2}$

A) $\sqrt{0,2}$ B) $\sqrt{0,3}$ C) $\sqrt{0,4}$
D) $\sqrt{0,5}$ E) $\sqrt{0,6}$

27. Si en el triángulo equilátero ABC: BP = 5AP, AN = 2NC; calcular: secα

A) $\sqrt{93}$
B) $2\sqrt{91}$
C) $-\sqrt{91}$
D) $-2\sqrt{91}$
E) $-2\sqrt{71}$



28. En un triángulo ABC, se cumple:
$a^3(b^2 + c^2) + b^3(a^2 + c^2) - (a^5 + b^5) = 2abcR^2$
donde: R: circunradio del triángulo ABC
calcular: S = senAsen2A + senBsen2B

A) $\frac{1}{5}$ B) 2 C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

29. En un triángulo ABC, simplificar:

$$\frac{a\cos C}{\sqrt{b} + \sqrt{c\cos A}} + \frac{a\cos B}{\sqrt{c} + \sqrt{b\cos A}} + \sqrt{c\cos A} + \sqrt{b\cos A}$$

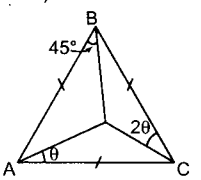
A) $\sqrt{bc}$ B) $\sqrt{ab}$
C) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ D) $\sqrt{b} + \sqrt{c}$
E) $\sqrt{b} - \sqrt{c}$

30. Si en un triángulo ABC: $\frac{a+c}{a-c} = 4\tan\frac{B}{2}\cot\left(\frac{A-C}{2}\right)$

calcular: $S = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \tan C}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{7}{6}$
D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{2}{5}$

31. En el triángulo equilátero mostrado, calcular:
$T = \cos(15° + 3\theta)\sec\theta$



A) $\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$
D) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ E) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$

32. Si en un triángulo ABC: $\frac{c - b\cos A}{b - c\cos A} = \frac{3}{5}$

calcular: $M = \dfrac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\frac{A}{2}}$

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{7}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

33. Siendo A, B y C los ángulos internos de un triángulo, para el cual se cumple:
2senB − senA − sen(A + B + C) + senC
calcular el valor de:

$$T = \frac{\cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right) - 1}{\cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right) + 1}$$

A) − 1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

34. Si el área de un triángulo ABC es igual a 6 cm^2, calcular:
$P = a^2(sen2B + sen2C) + b^2(sen2C + sen2A) + c^2(sen2A + sen2B)$

A) 24 cm^2 B) 48 cm^2 C) 72 cm^2
D) 96 cm^2 E) 120 cm^2

35. En un triángulo ABC; señalar el equivalente de:

$$T = \frac{a\,sen\left(arcsen\frac{2}{3} + B\right) + b\,sen\left(arccos\frac{\sqrt{5}}{3} - A\right)}{c}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}/3$ C) 2
D) 2/3 E) 1/3

36. En un triángulo ABC, son conocidos b, c y B. $b < c$; mientras que a_1 y a_2 son los valores que tomaría el lado a. Señalar el equivalente de:
$E = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B$

A) b^2 B) $2b^2$ C) $4b^2$
D) $8b^2$ E) $16b^2$

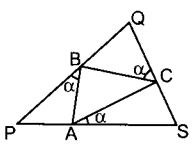
37. En un triángulo ABC, son conocidos a, b y B. Si: C1 y C2 son las medidas que podría tomar el ángulo C. Señalar el equivalente de:
$H = \text{sen}C_1 - \text{sen}C_2$

A) $\frac{a}{b}\text{sen}2B$ B) $\frac{b}{2}\text{Sen}2B$ C) $\frac{a}{2b}\text{sen}2B$
D) $\frac{a}{4b}\text{sen}2B$ E) $\frac{b}{4b}\text{sen}2B$

38. Si en un triángulo ABC: $\cos A + \cos B + \cos C = 1{,}25$
calcular: $E = \sqrt{\frac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{R^3}}$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}/2$
D) 1/2 E) 1/4

39. En la figura R, R_1, R_2 y R_3 son los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ABP, BCQ y ACS respectivamente.
Hallar R, si: $R_1 = 1$; $R_2 = 2$; $R_3 = 4$



A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 4

40. En un triángulo acutángulo ABC, la circunferencia descrita tomando como diámetro la altura relativa al lado a, intercepta a los lados b y c, en los puntos P y Q respectivamente.
Expresar el segmento PQ en función de los ángulos del triángulo y del radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo.

A) 2RSenASenBSenC
B) RSenASenBSenC
C) RCosACosBCosC
D) 3RCosACosBCosC
E) RTanATanBTanC

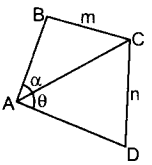
41. Siendo r_b y r_c, exradios relativos a los lados b y c,
calcular: $P = \frac{h_a(r_b + r_c) + r_b r_c}{r_b r_c}$
Siendo: h_a la altura relativa al lado a.

A) 1 B) 3/2 C) 5/2
D) 2 E) 3

42. En un triángulo ABC, si el circunradio es R y a'; b'; c' son los lados de su triángulo pedal,
reducir: $M = \frac{a' + b' + c'}{abc}$

A) R^{-2} B) $2R^{-2}$ C) $\frac{1}{2}R^{-2}$
D) $\frac{1}{4}R^{-2}$ E) $4R^{-2}$

43. Si en el gráfico: $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\theta}{2} = n$, hallar: $E = \frac{m+n}{p}$, si ABCD es inscriptible y BD = p



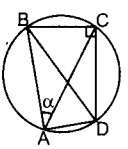
A) $\frac{n}{1-n}$ B) $\frac{1-n}{n}$ C) $\frac{1-n}{1+n}$
D) $\frac{1+n}{1-n}$ E) $\frac{2n}{1+n}$

44. Los lados de un cuadrilátero son a = 7; b = 8; c = 9; d = 11. Si su superficie es S = 33, calcular la tangente del ángulo agudo formado por las diagonales.

A) 2 B) 2,3 C) 2,4
D) 1,8 E) 1,6

45. En el cuadrilátero ABCD de la siguiente figura, calcular: $\text{sen}\alpha + 2\cos\alpha$, si: 2AD = AB = 3AC

A) 1/7
B) 3/4
C) 3/2
D) 2/3
E) 1/3



46. En un triángulo rectángulo ABC (recto en A), el producto de las bisectrices de los ángulos agudos es al cuadrado de la hipotenusa como m es al Seno del ángulo opuesto a la hipotenusa. Expresar el $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ en términos de m.

A) $\frac{m - \sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{m + \sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{\sqrt{m^2 + 4\sqrt{2}m} + m}{2}$ D) $\frac{m^2 + \sqrt{2}m}{2}$
E) $\frac{m^2}{4}$

47. Dados los planos secantes P y Q, en P está contenido el triángulo ABC y en Q su proyección, el triángulo $A_1B_1C_1$.
Si: $BC = B_1C_1$, $m\angle ACB = 90°$
$m\angle BAC = 30°$ y $m\angle A_1B_1C_1 = 45°$
calcular el coseno del ángulo diedro formado por los dos planos secantes P y Q.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

48. Si en un triángulo ABC con lados a, b y c respectivamente, se tiene: $\tan\frac{A}{2} = 1$ y $\tan\frac{B}{2} = \frac{3}{4}$
determinar: $\frac{a+b}{a-b}$

A) 50 B) 16 C) 49
D) 9 E) 25

49. Una diagonal de un paralelepípedo rectángulo forma con las tres aristas concurrentes a un mismo vértice los ángulos α, β y θ. Hallar el valor de:
$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\theta$

A) 3/2 B) 2 C) 5/2
D) 3 E) 4

50. Los ángulos de un cuadrilátero ABCD están en progresión geométrica de razón 3, calcular:
M = cosAcosB + cosBcosC + cosCcosD + cosDcosA

A) 1 B) 1/2 C) 1/4
D) $\sqrt{5}/4$ E) $\sqrt{5}/2$

51. Tenemos un triángulo con ángulos interiores α, 2α, 2α, y lados b, a, a. Entonces el valor de a/b es

A) $\sqrt{5}+1$ B) $2(\sqrt{5}-1)$ C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{2}-1$

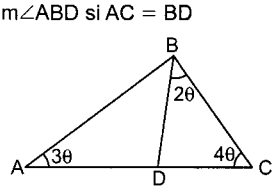
52. Para un triángulo ABC, el equivalente de
$a^2\cos 2B + b^2\cos 2A + 4a\text{sen}A\text{sen}B$ será:

A) $a^2 - 1$ B) $b^2 - 1$ C) $a^2 - b^2$
D) $a^2 + b^2$ E) 1

53. Halle la suma de los dos menores ángulos de un triángulo cuyos lados son $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 30° E) 25°

54. Calcule m∠ABD si AC = BD



A) 15° B) 12° C) 14°
D) 16° E) 18°

55. En un triángulo ABC: (AB = c, AC = b y BC = a)
Se cumple que: $b^2 + c^2 = a^2 + \frac{3}{2}bc$
Determine el valor de $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$.

A) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ B) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$
D) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$ E) $\sqrt{7}$

56. En un triángulo ABC, simplifique:
$(a+b)^2[1-\cos C] + (a-b)^2[1+\cos C]$

A) $2c^2$ B) $2a^2$ C) $3b^2$ D) $2b^2$ E) c^2

57. Las medidas de los lados de un triángulo son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble del menor. Halle el coseno del ángulo de medida intermedia.

A) 1/4 B) 4/9 C) 7/8
D) 9/16 E) 13/16

58. En un triángulo ABC se cumple que:

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = 6;\ a = 3b$$

Determine 19tanB − 17tanA.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

59. Para un triángulo ABC, encuentre el equivalente de
$\left(\frac{b-c}{a}\right)\cos^2\frac{A}{2} + \left(\frac{c-a}{b}\right)\cos^2\frac{B}{2} + \left(\frac{a-b}{c}\right)\cos^2\frac{C}{2}$

A) 0 B) 1
C) senA + senB + senC D) −1
E) a + b + c

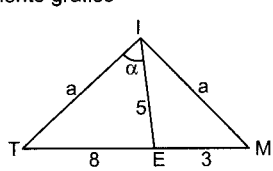
60. En un triángulo ABC (recto en C) sus catetos a y b verifican la condición.

$$a - b = (2-\sqrt{3})a + (2-\sqrt{3})b$$

Calcule la medida del ángulo BAC.

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

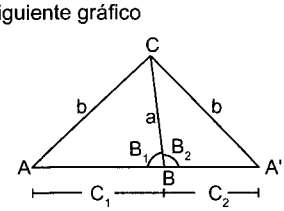
61. Del siguiente gráfico



determine el valor de: $a\cos^2\alpha$

A) 1/6 B) 1/10 C) 1/7
D) 1/12 E) 1/9

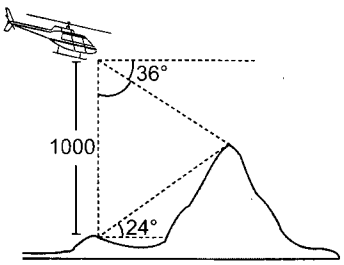
62. En el siguiente gráfico



Se conoce que a, b, $\angle A \wedge \angle B_1$. Si $C_1 > C_2$ entonces, se cumple que

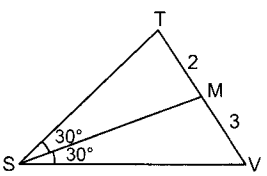
A) $C_1 + C_2 = 2a\cos(B_1)$ B) $C_1 - C_2 = 2b\cos(A)$
C) $C_1 + C_2 = 2a\cos(A)$ D) $C_1 - C_2 = 2a\cos(B_1)$
E) $C_1 + C_2 = 2b\cos(B_1)$

63. Un helicóptero vuela a una altitud de 1000 pies sobre la cima de una montaña que mide 5210 pies. Desde lo alto de esta montaña y desde el helicóptero se ve una segunda montaña más elevada que la primera. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 36°, y desde la cima de la primera montaña el ángulo de elevación es de 24°. Calcule la distancia de pico a pico de las montañas en pies.



A) $\frac{500}{3}\sqrt{15}$ B) $\frac{500}{3}\sqrt{10}$ C) 2000
D) $\frac{500}{3}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ E) 1000

64. A partir del gráfico, calcule el valor de la tangente del ángulo STV si TM = 2 y MV = 3



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

65. En un triángulo de lados 7, 8 y 9 m se traza la mediana relativa al lado de 8 m. Determine el coseno del ángulo comprendido entre el lado de 7 m y la mediana trazada.

A) 41/49 B) 43/49 C) 45/49
D) 46/49 E) 47/49

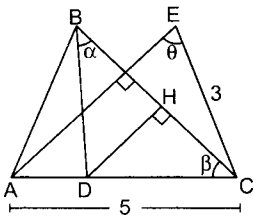
66. En el triedro O–ABC, las caras AOB y AOC miden 45°. Si $P \in \overline{OA}$, $Q \in \overline{OC}$ y $R \in \overline{OB}$, tales que $QP \perp OA$, $RP \perp OA$, $QR = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ y OP = 2, entonces, la medida del diedro OA es

A) 135° B) 75° C) 120°
D) 150° E) 165°

67. Se tiene una pirámide regular E-ABCD, con base cuadrangular. Sea MNPQ la sección determinada por un plano secante a la superficie lateral. Si EM = 3, EQ = 5 y EP = 6, entonces, EN es igual a

A) 2,72 B) 2,55 C) 3,11
D) 3,55 E) 4,11

68. Del gráfico



Halle $T = \frac{8\text{sen}\theta\text{sen}\alpha}{10 - 6\text{sen}2\theta}$, si $\beta - \theta = 30°$

BD = K, AC = 5 y BH = HC

A) 1/K B) K^2 C) $1/K^2$
D) K E) $\sqrt{K}$

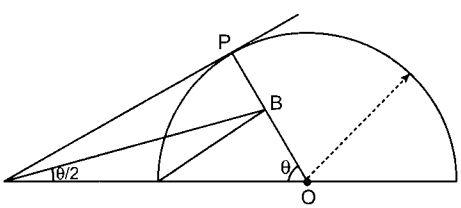
69. A partir de la siguiente igualdad

$$\frac{aA}{b\text{sen}C} + \frac{bB}{c\text{sen}A} + \frac{cC}{a\text{sen}B} = (P - A)\cot A + (Q - B)\cot B + (R - C)\cot C$$

calcule P + Q + R, siendo A, B y C los ángulos internos de un triángulo ABC.

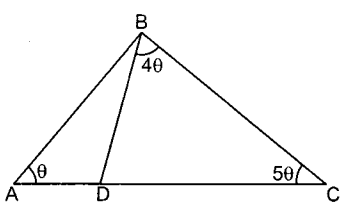
A) 2π B) 3π C) 4π
D) π E) $\frac{5\pi}{2}$

70. Del gráfico, calcule
$E = \tan^2\theta\sec\theta$; siendo O centro de la circunferencia



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

71. Del gráfico mostrado, determine BC, si
$AB = \sqrt{6} + \sqrt{2} \wedge CD = 3 - \sqrt{3}$

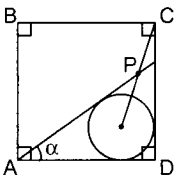


A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}+1$
D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

72. Halle la cosecante del menor ángulo de un triángulo, si el coseno del mayor ángulo de este triángulo de lados consecutivos es 1/5

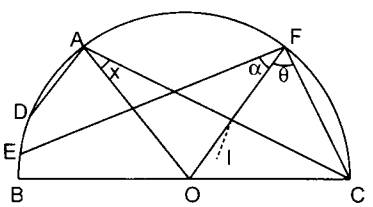
A) $\frac{7\sqrt{6}}{12}$ B) $\frac{7\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{7\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{7\sqrt{6}}{5}$ E) $\frac{7\sqrt{6}}{8}$

73. Si ABCD es un cuadrado, halle $E = 2\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$
Si CP = 2PO = 2.



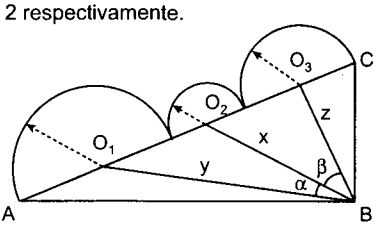
A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

74. En la figura adjunta, BC es el diámetro de la semicircunferencia con centro O. A es un punto sobre la semicircunferencia, tal que m∠AOC > 60°. EF es la cuerda, que a su vez es mediatriz de AO. D es el punto medio del arco AB, siendo OI paralelo a AD.
Halle el valor de $T = \frac{\operatorname{sen}\alpha\csc\theta + \cos\theta\sec\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\theta-x)}$



A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 3
D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

75. Sea el triángulo ABC (B = 90°), tenemos que O_1, O_2 y O_3 centros de semicircunferencia de radios 3, 1 y 2 respectivamente.

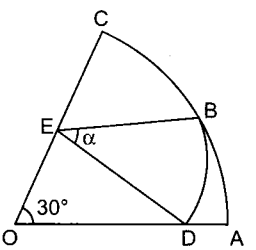


El área del triángulo O_1BO_3 es 30, calcule

$$\sqrt{2}xyz\left[\frac{1}{z}\operatorname{sen}(\alpha+45°)^2+\frac{1}{y}\operatorname{sen}(\beta+45°)^2+\frac{1}{\sqrt{2}x}\cos(\alpha+\beta)\right]-x^2-y^2-z^2$$

A) 23 B) $40+3\sqrt{6}$ C) $37+\sqrt{2}$
D) 67 E) 50

76. AOC y BED, son sectores circulares
EO = 2CE, ED = $\sqrt{2}$CE; halle $\csc(135°-3\alpha)$



A) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{32\sqrt{2}}{45}$ C) $\frac{16\sqrt{2}}{21}$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{16\sqrt{2}}{15}$

CLAVES

1. B	11. D	21. A	31. D	41. E	51. C	61. C	71. A
2. C	12. B	22. D	32. E	42. C	52. D	62. D	72. A
3. A	13. B	23. D	33. C	43. D	53. A	63. D	73. B
4. B	14. A	24. D	34. C	44. C	54. E	64. D	74. D
5. B	15. C	25. B	35. D	45. D	55. A	65. A	75. A
6. C	16. C	26. E	36. C	46. B	56. A	66. D	76. B
7. D	17. C	27. B	37. A	47. C	57. D	67. A	
8. B	18. D	28. D	38. D	48. C	58. D	68. A	
9. C	19. E	29. D	39. D	49. B	59. A	69. B	
10. B	20. E	30. B	40. A	50. B	60. D	70. B	

Geometría analítica Coordenadas polares

capítulo 12

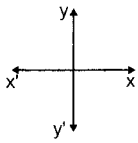
Joseph Diaz Gergonne (Nancy, 19 de junio de 1771-Montpellier, 4 de mayo de 1859) fue un matemático y lógico francés. En 1791, Gergonne fue capitán del ejército francés y participó en la batalla de Valmy (20 de septiembre de 1792) y en la invasión francesa de España (1794). Al pasar a la vida civil fue profesor de Matemáticas Trascendentales en la recién creada Ecole Centrale. En 1810, Gergonne funda la revista *Annales de mathématiques pures et appliquées* que en la época fue conocida como *Annales de Gergonne*, publicación que se mantuvo por 22 años hasta su retiro. Fue también profesor y más tarde rector de la Universidad de Montpellier.

Joseph Gergonne introdujo la terminología de «coordenadas polares». Además, descubrió el principio de dualidad en Geometría proyectiva, cuando notó que cada teorema en el plano conectando puntos y líneas tenía un correspondiente con puntos y líneas intercambiados, siempre que el teorema no hiciera intervenir nociones métricas. En 1816, encontró una solución elegante al problema de Apolonio: que consiste en encontrar una circunferencia que toque otras tres circunferencias dadas.

Fuente: Wikipedia

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

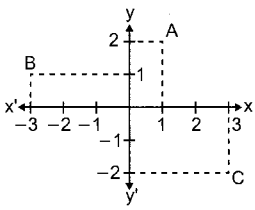
$\overleftrightarrow{x'x}$ Eje de Abscisas (eje X)
$\overleftrightarrow{y'y}$ Eje de Ordenadas (eje Y)
O Origen



Ejemplo:

Del gráfico adjunto determinar las coordenadas de A, B y C

Coordenadas de A: (1; 2)
Coordenadas de B: (−3; 1)
Coordenadas de C: (3; −2)



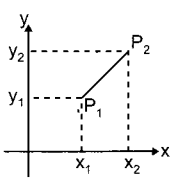
Nota

Si un punto pertenece al eje X, su ordenada es igual a cero. Si un punto pertenece al eje Y, su abcisa es igual a cero.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos cualesquiera del plano es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de su diferencia de abscisas y diferencia de ordenadas.

$$\boxed{d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



Demostración:

Sean $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ los puntos tal como se indica en la figura. Observar que:

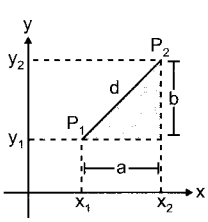
$a = x_2 - x_1 \wedge b = y_2 - y_1$

Además: $d^2 = a^2 + b^2$

(Teorema de Pitágoras)

Entonces: $d^2 = (x^2 - x^1)^2 + (y^2 - y^1)^2$

$\therefore\ d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Aplicaciones:

1. Hallar la distancia entre los puntos A y B, si: A(3; 8); B(2; 6)

   Resolución:

   $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (8-6)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{5}$

2. Hallar la distancia entre los puntos P y Q, si: P(−2; 5); Q(3; −1)

   Resolución:

   $PQ = \sqrt{(-2-3)^2 + [5-(-1)]^2} \Rightarrow PQ = \sqrt{61}$

Nota

Si P_1 y P_2 tienen la misma abscisa entonces la distancia entre dichos puntos se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia de ordenadas.

Ejemplo:

A(5; 6) y B(5; 2) ⇒ AB = |6 − 2| ⇒ AB = 4
C(−3; −2) y D(−3; 5) ⇒ CD = | −1 − 5| ⇒ CD = 6
E(5; 8) y F(5; −2) ⇒ EF = |8 − (−2)| ⇒ EF = 10

Si P_1 y P_2 tienen la misma ordenada entonces la distancia entre estas se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia de abscisas.

Ejemplo:

A(8; −1) y B(1; −1) ⇒ AB = |8 −1| ⇒ AB = 7
C(−4; 7) y D(−9; 7) ⇒ CD = |−4 − (−9)| ⇒ CD = 5

Aplicaciones:

1. Demostrar que los puntos A(−2; −1), B(2; 2) y C(5; −2) son los vértices de un triángulo isósceles.

   Resolución:

   Calculamos la distancia entre dos puntos.

   $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{25}$

   $\Rightarrow AB = 5$

   $AC = \sqrt{(-2-5)^2 + [-1-(-2)]^2} \Rightarrow AC = \sqrt{50}$

   $\Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$

   $BC = \sqrt{(2-5)^2 + [2-(-2)]^2} \Rightarrow BC = \sqrt{25}$

   $\Rightarrow BC = 5$

   Observamos que AB = BC, entonces ABC es un triángulo isósceles.

2. Hallar el área de la región determinada al unir los puntos: A(−4; 1), B(4; 1), C(0; 3).

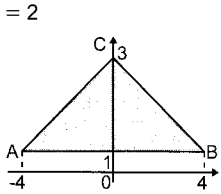
   Resolución:

   Al unir dichos puntos se forma un triángulo. (ver figura)

   $S_{\Delta ABC} = \dfrac{ABh}{2}$ ...(1)

   AB = |−4 −4| = 8

   h = |3 − 1| = 2



Reemplazando en (1): $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(8)(2)}{2}$

$$S_{\Delta ABC} = 8$$

3. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: A(−3; −1), B(0; 3), C(3; 4) y D(4; −1)

Resolución:

$AB = \sqrt{(-3-0)^2+(-1-3)^2} = 5$

$BC = \sqrt{(0-3)^2+(3-4)^2} = \sqrt{10}$

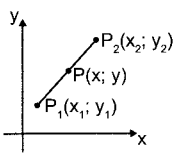
$CD = \sqrt{(3-4)^2+[4-(-1)]^2} = \sqrt{26}$

$DA = \sqrt{[4(-3)]^2+[-1-(-1)]^2} = 7$

El perímetro es igual a: $\sqrt{26}+\sqrt{10}+12$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

- Sean: $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ los extremos de un segmento.
- Sea: P(x; y) un punto (colineal con P_1 y P_2), tal que divide al segmento P_1P_2 en una razón "r".



Es decir: $r = \dfrac{P_1P}{PP_2}$

entonces las coordenadas de P son:

$x = \dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$ $\qquad$ $y = \dfrac{y_1+ry_2}{1+r}$

Nota

Si P es externo al segmento P_1P_2, entonces la razón (r) es negativa.

Aplicaciones:

1. Los puntos extremos de un segmento son A(2; 4) y B(8; −4). Hallar las coordenadas de un punto P, tal que: AP/PB = 2

Resolución:

Sean (x ; y) las coordenadas de P, entonces de la fórmula anterior se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a_1+rb_1}{1+r} = \dfrac{2+2(8)}{1+2} \Rightarrow x = \dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{a_2+rb_2}{1+r} = \dfrac{4+2(-4)}{1+2} \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right\} P\left(\dfrac{10}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$$

2. Los puntos extremos de un segmento son A(− 4; 3) y B(6; 8). Hallar las coordenadas de un punto P, tal que: BP/PA = 1/3

Resolución:

Sean las coordenadas de P: (x; y) entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{b_1+ra_1}{1+r} = \dfrac{6+\left(\frac{1}{3}\right)(-4)}{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{b_2+ra_2}{1+r} = \dfrac{8+\left(\frac{1}{3}\right)(3)}{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow y = \dfrac{27}{4} \end{array}\right\} P\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{27}{4}\right)$$

3. A(−2; 3); B(6; −3) y P(x; y) son tres puntos colineales, si $\dfrac{AP}{PB} = -2$, hallar: x + y

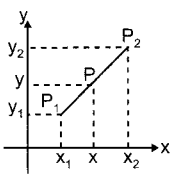
Resolución:

Del dato: r = −2, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a_1+rb_1}{1+r} = \dfrac{-2+(-2)(6)}{1+(-2)} \Rightarrow x = 14 \\ y = \dfrac{a_2+rb_2}{1+r} = \dfrac{3+(-2)(-3)}{1+(-2)} \Rightarrow y = -9 \end{array}\right\} x+y = 5$$

Punto medio de un segmento

Dado un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, si P(x; y) es el punto medio del segmento, entonces $P_1P = PP_2$



Por lo tanto: $\dfrac{P_1P}{PP_2} = 1 = r$

Reemplazando en la fórmula anterior se obtiene:

$$\boxed{x = \dfrac{x_1+x_2}{2}} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{y_1+y_2}{2}}$$

Aplicaciones:

1. Hallar las coordenadas del punto medio P de un segmento cuyos extremos son A(2; 3) y B(4; 7)

Resolución:

Sea P(x; y) el punto medio de AB, entonces:

$$x = \dfrac{2+4}{2} = 3 \wedge y = \dfrac{3+7}{2} = 5 \Rightarrow P(3; 5)$$

2. Si P(x; y) es el punto medio de CD, hallar x − y C(− 5; 6) y D(− 1; −10)

Resolución:

$$x = \dfrac{-5+(-1)}{2} \Rightarrow x = -3$$

$$y = \dfrac{6+(-10)}{2} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x - y = -1$$

3. El extremo de un segmento es (1; −9) y su punto medio es P(−1; −2). Hallar las coordenadas del otro extremo.

Resolución:

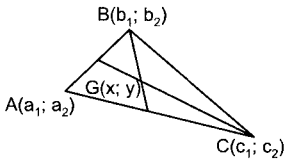
Sean $(x_2; y_2)$ las coordenadas del extremo que se desea hallar, como P(−1; −2) es el punto medio, se cumple que:

$$-1 = \dfrac{1+x_2}{2} \Rightarrow x_2 = -3$$

$$-2 = \dfrac{-9+y_2}{2} \Rightarrow y_2 = 5$$

Las coordenadas del otro extremo son: (− 3; 5)

Coordenadas del baricentro de un triángulo



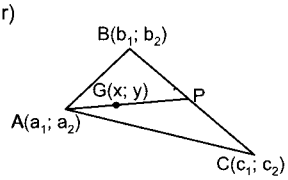
Dado un triángulo cuyas coordenadas son:
$A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ las coordenadas del baricentro $G(x ; y)$ se determinan de la siguiente manera:

$$\boxed{x = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}} \qquad \boxed{y = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}}$$

Demostración:
Se traza la mediana AP (ver figura) como P es punto medio de BC sus coordenadas son:

$$P\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$$

Sea G(x; y) el baricentro, entonces se cumple que:
$\frac{AG}{GP} = 2\ (= r)$



Aplicamos la fórmula de la división de un segmento.

$$x = \frac{a_1 + r\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)}{1 + r} = \frac{a_1 + 2\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)}{1 + 2}$$

$$x = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$$

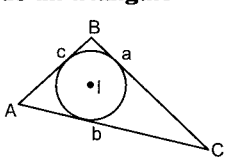
$$y = \frac{a_2 + r\left(\frac{b_2 + c_2}{2}\right)}{1 + r} = \frac{a_2 + 2\left(\frac{b_2 + c_2}{2}\right)}{1 + 2}$$

$$y = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

Coordenadas del incentro de un triángulo

Dado un triángulo ABC cuyos vértices tienen por coordenadas:

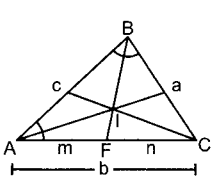
$A(x_a; y_a)$
$B(x_b; y_b)$
$C(x_c; y_c)$



Las coordenadas del incentro I(x; y) se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{x = \frac{ax_a + bx_b + cx_c}{a + b + c}} \qquad \boxed{y = \frac{ay_a + by_b + cy_c}{a + b + c}}$$

Demostración:



Sean las coordenadas de los vértices del triángulo:
$A(x_a; y_a)$, $B(x_b; y_b)$, $C(x_c; y_c)$
Sea I(x; y) el incentro
Como BF es bisectriz de B, aplicamos la propiedad de la bisectriz en el triángulo ABC:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{a} = r \qquad ...(1)$$

La misma propiedad se aplica en los triángulos ABF y CBF:

$$\triangle ABF: \frac{BI}{IF} = \frac{c}{m}; \triangle CBF: \frac{BI}{IF} = \frac{a}{n}$$

$$\frac{BI}{IF} = \frac{c}{m} = \frac{a}{n}; \frac{BI}{IF} = \frac{c + a}{m + n} \Rightarrow \frac{BI}{IF} = \frac{c + a}{b} = r_1 \qquad ...(2)$$

Aplicamos la fórmula de división de un segmento en AC. De (1) : $\frac{AF}{FC} = \frac{m}{n} = \frac{c}{a} = r$

$$x_F = \frac{x_a + rx_c}{1 + r} = \frac{x_a + \left(\frac{c}{a}\right)x_c}{1 + \frac{c}{a}} \Rightarrow x_F = \frac{ax_a + cx_c}{a + c}$$

$$y_F = \frac{y_a + ry_c}{1 + r} = \frac{y_a + \left(\frac{c}{a}\right)y_c}{1 + \frac{c}{a}} \Rightarrow y_F = \frac{ay_a + cy_c}{a + c}$$

Ahora aplicamos la misma fórmula en BF.
De (2), sabemos que:

$$\frac{BI}{IF} = \frac{c + a}{b} = r_1$$

$$x = \frac{x_b + r_1 x_F}{1 + r_1} = \frac{x_b + \left(\frac{c + a}{b}\right)\left(\frac{ax_a + cx_c}{a + c}\right)}{1 + \frac{c + a}{b}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{bx_b + ax_a + cx_c}{b + c + a}$$

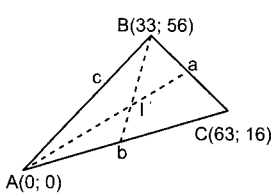
$$y = \frac{y_b + r_1 y_F}{1 + r_2} = \frac{y_b + \left(\frac{a + c}{b}\right)\left(\frac{ay_a + cy_c}{a + c}\right)}{1 + a + \frac{c}{b}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{by_b + ay_a + cy_c}{b + a + c}$$

Finalmente ordenando se obtiene que las coordenadas del incentro son:

$$x = \frac{ax_a + bx_b + cx_c}{a + b + c} \qquad y = \frac{ay_a + by_b + cy_c}{a + b + c}$$

Ejemplo:
Hallar las coordenadas del baricentro y del incentro del triángulo ABC: A(0; 0), B(33; 56), C(63; 16)



Resolución:
Triángulo ABC: A(0; 0), B(33; 56), C(63; 16) coordenadas del baricentro G(x; y)

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{0+33+63}{3} = 32 \\ y = \dfrac{0+56+16}{3} = 24 \end{array}\right\} G(x;\, y) = G(32;\, 24)$$

Coordenadas del incentro $I(x_i\,;\, y_i)$ calculamos primero la longitud de cada lado.

$$a = \sqrt{(63-33)^2 + (56-16)^2} = 50$$

$$b = \sqrt{(63-0)^2 + (16-0)^2} = 65$$

$$c = \sqrt{(33-0)^2 + (56-0)^2} = 65$$

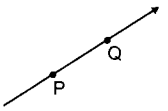
$$x_1 = \frac{50(0) + 65(33) + 65(63)}{50+65+65} = \frac{6240}{180} = \frac{104}{3}$$

$$y_1 = \frac{50(0) + 65(56) + 65(16)}{50+65+65} = \frac{4680}{180} = 26$$

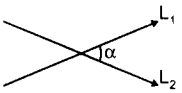
$$\Rightarrow I(x_i;\, y_i) = I\left(\frac{104}{3};\, 26\right)$$

ÁNGULO DE INCLINACIÓN, PENDIENTE DE UNA RECTA Y ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

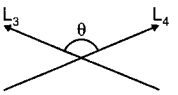
En geometría analítica todas las rectas deben tener una orientación, por ejemplo en la figura adjunta, la recta PQ se considera orientada de P hacia Q (orientación que está indicada por la flecha).



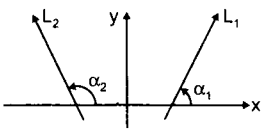
Cuando dos rectas orientadas se intersectan, se forman cuatro ángulos; se llama "ángulo de dos rectas orientadas" al formado por los dos lados que se alejan del vértice.



α es el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2.



θ es el ángulo que forman las rectas L_3 y L_4.



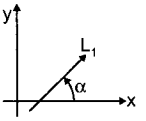
Observar que cuando se habla de ángulo entre dos rectas se considera a los ángulos positivos menores o iguales a 180°.

Se denomina "ángulo de inclinación" de una recta al que forma la dirección positiva del eje de abscisas y la recta cuando ésta se considera orientada hacia arriba.

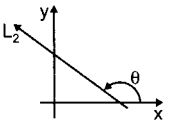
En la figura adjunta, α_1 es el ángulo de inclinación de L_1 y α_2 es el ángulo de inclinación de L_2.

Si α es el ángulo de inclinación de un recta, entonces: $0° \leq \alpha \leq 180°$

Se denomina "pendiente o coeficiente angular" de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. Generalmente la pendiente se representa por la letra "m", dicho valor puede ser positivo o negativo, dependiendo si el ángulo de inclinación es agudo u obtuso respectivamente.



Pendiente de L_1:
$m_1 = \tan\alpha$
En este caso $m_1 > 0$



Pendiente de L_2:
$m = \tan\theta$
En este caso $m < 0$

Nota

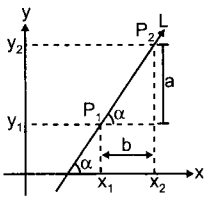
La pendiente de las rectas horizontales es igual a cero (y viceversa). Las rectas verticales no tienen pendiente.

Otra manera de hallar la pendiente de una recta es la siguiente:

Sean $P_1(x_1;\, y_1)$ y $P_2(x_2;\, y_2)$ dos puntos de la recta, entonces la pendiente (m) se calcula aplicando la fórmula:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x}}$$

Demostración:



Observamos de la figura que α es el ángulo de inclinación de L, entonces: $m = \tan(\alpha)$ ...(1)

De la figura también se observa que: $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ ...(2)

Pero: $a = y_2 - y_1$; $b = x_2 - x_1$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aplicaciones:

1. Hallar la pendiente de una recta que pasa por $(2;\, -2)$ y $(-1;\, 4)$

   Resolución:

   Sea $P_1(2;\, -2)$ y $P_2(-1;\, 4)$

   Entonces:

   $$m = \frac{4-(-2)}{(-1)-(2)} = \frac{6}{-3} \Rightarrow m = -2$$

2. Una recta intersecta al eje de abcisas en $(-5;\, 0)$ y al eje de ordenadas en $(0;\, 7)$, hallar su pendiente.

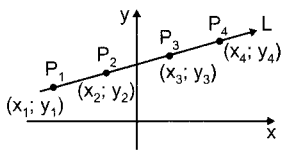
   Resolución:

   Elegimos: $P_1(-5;\, 0)$ y $P_2(0;\, 7)$, entonces:

   $$m = \frac{7-0}{0-(-5)} \Rightarrow m = \frac{7}{5}$$

Nota

- Si dos rectas son paralelas tienen el mismo ángulo de inclinación, por lo tanto tienen igual pendiente.
- Todos los segmentos contenidos en una (misma) recta no vertical tienen igual pendiente.
  En la figura adjunta de una recta L se toman cuatro puntos; entonces se cumple que:



$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} \ldots$$

Aplicaciones:

1. Una recta pasa por los puntos (2; 3); (6; 8) y (10; b). Hallar el valor de "b".

   Resolución:

   Como la recta pasa por los puntos (2; 3) y (6; 8) entonces su pendiente es:

   $m = \frac{8-3}{6-2} \Rightarrow m = \frac{5}{4}$ ...(1)

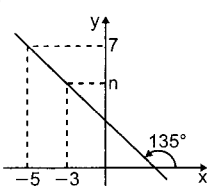
   Como la recta pasa por (2; 3) y (10; b) entonces su pendiente es:

   $m = \frac{b-3}{10-2} \Rightarrow m = \frac{b-3}{8}$ ...(2)

   De (1) y (2): $\frac{b-3}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = 13$

2. El ángulo de inclinación de una recta mide 135°, si pasa por los puntos (−3; n) y (−5; 7), hallar el valor de "n".

   Resolución:



   Como el ángulo de inclinación mide 135°, entonces la pendiente es:

   $m = \tan 135° \Rightarrow m = -1$

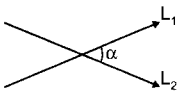
   Conociendo dos puntos de la recta también se puede hallar la pendiente:

   $m = \frac{7-n}{-5-(-3)} \Rightarrow m = \frac{7-n}{-2}$

   Pero m = −1, entonces:

   $-1 = \frac{7-n}{-2} \Rightarrow 2 = 7 - n \Rightarrow n = 5$

Al comenzar este punto se mencionó en qué consiste el **ángulo entre dos rectas** pues bien ahora indicamos como se calcula dicho ángulo conociendo las pendiente de las rectas que lo forman.



$$\boxed{\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

m_1 es la pendiente de la recta final (L_1) y m_2 es la pendiente de la recta inicial (L_2). Denominemos a L_1 **recta final**, porque de acuerdo con la figura el lado final del ángulo α está en L_1, lo mismo sucede con L_2.

Aplicaciones:

1. Calcular el ángulo agudo formado por dos rectas cuyas pendiente son: −2 y 3.

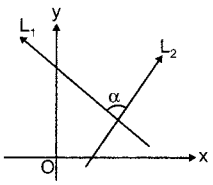
   Resolución:

   Sea: $m_1 = -2$ y $m_2 = 3$

   Entonces:

   $\tan\alpha = \frac{-2-3}{1+(-2)(3)}$

   $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$



2. Dos rectas se intersectan formando un ángulo de 135°, sabiendo que la recta final tiene pendiente igual a −3. Calcular la pendiente de la recta inicial.

   Resolución:

   Sea: m_1: Pendiente inicial y m_2: Pendiente final = −3

   Entonces:

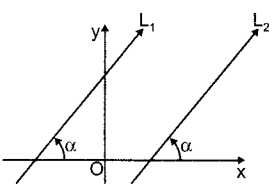
   $\tan 135° = \frac{-3-m_1}{1+(-3)m_1} \Rightarrow -1 = \frac{-3-m_1}{1-3m_1}$

   $-1 + 3m_1 = -3 - 3m_1 \Rightarrow 4m_1 = -2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$

Propiedades:

1.° Dos rectas (no verticales) L_1 y L_2 son paralelas si y solo si tienen igual pendiente.

$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$



Demostración:

En la figura es fácil observar que el ángulo de inclinación de L_1 es α y de L_2 también es α puesto que son paralelas, entonces:

$m_1 = \tan\alpha$ $\quad m_1 = m_2$

$m_2 = \tan\alpha$

2.° Dos rectas L_1 y L_2 (no verticales) son perpendiculares si y solo si el producto de su pendiente es igual a −1

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

Demostración:

De la figura se observa que:

α_1 es ángulo de inclinación de $L_1 \Rightarrow m_1 = \tan\alpha_1$

α_2 es ángulo de inclinación de $L_2 \Rightarrow m_2 = \tan\alpha_2$

Además, $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$ (ángulo exterior)

$\Rightarrow \tan\alpha_2 = \underbrace{\tan(90° + \alpha_1)}_{-\cot\alpha_1}$

$\Rightarrow \tan\alpha_2 = -\cot\alpha_1 \Rightarrow \tan\alpha_2 = -\frac{1}{\tan\alpha_1}$

$\Rightarrow \tan\alpha_2 \tan\alpha_1 = -1 \Rightarrow m_2 m_1 = -1$

Aplicaciones:

1. La recta L_1 pasa por (2; 3) y (5; 8) y la recta L_2 pasa por (1; −1) y (a; 6). Hallar el valor de "a" sabiendo que L_1 y L_2 son paralelas.

   Resolución:

   Como L_1 pasa por (2; 3) y (5; 8) entonces:

   $m_1 = \frac{8-3}{5-2} = \frac{5}{3}$

   Como L_2 pasa por (1; −1) y (a; 6) entonces:

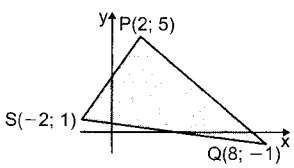
   $m_2 = \frac{6-(-1)}{a-1} = \frac{7}{a-1}$

   Como $L_1 // L_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{7}{a-1}$

   $\Rightarrow a = \frac{26}{5}$

2. Demostrar que los puntos P(2; 5); Q(8; −1) y S(−2; 1) determinan un triángulo rectángulo.

   Demostración:



   Hallamos la pendiente de SP.

   $m_{SP} = \frac{5-1}{2-(-2)} \Rightarrow m_{SP} = 1$

   Hallamos la pendiente de SQ.

   $m_{SQ} = \frac{-1-1}{8-(-2)} \Rightarrow m_{SQ} = -\frac{1}{5}$

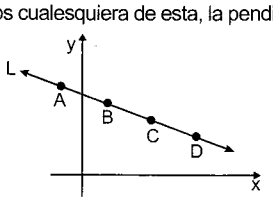
   Hallamos la pendiente de PQ.

   $m_{PQ} = \frac{5-(-1)}{2-(8)} \Rightarrow m_{PQ} = -1$

   Observamos que: $m_{SP}\, m_{PQ} = -1$, entonces dichos segmento son perpendiculares, por lo tanto PQS determinan un triángulo rectángulo (recto en P).

LA RECTA

La recta es un conjunto de puntos, tales que cuando se toman dos puntos cualesquiera de esta, la pendiente no varía.



Por jemplo, si A, B, C y D son puntos de la recta L, entonces se cumple que:

$m_{AB} = m_{CD} = m_{BD} = ... = m_L$

Para determinar la ecuación de una recta debemos de conocer su pendiente y un punto de paso de la recta, o también dos puntos por donde pasa la recta.

Ecuación de una recta cuya pendiente es m y un punto de paso es $P(x_1; y_1)$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de una recta cuya pendiente es −3 y pasa por (5; 8).

   Resolución:

   Datos:

   m = −3 (Pendiente) y P(5; 8)(Punto de paso)

   Ecuación:

   $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = -3(x - 5)$

2. Hallar la ecuación de una recta que pasa por (−3; −4) y cuyo ángulo de inclinación mide 60°.

   Resolución:

   Sabemos que la pendiente de una recta es igual a la tangente de su ángulo de inclinación.

   $m = \tan 60° \Rightarrow m = \sqrt{3}$

   $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-4) = \sqrt{3}\,[x - (-3)]$

   $\Rightarrow y + 4 = \sqrt{3}\,(x + 3)$

Ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso $P_1(x_1; y_1)$ y $P(x_2; y_2)$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Aplicación:

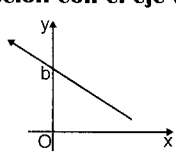
Hallar la ecuación de una recta que pasa por los puntos (5; 6) y (9; 10)

Resolución:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = \left(\frac{10-6}{9-5}\right)(x - 5)$

La ecuación es: $y - 6 = x - 5$

Ecuación de una recta cuya pendiente es m e intersección con el eje de ordenadas es (0; b)



$$\boxed{y = mx + b}$$

Aplicación:

Hallar la ecuación de una recta cuyo ángulo de inclinación mide 45° e interseca al eje y en (0; 4).

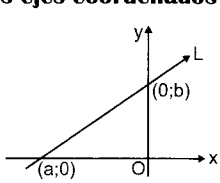
Resolución:

$m = \tan 45° \Rightarrow m = 1$

$y = m + b \Rightarrow y = x + 4$

$\therefore b = 4$

Ecuación de una recta conociendo las intersecciones con los ejes coordenados



A esta ecuación se le denomina **ecuación simétrica de la recta.**

Aplicaciones:

1. Las intersecciones de una recta con los ejes son (−5; 0) y (0; 6); hallar su ecuación.

   Resolución:

   Del dato observamos que: $a = -5$ y $b = 6$

   entonces la ecuación de la recta es: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{6} = 1$

2. Hallar la ecuación simétrica de una recta, sabiendo que pasa por (−3; 8) y su pendiente es $-\frac{4}{3}$

   Resolución:

   $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = -\frac{4}{3}[x - (-3)]$

   $3y - 24 = -4x - 12 \Rightarrow 3y + 4x = 24 - 12$

   $\Rightarrow 3y + 4x = 12$

   $\frac{4x}{12} + \frac{3y}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

Ecuación general de la recta

La forma general de la ecuación de una recta es:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Donde la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación general de una recta que pasa por el punto (2; 3) y su pendiente es 1/2.

   Resolución:

   $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

   $\Rightarrow 2y - 6 = x - 2$

   La ecuación es: $x - 2y + 4 = 0$

2. La ecuación de una recta es: $2x + 3y - 16 = 0$, hallar su pendiente y los puntos de intersección con los ejes coordenados.

   Resolución:

   Ecuación: $2x + 3y - 16 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 16$

   $y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \Rightarrow$ la pendiente es: $-\frac{2}{3}$

   Intersección con el eje Y: en este caso $x = 0$, reemplazamos en la ecuación.

   $2(0) + 3(y) - 16 = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{3}$

   Punto de intersección con el eje Y: $\left(0; \frac{16}{3}\right)$

   Intersección con el eje X: en este caso $y = 0$, reemplazamos en la ecuación:

   $2x + 3(0) - 16 = 0 \Rightarrow x = 8$

   Punto de intersección con eje X: (8; 0)

3. La ecuación de una recta L es: $4x - 5y + 17 = 0$, si los puntos: A(2; a) y B(b; 1) pertenecen a dicha recta, hallar la distancia entre los puntos A y B.

   Resolución:

   Ecuación de la recta L: $4x - 5y + 17 = 0$

   Como: $A \in L \Rightarrow 4(2) - 5(a) + 17 = 0 \Rightarrow a = 5$

   Como: $B \in L \Rightarrow 4(b) - 5(1) + 17 = 0 \Rightarrow b = -3$

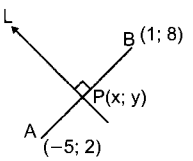
   Luego: A(2; 5) y B(−3; 1)

   Distancia entre A y B:

   $d = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{41}$

4. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento: AB, si A(−5; 2) y B(1; 8).

   Resolución:



   Primer método:

   Sea L la mediatriz de AB

   P es el punto medio de AB, entonces sus coordenadas son:

   $x = \frac{-5+1}{2} - 2;\ y = \frac{2+8}{2} = 5$

   Luego: P(−2; 5)

   Hallamos la pendiente de AB

   $\Rightarrow m_{AB} = \frac{8-2}{1-(-5)} = 1$

   Como L es perpendicular a AB, entonces se cumple que:

   $m_L m_{AB} = -1 \Rightarrow m_L(1) = -1 \Rightarrow m_L = -1$

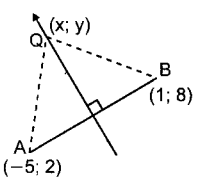
   Ecuación de L:

   $y - 5 = (-1)[x - (-2)] \Rightarrow y - 5 = -(x + 2)$

   $y + x - 3 = 0$

   Segundo método:

   Como L es mediatriz de AB, entonces se cumple que:



   $QA = QB$ ...(1)

   $QA = \sqrt{(x+5)^2 + (y-2)^2}$

   $QB = \sqrt{(x-1)^2 + (y-8)^2}$

   Reemplazando en (1) y elevando al cuadrado:

   $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 8)^2$

   $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 16y + 64$

   Simplificando:

   $10x - 4y + 29 = -2x - 16y + 65$

   $x + y - 3 = 0$

5. Hallar el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son:

   L_1: $3x + y - 9 = 0$; L_2: $4x - 3y + 1 = 0$

   Resolución:

   Como el punto de intersección pertenece a ambas rectas, entonces debe satisfacer a ambas ecuaciones. Por lo tanto para determinarlo se debe resolver el sistema de ecuaciones que se obtienen de L_1 y L_2.

L_1: $3x + y - 9 = 0 \Rightarrow 3x + y = 9$
L_2: $4x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 4x - 3y = -1$
Resolvemos el sistema de ecuaciones:
$9x + 3y = 27$
$4x - 3y = -1$
$13x = 26 \Rightarrow x = 2$, reemplazamos en alguna de las ecuaciones: $4(2) - 3y = -1 \Rightarrow y = 3$
El punto de intersección es: (2; 3)

6. Determinar cuáles rectas son paralelas o perpendiculares.

L_1: $6x + 8x - 15 = 0$	L_4: $3x + 6y - 15 = 0$
L_2: $5y - 3x + 7 = 0$	L_5: $4x - 3y + 23 = 0$
L_3: $2y + x - 9 = 0$	L_6: $5x + 3y - 9 = 0$

Resolución:

Para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares, debemos recordar las propiedades de pendientes.

- Si son paralelas tienen igual pendiente.
- Si son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es igual a -1.

Además, si la ecuación es la de forma:

$Ax + By + C = 0$, entonces $m = -\frac{A}{B}$

L_1: $6x + 8y - 15 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

L_2: $-3x + 5y + 7 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$

L_3: $x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow m_3 = \frac{-1}{2}$

L_4: $3x + 6y - 15 = 0 \Rightarrow m_4 = \frac{-1}{2}$

L_5: $4x - 3y + 23 = 0 \Rightarrow m_5 = \frac{4}{3}$

L_6: $5x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow m_6 = \frac{-5}{3}$

Observamos que: $m_3 = m_4$, entonces: L_3 y L_4 son rectas paralelas.
$m_1m_5 = -1 \wedge m_2m_6 = -1 \Rightarrow L_1 \perp L_5 \wedge L_2 \perp L_6$

Ecuación normal de la recta

Dada la ecuación general de una recta: $Ax + By + C = 0$

su ecuación normal es: $\boxed{\frac{A}{r}x + \frac{B}{r}y + \frac{C}{r} = 0}$

Donde: $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ y el signo que precede a "r" se elige de la siguiente manera:
(*) Si $C \neq 0$, r es de signo opuesto al signo de C.
(*) Si $C = 0$, y $B \neq 0$; r y B tienen el mismo signo.
(*) Si $C = 0$, y $B = 0$; r y A tienen el mismo signo.

Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación normal de cada una de las rectas que se indican.
   - L_1: $2x + 3y + 4 = 0$
     En este caso: $r = -\sqrt{2^2 + 3^2} = -\sqrt{13}$, entonces la ecuación normal de L_1 es:
     $\frac{2}{-\sqrt{13}}x + \frac{3}{-\sqrt{13}}y + \frac{4}{-\sqrt{13}} = 0$
   - L_2: $-3x + 4y - 10 = 0$, $r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} \Rightarrow r = 5$
     La ecuación normal de L_2 es:
     $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$
   - L_3: $x - y - 2 = 0$, $r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$
     La ecuación normal de L_3 es:
     $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 0$

2. Hallar la distancia entre las rectas paralelas L_1 y L_2, Si L_1: $5x - 12y + 26 = 0$, L_2: $10x - 24y - 13 = 0$

Resolución:

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas se debe normalizar cada recta. La distancia será entonces igual a la diferencia entre los términos independientes.

L_1: $5x - 12y + 26 = 0$; $r = -\sqrt{5^2 + (-12)} = -13$

Ecuación normal: $\frac{5}{-13}x - \frac{12}{-13}y - 2 = 0$

Multiplicando por (-1): $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$

L_2: $10x - 24y - 13 = 0$

$\Rightarrow r = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26$

Ecuación normal: $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{1}{2} = 0$

Distancia entre L_1 y $L_2 = \left[(2) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2,5$

3. (Ecuación de la bisectriz) Dada las rectas: $3x - 4y - 10 = 0$ y $4x + 3y - 15 = 0$, hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por estas rectas.

Resolución:

En primer lugar, normalizamos las ecuaciones de las rectas dadas.
Sea L_1: $3x - 4y - 10 = 0$

$\Rightarrow$ Ecuación normal: $\frac{3}{5}x - \frac{4y}{5} - 2 = 0$

L_2 : $4x + 3y - 15 = 0$

$\Rightarrow$ Ecuación normal: $\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - 3 = 0$

En segundo lugar, para hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman L_1 y L_2; se suman y restan dichas ecuaciones (normalizadas).
Sumando:

$\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} - 2 + \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - 3 = 0$

$\Rightarrow \frac{7x}{5} - \frac{y}{5} - 5 = 0$

Luego, la ecuación de una bisectriz es:
$7x - y - 25 = 0$
Restando:

$\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} - 2 - \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} + 3 = 0$

$\Rightarrow -\frac{x}{5} - \frac{7y}{5} + 1 = 0$

Luego, la ecuación de la otra bisectriz es:

$x + 7y - 5 = 0$

4. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas L_1 y L_2.

L_1: $5x - 12y + 39 = 0$

L_2: $3x + 4y - 5 = 0$

Resolución:

Normalizamos las ecuaciones de L_1 y L_2

L_1: $5x - 12y + 39 = 0 \Rightarrow \frac{5}{-13}x - \frac{12}{-13}y - 3 = 0$

L_2: $3x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$

Sumamos:

$\frac{-5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3 + \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{14}{65}x + \frac{112}{65}y - 4 = 0$

Entonces la ecuación de una bisectriz es:

$7x + 56y - 130 = 0$

Restamos:

$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3 - \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{-64}{65}x + \frac{8}{65}y - 2 = 0$

Entonces, la ecuación de otra bisectriz es:

$32x - 4y + 65 = 0$

◄ DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia "d" de un punto $P(x_1; y_1)$ a una recta cuya ecuación es: $Ax + By + C = 0$. Se obtiene de la siguiente manera:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Aplicaciones:

1. Calcular la distancia de la recta $5x - 12y + 11 = 0$, al punto (8; 1)

Resolución:

$$d = \frac{|5(8) - 12(1) + 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{39}{13} \Rightarrow d = 3$$

2. Calcular la distancia de la recta $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$, al punto medio del segmento AB, A(−8; 4) y B(−2; 0)

Resolución:

Ecuación de la recta: $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$

Sea P el punto medio de AB:

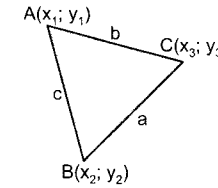
$P\left(\frac{-8-2}{2}; \frac{4+0}{2}\right) = P(-5; 2)$

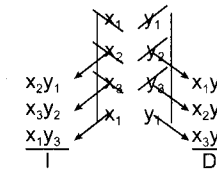
Para calcular la distancia de la recta al punto P aplicamos la fórmula indicada:

$$d = \frac{|2(-5) - 3(2) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-22|}{\sqrt{13}} \Rightarrow d = \frac{22\sqrt{13}}{13}$$

◄ ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Sean: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ y $(x_3; y_3)$ los vértices de un triángulo. Cálculo del área: (método práctico)





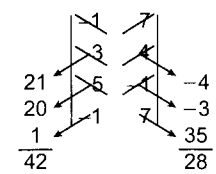
$$\boxed{\text{Área} = \frac{|D - I|}{2}}$$

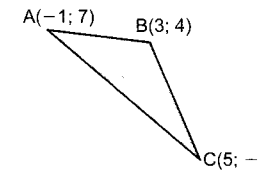
Por ejemplo:

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son: A(−1; 7), B(3; 4), C(5; −1)

Resolución:

Ordenamos los puntos:

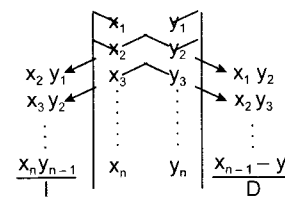


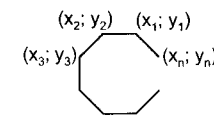


$$\text{Área} = \frac{|28 - 42|}{2} = 7$$

◄ ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL

Sean $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$.....$(x_n; y_n)$ los vértices de un polígono (convexo o no convexo) de "n" lados, el área S_P es igual a:





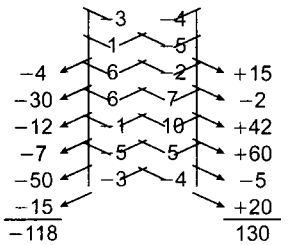
$$\boxed{\text{Área} = \frac{|D - I|}{2}}$$

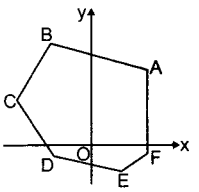
Ejemplo:

Calcular el área del polígono ABCDEF; donde: A(6; 7), B(−1; 10), C(−5; 5), D(−3; −4), E(1; −5), F(6; −2).

Resolución:

- Primero se grafica (aproximadamente) para ordenar los puntos.
- Se elige un punto de partida por ejemplo D y se ordena en forma antihorario.





$$\text{Área} = \frac{|130-(-118)|}{2} \Rightarrow \text{Área} = 124$$

Aplicaciones:

1. Los vértices de un triángulo son A(−1; 2), B(3; 4) y C(5; −2), si P, Q y R son los puntos medios de AB, BC y CA respectivamente y N es el punto medio de QR; hallar la distancia entre los puntos N y P.

Resolución:

Hallamos las coordenadas de P, Q y R.

P es punto medio de AB

$$\Rightarrow P\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow P(1; 3)$$

Q es punto medio de BC

$$\Rightarrow Q\left(\frac{3+5}{2}; \frac{4-2}{2}\right) \Rightarrow Q(4; 1)$$

R es punto medio de CA

$$\Rightarrow R\left(\frac{5-1}{2}; \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow R(2; 0)$$

N es punto medio de QR

$$\Rightarrow N\left(\frac{4+2}{2}; \frac{1+0}{2}\right) \Rightarrow N\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

Distancia de N a P:

$$d = \sqrt{(3-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-3\right)^2} = \sqrt{4+\frac{25}{4}} \quad \therefore\ d = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

2. Si la distancia de A(2; 2) a B(5; b) es 5 y la distancia de este último a C(c; 3) es $\sqrt{29}$; hallar la distancia de A a C, ($b < 0$ y $c \neq 3$).

Resolución:

Distancia de A a B es 5, entonces:

$$5 = \sqrt{(2-5)^2 + (2-b)^2} \Rightarrow 25 = 9 + (2-b)^2$$

$$\Rightarrow (2-b)^2 = 16$$

$$2 - b = \pm 4 \Rightarrow b = 6 \ \vee\ b = -2$$

Dato: $b < 0 \Rightarrow b = -2$

⇒ Las coordenadas de B son: (5; −2)

Distancia de B a C es $\sqrt{29}$, entonces:

$$\sqrt{29} = \sqrt{(c-5)^2 + (3+2)^2} \Rightarrow 29 = (c-5)^2 + 25$$

$$\Rightarrow (c-5)^2 = 4$$

$$c - 5 = \pm 2 \Rightarrow c = 7 \vee c = 3$$

Dato: $c \neq 3 \Rightarrow c = 7$

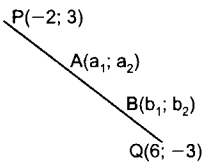
⇒ Las coordenadas de C son: (7; 3)

Distancia de A a C es:

$$d = \sqrt{(7-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} \quad \therefore\ d = \sqrt{26}$$

3. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección de un segmento cuyos extremos son: (−2; 3) y (6; −3)

Resolución:



Sean A y B los puntos de trisección, entonces se cumple que: PA = AB = BQ

Luego:

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{1}{2},\ \frac{PB}{BQ} = 2$$

Coordenadas de A:

$$a_1 = \frac{-2+\frac{1}{2}(6)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3};\quad a_2 = \frac{3+\frac{1}{2}(-3)}{1+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2}{3}; 1\right)$$

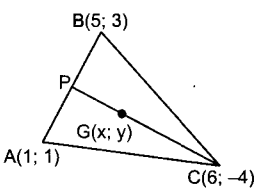
Coordenadas de B:

$$b_1 = \frac{-2+2(6)}{1+2} = \frac{10}{3};\quad b_2 = \frac{3+2(-3)}{1+2} = -1$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{10}{3}; -1\right)$$

4. Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo ABC. A(1; 1), B(5; 3), C(6; −4).

Resolución:



Sea G el baricentro y P el punto medio de AB, entonces:

Propiedad: $\frac{CG}{GP} = 2$

Como P es punto medio de AB, entonces:

$$P\left(\frac{5+1}{2}; \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow P(3; 2)$$

Coordenadas del baricentro:

$$x = \frac{6+2(3)}{1+2} = 4;\quad y = \frac{-4+2(2)}{1+2} = 0$$

∴ Las coordenadas del baricentro es: G(4; 0)

5. Una recta pasa por los puntos (−2; 1) y (9; 7), otra pasa por los puntos (3; 9) y (−2; −8). Hallar el ángulo agudo que forman estas rectas.

Resolución:

Calculamos la pendiente de cada recta.

L_1 pasa por (−2; 1) y (9; 7) $\Rightarrow m_1 = \frac{1-7}{-2-9}$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{6}{11}$$

L_2 pasa por (3; 9) y (−2; −8) $\Rightarrow m_2 = \frac{-8-9}{-2-3}$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{17}{5}$$

Sea θ el ángulo formado por L_1 y L_2

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{17}{5} - \frac{6}{11}}{1 + \left(\frac{17}{5}\right)\left(\frac{6}{11}\right)} = \frac{\frac{157}{55}}{\frac{157}{55}} = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1$$

$\therefore\ \theta = 45°$

6. Una recta L_1 pasa por los puntos (3; 2) y (−4; −7) y otra recta L_2 pasa por el punto (−6; 1) y el punto A cuya ordenada es −5. Hallar la abscisa de A sabiendo que L_1 es perpendicular a L_2.

Resolución:

L_1 pasa por (3; 2) y (−4; −7) $\Rightarrow m_1 = \frac{-7-2}{-4-3}$

$\Rightarrow m_1 = \frac{9}{7}$

Como $L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$

$\left(\frac{9}{7}\right)m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{7}{9}$ (Pendiente de L_2)

Sea: A(a; −5); L_2 pasa por (−6; 1) y A entonces:

$m_2 = \frac{-5-1}{a+6} \Rightarrow -\frac{6}{a+6} = -\frac{7}{9} \Rightarrow 54 = 7a + 42$

$\therefore\ a = 12/7$

7. Hallar la ecuación de una recta L que pasa por el punto (4; −3) y es paralela a una recta L_1, cuya ecuación es: $y = 3x + 5$.

Resolución:

Ecuación de L_1: $y = 3x + 5 \Rightarrow m_1 = 3$

Como $L \parallel L_1$ su pendiente también es 3

Para la ecuación de L aplicamos la fórmula:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-3) = 3(x - 4) \quad \therefore\ y = 3x - 15$

8. Hallar la ecuación de la recta L que es perpendicular a L_1: $3x - 4y + 11 = 0$ y además pasa por el punto (1; 3).

Resolución:

L_1: $3x - 4y + 11 = 0 \Rightarrow 4y = 3x + 11$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{4}$ ...Pendiente de L_1

Como $L \perp L_1$ el producto de sus pendientes es −1, entonces: $m = -\frac{4}{3}$, luego la ecuación de L es:

$y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y = -4x + 13$

$\therefore\ 4x + 3y - 13 = 0$

9. Una recta pasa por el origen y por la intersección de las rectas L_1 y L_2. Hallar su ecuación:

L_1: $3x + 2y - 14 = 0$; L_2: $x - 3y - 1 = 0$

Resolución:

Hallamos el punto de intersección de L_1 y L_2.

$3x + 2y = 14 \Rightarrow 3x + 2y = 14$

$x - 3y = 1 \Rightarrow 3x - 9y = 3$

$y = 1 \Rightarrow x = 4$

Luego: $L_1 \cap L_2 = (4; 1)$

Dato: La recta L pasa por (0; 0) y (4; 1), entonces su ecuación es:

$y - 0 = \left(\frac{1-0}{4-0}\right)(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{4} \quad \therefore\ 4y - x = 0$

10. Hallar los vértices del triángulo formado por la intersección de las rectas:

L_1: $x + 5y + 2 = 0$; L_2: $3x + 4y - 5 = 0$

L_3: $4x + 2y - 1 = 0$

Resolución:

Sabemos que las intersecciones de L_1, L_2 y L_3 determinan un triángulo, tenemos que hallar:

$L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$ y $L_2 \cap L_3$

$L_1 \cap L_2$:

$x + 5y = -2 \Rightarrow 3x + 15y = -6$

$3x + 4y = 5 \Rightarrow 3x + 4y = 5$

$\Rightarrow y = -1;\ x = 3 \qquad L_1 \cap L_2 = (3; -1)$

$L_1 \cap L_3$:

$x + 5y = -2 \Rightarrow 3x + 15y = 6$

$4x + 2y = 1 \Rightarrow 4x + 2y = 1$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \qquad L_1 \cap L_3 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$L_2 + L_3$:

$3x + 4y = 5 \Rightarrow 3x + 4y = 5$

$4x + 2y = 1 \Rightarrow 8x + 4y = 2$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{17}{10} \quad L_2 \cap L_3 = \left(-\frac{3}{5}; \frac{17}{10}\right)$

$\therefore$ Los vértices del triángulo son:

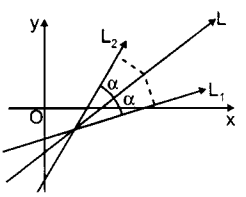
$(3; -1)\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)y\left(-\frac{3}{5}; \frac{17}{10}\right)$

11. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas:

L_1: $x - 2y - 4 = 0$; L_2: $4x - y - 4 = 0$

Resolución:

Graficamos (aproximadamente)



Sea L la bisectriz

Normalizamos: L_1 y L_2

L_1: $x - 2y - 4 = 0$

Ecuación normal:

$\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0$

L_2: $4x - y - 4 = 0$

Ecuación normal: $\frac{4x}{\sqrt{17}} - \frac{y}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} = 0$

Observar que L tiene pendiente positiva entonces, sumamos las ecuaciones (normalizadas)

$\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{4x}{\sqrt{17}} - \frac{y}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} = 0$

$\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{4x}{\sqrt{17}}\right) - \left(\frac{2y}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{17}}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\right) = 0$

$\therefore$ Efectuando operaciones se obtiene:

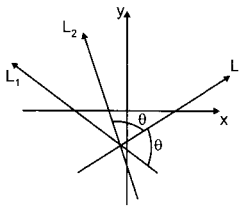
$(4\sqrt{5} + \sqrt{17})x - (2\sqrt{17} + \sqrt{5})y - 4(\sqrt{17} + \sqrt{5}) = 0$

12. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso por las rectas:

L_1: $3x + 4y + 9 = 0 \wedge L_2$: $24x + 7y + 21 = 0$

Resolución:

Graficamos (aproximadamente)



Sea L la bisectriz del ángulo obtuso
Normalizamos las ecuaciones de L_1 y L_2
L_1: $3x + 4y + 9 = 0 \Rightarrow$ EN:

$$\frac{3}{-5}x + \frac{4y}{-5} + \frac{9}{-5} = 0$$

L_2: $24x + 7y + 21 = 0 \Rightarrow$ EN:

$$\frac{24x}{-25} + \frac{7y}{-25} + \frac{21}{-25} = 0$$

Sumamos: $\frac{39x}{-25} + \frac{27y}{-25} + \frac{66}{-25} = 0$

$-39x - 27y - 66 = 0$

Simplificando: $13x + 9y + 22 = 0$

Esta no es la ecuación de L

Restamos: $\frac{-9x}{25} + \frac{13y}{25} + \frac{24}{25} = 0$

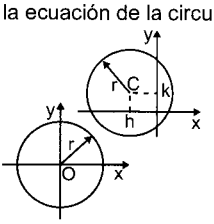
$\therefore$ La ecuación de L es: $9x - 13y - 24 = 0$

LA CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo del plano. Al punto fijo se le llama "centro" y a la distancia constante se le llama "radio".

Ecuación de la circunferencia

Sea C(h; k) el centro de una circunferencia y "r" el radio, la ecuación de la circunferencia es:



$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

Nota

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen del sistema de coordenadas, entonces (h; k) = (0; 0) por lo tanto la ecuación de la circunferencia en este caso es:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (−2; 3) y su radio mide 5.

Resolución:

Para determinar la ecuación de una circunferencia es necesario las coordenadas del centro y su radio.

Datos:
Centro = (h; k) = (−2; 3)
Radio = r = 5
Ecuación: $[x - (-2)]^2 + (y - 3)^2 = (5)^2$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

2. La ecuación de una circunferencia es: $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$. Calcular su radio y las coordenadas del centro.

Resolución:

Ecuación: $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$ ...(1)
Sabemos que la ecuación es:
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ...(2)
Identificando términos en (1) y (2):
$-h = 4 \Rightarrow h = -4 \wedge -k = 3 \Rightarrow k = -3$
$r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$
Centro de la circunferencia: (−4; −3) y su radio 6.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y que pasa por (3; 4).

Resolución:

Como el centro de la circunferencia es (0; 0), entonces su ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 = r^2$, nos falta conocer el radio, pero sabemos que la circunferencia pasa por (3; 4) entonces se debe cumplir que: $3^2 + 4^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25$, luego la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = 25$

Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia es:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, el centro de la circunferencia es $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y su radio es igual a: $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación general de la circunferencia de radio igual a 7 y cuyo centro es(5; −1)

Resolución:

Datos: Centro = (h; k) = (5; −1)
Radio = 7
Ecuación: $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 7^2$
La ecuación general se obtiene desarrollando la expresión anterior:
$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 49$
$\therefore$ EG: $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 23 = 0$

2. Hallar la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es (−2; 3) y pasa por el punto (4; 5).

Resolución:

Centro = (h; k) = (−2; 3)
Sabemos que la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia es el radio, entonces calculamos la distancia del punto (4; 5) a (−2; 3):

$r = \sqrt{[4-(-2)]^2 + (5-3)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} \Rightarrow r = \sqrt{40}$

La ecuación es: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{40})^2$

La ecuación general se obtiene desarrollando la anterior: $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 40$

$\therefore$ EG: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0$

3. La ecuación general de una circunferencia es: $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$, hallar el radio y las coordenadas del centro.

Resolución:

Observar que este ejemplo es el caso contrario de los dos ejemplos anteriores, para su resolución emplearemos dos métodos (solo para este ejemplo).

Primer método:

Aplicamos la fórmula: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Centro $= \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ y radio $= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

$\Rightarrow$ Centro: $\left(-\frac{-8}{2}; -\frac{-6}{2}\right) = (4; 3)$

Radio: $r = \frac{\sqrt{(-8)^2 + (-6)^2 - 4(-11)}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6$

$\therefore$ Centro: (4; 3) y radio: 6

Segundo método:

En caso de no recordar la fórmula anterior se procede de la siguiente manera:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

Ordenamos los términos: $x^2 - 8x + y^2 - 6y - 11$

Completamos cuadrados:

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 11 + 16 + 9$

Luego, la ecuación se ha transformado a:

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 36$

Centro: (h; k) = (4; 3) $\wedge$ Radio: $r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

Nota

Observar que el uso de este método implica saber "completar cuadrados" y luego identificar términos.

4. Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$

Resolución:

Aplicaremos el segundo método del ejemplo anterior:

$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 12y = 20$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 12y + 36 = 20 + 4 + 36$

Ecuación de la circunferencia:

$(x-2)^2 + (y+6)^2 = 60$

$\left.\begin{array}{l} -h = -2 \Rightarrow h = 2 \\ -k = 6 \Rightarrow k = -6 \end{array}\right\}$ centro: (2; −6)

$r^2 = 60 \Rightarrow r = \sqrt{60} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ Centro: (2; −6) y radio: $2\sqrt{5}$

Nota

Comprobar los resultados obtenidos aplicando el primer método del ejemplo anterior.

5. Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 8x + 8y - 9 = 0$. Con los ejes coordenados.

Resolución:

Para hallar la intersección (de cualquier curva) con el eje X se pone en la ecuación dada: y = 0.

$x^2 + 0^2 - 8x + 8(0) - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$(x-9)(x+1) = 0$

Se obtiene: $x = 9 \wedge x = -1$

Esto significa que los puntos de intersección con el eje X son: (9; 0) y (−1; 0).

Para hallar la intersección (de cualquier curva) con el eje Y, se pone en la ecuación dada x = 0 y obteniéndose en nuestro caso:

$y^2 + 8y - 9 = 0 \Rightarrow (y+9)(y-1) = 0$

$\Rightarrow y = -9;\ y = 1$

Los puntos de intersección con el eje Y son: (0; −9) y (0; 1)

6. La ecuación de una circunferencia es:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0$$

Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que pertenece a la circunferencia y que su ordenada es 1.

Resolución:

Sean las coordenadas de A: (a; 1)

Como A pertenece a la circunferencia debe cumplir con la ecuación de la circunferencia:

$a^2 + 4a + (1)^2 - 6(1) + 8 = 0$

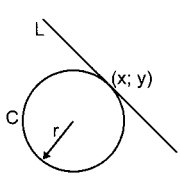
$\Rightarrow a^2 + 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a+3)(a+1) = 0$

Observamos que se obtienen dos valores:

$a = -3$ y $a = -1$

Esto significa que hay dos puntos en la circunferencia cuya ordenada es 1 y estos puntos son: (−3; 1) y (−1; 1)

Ecuación de la recta tangente a una circunferencia, conociendo el punto de tangencia



Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Punto de tangencia: $P(x_1; y_1)$

Ecuación de la recta tangente:

$$\boxed{xx_1 + yy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0}$$

Ejemplo:

La ecuación de una circunferencia es:
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$. Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto P(3; b) sabiendo que éste pertenece a la circunferencia ($b < 0$)

Resolución:

Dato, ecuación de la circunferencia:
$\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$

Como $P(3; b) \in \mathscr{C} \Rightarrow (3)^2 + b^2 - 4(3) + 6b + 4 = 0$
$\Rightarrow 9 + b^2 - 12 + 6b - 4 = 0$
$b^2 + 6b - 7 = 0 \Rightarrow (b + 7)(b - 1) = 0$
$\Rightarrow b = -7 \vee b = 1$; dato: $b < 0 \Rightarrow b = -7$

Luego el punto de tangencia es P(3; −7), la ecuación de la recta tangente es:

$$x(3) + y(-7) - \frac{4}{2}(x + 3) + \frac{6}{2}(y - 7) - 4 = 0$$

$3x - 7y - 2x - 6 + 3y - 21 - 4 = 0$
$\therefore\ x - 4y - 31 = 0$

Ecuación de la cuerda de contacto

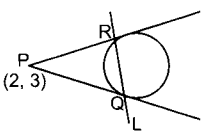
Si desde un punto exterior $P(x_1; y_1)$ a una circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se trazan dos rectas tangentes cuyos puntos de contacto son P y Q (como observas en la figura), al unir dichos puntos se forma una cuerda denominada "cuerda de contacto" cuya ecuación es:

$$x_1x + y_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0$$

Ejemplo:

Desde el punto P(2; −3) se ha trazado tangentes a la circunferencia:
C: $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 22 = 0$, hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

Resolución:



Ecuación de la circunferencia:
$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 22 = 0$

Desde P(2;−3) se trazaron las rectas tangentes.

Ecuación de la cuerda de contacto.

$$2x + (-3)y - \frac{2}{2}(x + 2) + \frac{10}{2}(y - 3) + 22 = 0$$

$2x - 3y - x - 2 + 5y - 15 + 22 = 0$
$\therefore$ L: $x + 2y + 5 = 0$

Aplicaciones:

1. La ecuación de una circunferencia es:
   $x^2 + y^2 - 9x + 2y + 18 = 0$; hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados.

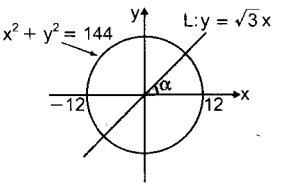
   Resolución:

   Para hallar la intersección con el eje Y, reemplaza en la ecuación $x = 0$, se obtiene: $y^2 + 2y + 18 = 0$, esta ecuación tiene raíces complejas, esto significa que no hay intersección con el eje Y.

   Para hallar la intersección con el eje X, reemplaza en la ecuación $y = 0$, se obtiene $x^2 - 9x + 18 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x - 6) = 0$, observa que hay dos soluciones, esto significa que hay dos puntos de intersección con el eje X; dichos puntos son: (3; 0) y (6; 0).

2. Hallar el área de la región formada por el semieje positivo de abscisas, la circunferencia:
   $x^2 + y^2 = 144$ y la recta $y - \sqrt{3}x = 0$.

   Resolución:



   Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 144$
   $r^2 = 144 \Rightarrow r = 12$
   Ecuación de la recta L: $y = \sqrt{3}x$
   Entonces: $\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad
   Área de la región sombreada:

$$S = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)(12)^2}{2} = 24\pi$$

   $\therefore\ S = 24\pi$

3. Determinar el valor de "m", si el punto (3; −2) pertenece a la circunferencia:
   $x^2 + y^2 - mx - 8y - 14 = 0$

   Resolución:

   Como el punto (3; −2) pertenece a la circunferencia: $x^2 + y^2 - mx - 8y - 14 = 0$, entonces al reemplazar: $x = 3$ e $y = -2$, se debe obtener cero.
   Reemplaza: $x = 3$ e $y = -2$
   $\Rightarrow (3)^2 + (-2)^2 - m(3) - 8(-2) - 14 = 0$
   $9 + 4 - 3m + 16 - 14 = 0 \Rightarrow 3m = 15$
   $\therefore\ m = 5$

4. Siendo las circunferencias:
   $C_1: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \wedge C_2: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = k$
   hallar el valor de k, sabiendo que dichas circunferencias son tangentes interiores.

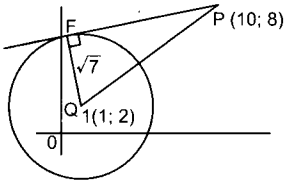
   Resolución:

   $C_1: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
   $\Rightarrow$ Centro: (−1; 1) y radio $r = 1$
   $C_2: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = k$
   $\Rightarrow$ Centro: (−1; −1) y radio $r = \sqrt{k}$

   Para que C_1 y C_2 sean tangentes interiores, entonces el radio de C_2 debe ser 3. Por lo tanto, el radio es: $\sqrt{k} = 3$.
   $\therefore$ Luego: $k = 9$

5. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto P(10; 8) a la circunferencia:
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

Resolución:

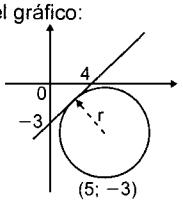


Dato: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 12 + 1 + 4$
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 17$
$\Rightarrow$ Centro = (1; 2) y radio: $r = \sqrt{17}$
$PQ = \sqrt{(10 - 1)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{9^2 + 6^2}$
$PQ = \sqrt{117}$
$PF = \sqrt{PQ^2 - QF^2} = \sqrt{(\sqrt{117})^2 - (\sqrt{17})^2}$
$PF = \sqrt{100} = 10$

6. Hallar la ecuación general de la circunferencia de centro (5; −3) que es tangente a la recta:
$3x - 4y - 12 = 0$.

Resolución:

Esbozamos el gráfico:



Observa que "r" es la distancia del punto a la recta.

$$r = \frac{|3(5) - 4(3) - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|15 + 12 - 12|}{5} = 3$$

La ecuación de la circunferencia es:
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (3)^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 6 = 9$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 6 = 0$

7. Dada la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.
   - ¿El punto (3; 3) pertenece a la circunferencia?
   - Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia y que pasa por (3; 3)

Resolución:

Para saber si un punto pertenece a la curva, se reemplaza dicho punto en la ecuación:
$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
$\Rightarrow (3)^2 + (3)^2 + 4(3) - 6(3) - 12 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
Se observa que dicho punto pertenece a la circunferencia.
La ecuación de la recta tangente es:

$$xx_1 + yy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0$$

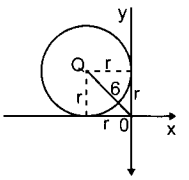
Punto de tangencia: $(x_1; y_1) = (3; 3)$

$$x(3) + y(3) + \frac{4}{2}(x + 3) + \frac{-6}{2}(y + 3) - 12 = 0$$

$3x + 3y + 2x + 6 - 3y - 9 - 12 = 0$
$\Rightarrow 5x - 15 = 0 \quad \therefore x - 3 = 0$

8. Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a los ejes coordenados, si su centro pertenece al IIC y dista del origen 6.

Resolución:

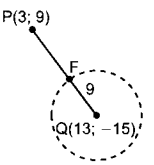


Observa que:
$r\sqrt{2} = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$
El centro Q tiene por coordenadas:
$(-r; r) = (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$
Ecuación: $(x + 3\sqrt{2})^2 + (y - 3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2$
Para hallar la ecuación general, desarrolla la anterior:
$x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 + y^2 - 6\sqrt{2}y + 18 = 18$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 18 = 0$

9. Hallar la distancia mínima del punto P(3; 9) a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$.

Resolución:

Dato: $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 26x + 169 + y^2 + 30y + 225 = -313 + 169 + 225$
$(x - 13)^2 + (y + 15)^2 = 81$
$\Rightarrow$ centro = (13; −15) y radio: r = 9
Gráfica:



Para determinar la menor distancia de P a la circunferencia, se une P con el centro Q, este segmento intersecta a la curva en F; la mínima distancia es PF.

Observa que FQ = 9, calcula PQ.
$PQ = \sqrt{(3 - 13)^2 + (9 + 15)^2} = \sqrt{100 + 576} = 26$
Entonces: $PF = PQ - FQ$
$PF = 26 - 9 \quad \therefore PF = 17$

10. Calcular la longitud de la cuerda que determina la recta: $7x - y + 12 = 0$, al intersectarse con la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Resolución:

Para hallar el punto de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones:

$7x - y + 12 = 0$ ...(I)

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ ...(II)

De (I) se deduce: $y = 7x + 12$

Reemplaza en (II):

$x^2 + (7x + 12)^2 - 4x - 2(7x + 12) - 20 = 0$

$x^2 + 49x^2 + 168x + 144 - 4x - 14x - 24 - 20 = 0$

$\Rightarrow 50x^2 - 150x + 100 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = 2$

Observa que hay dos valores para x, a cada uno le corresponde un valor de y.

$P = (x_1; y_1) \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 7(1) + 12 = 19$

$\Rightarrow P = (1; 19)$

$Q = (x_2; y_2) \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 7(2) + 12 = 26$

$\Rightarrow Q = (2; 26)$

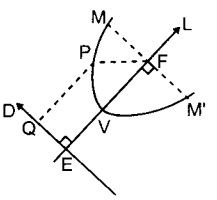
La longitud de la cuerda:

$\therefore PQ = \sqrt{(2-1)^2 + (26-19)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

LA PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo, A la recta fija se le denomina **directriz** y al punto fijo **foco**.

Elementos de la parábola



Punto F: Foco de la parábola.

Punto V: Vértice de la parábola.

Recta L: Eje de la parábola

Recta D: Directriz de la parábola.

(Esta recta es perpendicular al eje)

Segmento: MM': Lado recto.

Segmento FV: Distancia del foco al vértice, se le representa por $|p|$

Propiedades:

- La distancia de cualquier punto de la parábola (por ejemplo P) al foco es igual a la distancia de dicho punto a la directriz, PQ = PF.
- El lado recto es un segmento que pasa por el foco y es perpendicular al eje. Longitud del lado recto: $MM' = |4p|$
- El vértice es punto medio de FE, entonces: $|FV| = |VE| = |p|$

Ecuación de la parábola

Para determinar la ecuación de una parábola es necesario conocer el valor de "p" (dicho valor puede ser positivo o negativo), las coordenadas de su vértice y además la posición de su eje.

Ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje "x" y su vértice es (h; k)

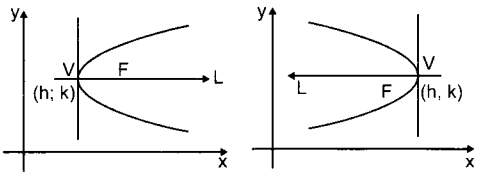
$$\boxed{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$$

Si $p > 0$ se abre hacia la derecha

Si $p < 0$ se abre hacia la izquierda

Representación gráfica:

b) $p > 0$ b) $p < 0$



Nota

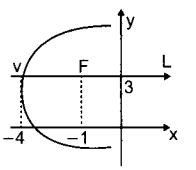
Es fácil observar que si la parábola se abre hacia la derecha, entonces el foco está a la derecha del vértice y si se abre hacia la izquierda, el foco está a la izquierda del vértice.

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco tienen por coordenadas (−4; 3) y (−1; 3) respectivamente.

   Resolución:

   Dato: V(−4; 3) y F(−1; 3), sabiendo que el eje pasa por el vértice y el foco, entonces podemos observar que el eje es paralelo al eje X.



   Hallamos el valor de "p":

   $p = VF = -1 - (-4) = 3 \Rightarrow p = 3$

   Como $p > 0 \Rightarrow$ se abre hacia la derecha.

   Ecuación de la parábola:

   $(y - k)^2 = 4p(x - h)^2$

   Observar que: $(h; k) = (-4; 3)$

   $\Rightarrow (y - 3)^2 = 4(3)[x-(-4)]$

   $\therefore (y - 3)^2 = 12(x + 4)$

2. El eje de una parábola es paralelo al eje X, su foco es (8; 6) y la longitud de su lado recto es 20. Hallar la ecuación de la parábola, sabiendo además que el vértice está a la derecha del foco.

   Resolución:

   Sabemos que la longitud del lado recto es $|4p|$ entonces: $4p = 20 \Rightarrow p = 5$, como el vértice está a la derecha del foco, la parábola se abre hacia la izquierda por lo tanto "p" es negativo, entonces $p = -5$.

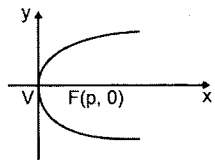
Como el eje es paralelo al eje X y el foco es (8; 6) entonces las coordenadas del vértice son: (h; 6) el valor de "h" se obtiene conociendo "p".
$p = VF \Rightarrow -5 = 8 - h \Rightarrow h = 13$
Luego el vértice es: (13; 6)
$\therefore$ Ecuación de la parábola: $(y - 6)^2 = -20(x - 13)$

Nota

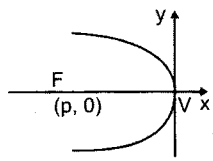
Observar que la abscisa del foco es 8, como el vértice está a la derecha, su abscisa tiene que ser mayor, además sabemos que la distancia del vértice al foco es p = 5, entonces la abscisa del vértices será: 8 + 5 = 13. Es recomendable que usted haga el gráfico correspondiente y así pueda observar la posición del foco y el vértice de la parábola.

Observación

Un caso particular de esta ecuación ocurre cuando el vértice de la parábola es (0; 0) y su eje coincide con el eje X.
En este caso la ecuación es: $y^2 = 4px$
Si $p > 0$ se abre hacia la derecha
Si $p < 0$ se abre hacia la izquierda
Representación gráfica:
a) $p > 0$



b) $p < 0$



Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es (0; 0) y su foco es (7; 0).

   Resolución:
   Como el vértice es (0; 0) y su foco está en el eje X, entonces la ecuación es: $y^2 = 4px$, el valor de "p" está dado por la abscisa del foco: p = 7
   $\therefore y^2 = 28x$

2. La ecuación de una parábola es: $y^2 = -36x$; hallar las coordenadas del foco y la longitud de su lado recto.

   Resolución:
   Ecuación: $y^2 = -36x$
   Observamos que el eje de abscisas es el eje de la parábola, como hay signo negativo, se abre hacia la izquierda.
   $y^2 = 4px <> y^2 = -36x \Rightarrow 4p = -36 \Rightarrow p = -9$
   Coordenadas del foco: (p; 0) = (−9; 0)
   Longitud del lado recto = |4p| = 36

3. Una parábola pasa por el punto (3; 6) y su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas, si su eje coincide con el eje de abscisas, hallar la ecuación de la parábola.

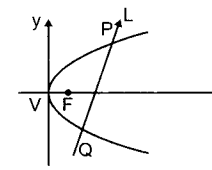
   Resolución:
   Como el eje de la parábola es el eje X y además su vértice es (0; 0), entonces su ecuación es: $y^2 = 4px$.
   Como (3; 6) pertenece a la parábola, entonces debe cumplir con la ecuación:
   $(6)^2 = 4p(3) \Rightarrow 36 = 12p \Rightarrow p = 3$
   Ecuación de la parábola:
   $\therefore y^2 = 12x$

4. La ecuación de una parábola es $y^2 = -48x$, si PQ es su lado recto, hallar las coordenadas de P y Q.

   Resolución:
   Ecuación de la parábola:
   $y^2 = -48x \Rightarrow 4p = -48 \Rightarrow p = -12$
   Observamos que el eje de la parábola es el eje X, entonces las coordenadas de foco son: (−12; 0).
   Sabemos que: |PQ| = 48
   $\Rightarrow$ |FP| = |FQ| = 24
   Del gráfico adjunto, podemos observar que:
   Coordenadas de P: (−12; 24)
   Coordenadas de Q: (−12; −24)

5. Hallar los puntos de intersección de:
   la recta: $x - y - 4 = 0$ y la parábola: $y^2 = 2x$

   Resolución:



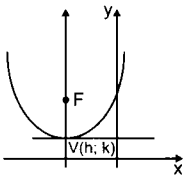
   Graficando (aproximadamente) podemos observar que hay dos puntos de intersección P y Q.
   Matemáticamente debemos llegar a la misma conclusión.
   Para hallar los puntos de intersección resolvemos el sistema de ecuaciones:
   $y^2 = 2x$ ...(1)
   $x - y - 4 = 0$ ...(2)
   De (2): $x = y + 4$; reemplazamos en (1):
   $y^2 = 2(y + 4) \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y - 4)(y + 2) = 0$
   Observamos que se obtienen dos valores para y (esto significa que hay dos puntos de intersección).
   Si: $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8$
   $\Rightarrow$ P(8; 4)
   Si: $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = -2 + 4 = 2$
   $\Rightarrow$ Q(2; −2)

Ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje "y" y su vértice es (h; k)

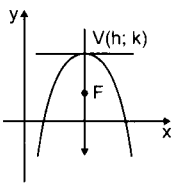
$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Si $p > 0$ se abre hacia arriba
Si $p < 0$ se abre hacia abajo
Representación gráfica

a) $p > 0$



b) $p < 0$



Nota

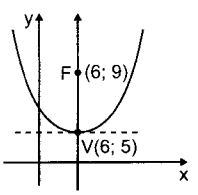
Es fácil observar que si la parábola se abre hacia arriba, entonces el foco está arriba del vértice y si la parábola se abre hacia abajo entonces el foco está debajo del vértice.

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice es (6; 5) y su foco es (6; 9)

Resolución:

Graficando podemos observar que el foco está arriba del vértice, esto implica que la parábola se abre hacia arriba ($p > 0$)



$p = VF = 9 - 5 \Rightarrow p = 4$

La ecuación de la parábola es:

$(x-6)^2 = 4(4)(y-5) \quad \therefore (x-6)^2 = 16(y-5)$

2. La ecuación de una parábola es: $(x+6)^2 = -7(y+1)$, hallar las coordenadas del vértice, foco y la longitud del lado recto.

Resolución:

Ecuación: $(x+6)^2 = -7(y+1)$

$-h = 6 \Rightarrow h = -6$; $-k = 1 \Rightarrow k = -1$

$4p = -7 \Rightarrow p = -\frac{7}{4}$

Como el eje de la parábola es paralelo al eje Y, además el valor de "p" es negativo, esto significa que la parábola se abre hacia abajo, por lo tanto el foco está debajo del vértice:

Coordenadas del vértice: $V(-6; -1)$

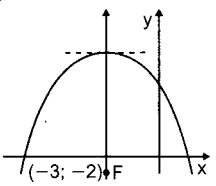
Coordenadas del foco:

$F\left(-6; -1-\frac{7}{4}\right) = F\left(-6; -\frac{11}{4}\right)$

(observar que a -1 se restó $\frac{7}{4}$ porque la distancia de $VF = |p|$ y además F está debajo de V).

3. La longitud del lado recto de una parábola, cuyo eje es paralelo al eje de ordenadas es 20, las coordenadas del foco son $(-3; -2)$ y su vértice está arriba del foco. Hallar la ecuación de la parábola.

Resolución:



Como el foco está debajo del vértice, entonces "p" es negativo.

Lado recto $= 20 \Rightarrow |4p| = 20 \Rightarrow |p| = 5$

Coordenadas del foco: $F(-3; -2)$

Coordenadas del vértice: $V(-3; -2+5) = V(-3; 3)$

(Observar que a -2 le sumamos 5 porque la distancia de $VF = |p|$ y además V está arriba de F).

Ecuación: $[x-(-3)]^2 = 4(-5)(y-3)$

$\therefore (x+3)^2 = 20(y-3)$

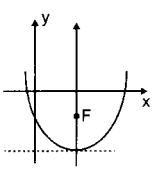
4. La ecuación de una parábola es: $(x-1)^2 = 2(y+2)$, hallar los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas.

Resolución:

Ecuación: $(x-1)^2 = 2(y+2)$

Conociendo la ecuación (tal como está planteada) se puede conocer directamente el vértice, el valor de "p", la longitud del lado recto y haciendo una breve operación se puede hallar las coordenadas del foco.

$V(1; -2)$; $P = \frac{1}{2}$; $F\left(1; -\frac{3}{2}\right)$



Para hallar la intersección de la curva con el eje de abscisas (gráficamente podemos observar que son dos) se anula el valor de "y" en la ecuación, (es decir se reemplaza $y = 0$) y se resuelve la ecuación que nos queda. Entonces sí:

$y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2(0+2) \Rightarrow (x-1)^2 = 4$

Extraemos raíz cuadrada (no olvidar el doble signo) $x - 1 = \pm 2$

Si: $x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3; 0)$

Si: $x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1; 0)$

$\therefore$ Puntos de intersección $(3; 0)$ y $(-1; 0)$

Observación

Un caso particular de esta ecuación ocurre cuando el vértice de la parábola es (0; 0) y su eje coincide con el eje Y.

En este caso la ecuación es:

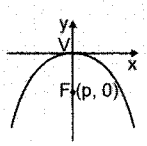
$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Si $p > 0$ se abre hacia arriba

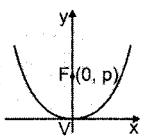
Si $p < 0$ se abre hacia abajo

Representación gráfica

• $p < 0$



• $p > 0$



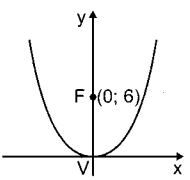
Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es (0; 0) y foco es (0; 6)

Resolución:

Como el vértice es (0; 0) y el foco (0; 6) entonces el valor de p = 6, por lo tanto la ecuación es:

$x^2 = 4(6)y \Rightarrow x^2 = 24y$



2. La ecuación de una parábola es: $x^2 + 28y = 0$. Hallar las coordenadas del foco y la longitud de su lado recto.

Resolución:

Ecuación: $x^2 + 28y = 0 \Rightarrow x^2 = -28y$; observamos que el eje de la parábola es el eje de ordenadas, vértice en el origen como dice −28 (valor negativo) entonces se abre hacia abajo.

Longitud del lado recto: $|4p| = |-28| = 28$

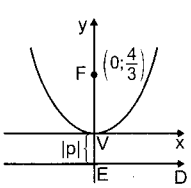
Coordenadas del foco:

Como $(p < 0) \Rightarrow |4p| = 28 \Rightarrow p = -7$

Entonces: F(0; −7)

3. Hallar la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $3x^2 - 16y = 0$.

Resolución:



Ecuación: $3x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3}y$

Observar que la parábola se abre hacia arriba, el valor de "p" es positivo.

$4p = \frac{16}{3} \Rightarrow p = \frac{4}{3}$, entonces las coordenadas del foco son: $\left(0; \frac{4}{3}\right)$.

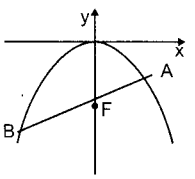
La directriz es una recta perpendicular al eje de la parábola tal que la distancia $|VF| = |VE|$

Como D es paralelo al eje X, su ecuación es:

$y = -\frac{4}{3} \quad \vee \quad 3y + 4 = 0$

4. La ecuación de una parábola es: $x^2 + 9y = 0$, los puntos A(3; a) y B(b; −4) pertenecen a la parábola. Hallar la longitud del segmento AB (B ∈ III C).

Resolución:



Ecuación: $x^2 + 9y = 0 \Rightarrow x^2 = -9y$

Como A y B pertenecen a la parábola deben cumplir con la ecuación, entonces:

$A(3; a) \Rightarrow 3^2 = -9a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A(3; -1)$

$B(b; -4) \Rightarrow b^2 = 9(-4) \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$

Como B ∈ III C; entonces su abscisa es negativa por lo tanto $b = -6 \Rightarrow B(-6; -4)$.

Longitud del segmento AB:

$\sqrt{(-6-3)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

Observación

Una forma práctica de identificar si el eje de la parábola es paralela al eje X o al eje Y, es observando de la ecuación, cuál de sus variables es de primer grado.

Si la variable "x" es de primer grado, entonces el eje de la parábola es paralelo (o coincide) con el eje X.

Si la variable "y" es de primer grado, entonces el eje de la parábola es paralelo (o coincide) con el eje Y.

ejemplo:

- $(y - 2)^2 = 8(x - 1)$ ....Variable x de primer grado, entonces el eje de la parábola es paralelo al eje X.
- $(y - 1)^2 = 6x$ ....Eje de la parábola coincide con el eje X.
- $(x - 2)^2 = 9(y - 4)$ ....Variable y el primer grado, entonces el eje de la parábola es paralelo al eje Y.
- $(x - 1)^2 = 10y$ ....Eje de la parábola coincide con el eje Y.

Esta observación es muy útil al momento de esbozar la gráfica de la parábola.

Es muy importante expresar la ecuación de la parábola en forma desarrollada, en este caso es recomendable recordar algunas técnicas algebraicas, como aquella que comúnmente se denomina "completar cuadrados".

Ejemplos:

1. Hallar las coordenadas del vértice y el foco de la parábola cuya ecuación es:
$y^2 - 6y - 12x - 39 = 0$

Resolución:

Ecuación:
$y^2 - 6y - 12x - 39 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = 12x + 39$

Completamos cuadrados:
$y^2 - 6y + 9 = 12x + 39 + 9$

Ecuación:
$(y - 3)^2 = 12(x + 4)$, esta ecuación es semejante a $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ entonces, identificando términos en ambas ecuaciones se obtiene:
$-k = -3 \Rightarrow k = 3$; $-h = 4 \Rightarrow h = -4$
$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

Coordenadas del vértice: $V(-4; 3)$

Observamos que el eje de la parábola es paralelo al eje X, como $p = 3$ entonces se abre hacia la derecha, esto implica que el foco esté a la derecha del vértice, entonces:
Coordenadas del foco: $F(-4 + 3; 3) = F(-1; 3)$

2. Hallar el foco y vértice de la parábola:
$x^2 - 14x + 16y + 81 = 0$

Resolución:

Ecuación:
$x^2 - 14x + 16y + 81 = 0 \Rightarrow x^2 - 14y = -16y - 81$
$x^2 - 14x + 49 = 16y - 81 + 49$
$(x - 7)^2 = -16(y + 2) <> (x - h)^2 = 4p(y - k)$

Eje de la parábola paralelo al eje Y.
$4p = -16 \Rightarrow p = -4$ (negativo) la parábola se abre hacia abajo, (esto significa que el foco está debajo del vértice).

Coordenadas del vértice: $V(h; k) = V(7; -2)$

Coordenadas del foco: $F(7; -2 - 4) = F(7; -6)$

3. Hallar todos los elementos de la parábola cuya ecuación es: $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

Resolución:

Ecuación:
$9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 24x = -72y - 16$
$(3x)^2 + 2(3x)(4) = -72y - 16$ ... Para completar cuadrado le sumamos $(4)^2$
$(3x)^2 + 2(3x)(4) + 4^2 = -72y - 16 + 4^2$
$(3x + 4)^2 = -72y$

Observamos que x está afectado (multiplicado) del número 3, entonces lo factorizamos (el x debe quedar solo).

$9\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -72y$

$\Rightarrow \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -8y <> (x - h)^2 = 4p(y - k)$

Eje de la parábola: coincide con el eje Y.

Como: $4p = -8 \Rightarrow p = -2$ (negativo) la parábola se abre hacia abajo (además el foco está debajo del vértice).

Coordenadas del vértice: $V(h; k) = V\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$
Coordenadas del foco:
$F\left(-\frac{4}{3}; 0 - 2\right) = F\left(-\frac{4}{3}; -2\right)$

En general:

- Una ecuación de la forma: $Ay^2 + By + Cx + E = 0$ con $A \neq 0$ y $C \neq 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo (o coincide) con el eje X.
- Una ecuación de la forma: $Ax^2 + Bx + Cy + E = 0$ con $A \neq 0$ y $C \neq 0$, representa una parábola cuyo eje es paralelo (o coincide) con el eje Y.

Ecuación de la recta tangente a la parábola, conociendo el punto de tangencia

Sea: $(x_1; y_1)$ el punto de tangencia.

Parábola: $Ay^2 + By + Cx + E = 0$

Recta tangente: $Ay_1y + \frac{B}{2}(y + y_1) + \frac{C}{2}(x + x_1) + E = 0$

Parábola: $Ax^2 + Bx + Cy + E = 0$

Recta tangente: $Ax_1x + \frac{B}{2}(x + x_1) + \frac{C}{2}(y + y_1) + E = 0$

Por ejemplo: hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola: $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$, en el punto $\left(\frac{8}{3}; -2\right)$

Resolución:

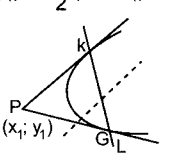
Observa que el punto $\left(\frac{8}{3}; -2\right) \in$ a la parábola:
$9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

Entonces la ecuación de la recta tangente es:
$9\left(\frac{8}{3}\right)x + \frac{24}{2}\left(x + \frac{8}{3}\right) + \frac{72}{2}(y - 2) + 16 = 0$
$\Rightarrow 24x + 12x + 32 + 36y - 72 + 16 = 0$
Ecuación de L: $36x + 36y - 24 = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 2 = 0$

Ecuación de la cuerda de contacto

La ecuación de la cuerda de contacto es:

I. Ecuación de la parábola: $Ay^2 + By + Cx + E = 0$
Ecuación de la cuerda de contacto:
$Ay_1y + \frac{B}{2}(y + y_1) + \frac{C}{2}(x + x_1) + E = 0$

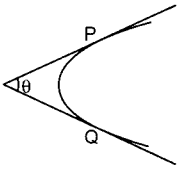


II. Ecuación de la parábola:
$Ax^2 + Bx + Cy + E = 0$
Ecuación de la cuerda de contacto:
$Ax_1x + \frac{B}{2}(x + x_1) + \frac{C}{2}(y + y_1) + E = 0$

Ejemplo:

Desde el punto $(-8; 3)$ se trazan dos rectas tangentes a la parábola; $y^2 - 6y - 12x - 39 = 0$. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto.

Resolución:

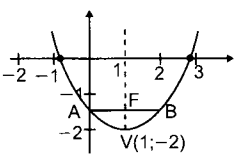


Dato: $(-8; 3) = (x_1; y_1)$
Parábola: $y^2 - 6y - 12x - 39 = 0$
Ecuación de la cuerda de contacto:
$3y - \frac{6}{2}(y + 3) - \frac{12}{2}(x + 8) - 39 = 0$
$\Rightarrow 3y - 3y - 9 - 6x - 48 - 39 = 0$
Ecuación: $x = 16$

Aplicaciones:

1. La ecuación de una parábola es: $x^2 - 2x - 2y - 3 = 0$, calcula las coordenadas de los extremos de su lado recto.

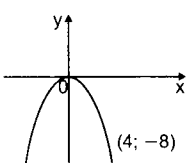
   Resolución:
   Dato: $x^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
   $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2y + 3 + 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2(y + 2)$
   Esta es una parábola con vértice $(1; -2)$,
   $4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$
   Coordenadas del foco: $\left(1; -2 + \frac{1}{2}\right) = \left(1; -\frac{3}{2}\right)$
   $\overline{AB}$ es el lado recto: $\Rightarrow FA = 2|p|$ y $FB = 2|p|$
   Luego: $FA = FB = 1$



   Coordenadas de A y B: sabemos que la abscisa de F es 1, entonces:
   Abscisa de $A = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A = (0; -3/2)$
   Abscisa de $B = 1 + 1 = 2 \Rightarrow B = (2; -3/2)$
   $\therefore\ A(0; -3/2) \wedge B(2; -3/2)$

2. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas, simétrica respecto al eje Y, y que pasa por el punto $(4; -8)$.

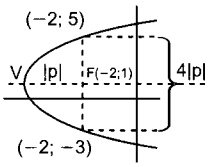
   Resolución:



   La ecuación de la parábola es de la forma:
   $x^2 = 4py$
   $(4; -8)$ pertenece a la curva, entonces:
   $(4)^2 = 4p(-8) \Rightarrow p = \left(\frac{-1}{2}\right)$
   La ecuación es: $x^2 = 4\left(\frac{-1}{2}\right)y \quad \therefore\ x^2 = -2y$

3. Los extremos del lado recto de una parábola son los puntos $(-2; 5)$ y $(-2; -3)$, hallar la ecuación de la parábola, sabiendo que se abre hacia la derecha.

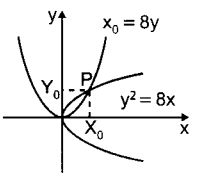
   Resolución:



   El foco es punto medio del lado recto $\Rightarrow F = (-2; 1)$
   Observa que $4|p| = 8$
   $\Rightarrow |p| = 2$ como se abre hacia la derecha $p > 0$
   $\Rightarrow p = 2$
   El vértice está a la izquierda del foco (2 unidades), entonces el vértice es: $V(-4; 1)$
   Ecuación: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
   $\therefore\ (y - 1)^2 = 8(x + 4)$

4. Hallar el punto de intersección de las parábolas: $y^2 = 8x \wedge x^2 = 8y$

   Resolución:

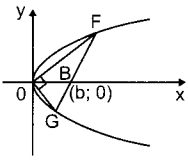


   Para determinar el punto de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones:
   $y^2 = 8x \qquad ...(1)$
   $x^2 = 8y \qquad ...(2)$
   $x^2y^2 = 64xy \Rightarrow xy = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{y}$
   Reemplazando en (1):
   $y^2 = 8\left(\frac{64}{y}\right) \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 8$
   Por lo tanto, el punto de intersección es: $(8; 8)$

5. Hallar la ecuación de una circunferencia cuyo centro coincide con el foco de la parábola: $y^2 = 20x$, y su radio es igual a la longitud del lado recto de la parábola.

   Resolución:
   Ecuación de la parábola:
   $y^2 = 20x \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$
   Foco de la parábola: $(5; 0)$ y lado recto: $4p = 20$
   Ecuación de la circunferencia:
   $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
   Por dato:
   $(h; k) = (5; 0)$ y $r = 20 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 20^2$
   $\therefore$ La ecuación es: $(x - 5)^2 + y^2 = 400$

6. En la figura se tiene una parábola cuya ecuación es: $y^2 = 4px$, calcular el valor de b (En términos de "p").



Resolución:

Sean "m" y "n" las abscisas de F y G respectivamente, entonces:

Para F: $y^2 = 4pm$

$\Rightarrow y = 2\sqrt{pm} \Rightarrow F(m; 2\sqrt{mp})$

Para G: $y^2 = 4pn \Rightarrow y = -2\sqrt{pn} \Rightarrow G(n; -2\sqrt{pn})$

$m_{BF} = m_{FG}$

$$\frac{2\sqrt{mp}}{m-b} = \frac{2\sqrt{mp}+2\sqrt{np}}{m-n} \Rightarrow \frac{2\sqrt{mp}}{m-b} = \frac{2\sqrt{p}(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}$$

Simplificando:

$$\frac{\sqrt{m}}{m-b} = \frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{n}) = m-b$$

$m - \sqrt{mn} = m - b \Rightarrow b = \sqrt{mn}$ ...(I)

También se cumple $m_{OF}m_{OG} = -1$

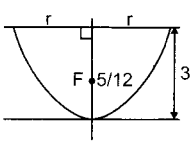
$$\left(\frac{2\sqrt{mp}}{m}\right)\left(\frac{2\sqrt{np}}{-n}\right) = -1$$

$\Rightarrow 4p\sqrt{mn} = mn \Rightarrow 4p = \sqrt{mn}$

Reemplaza en (I): $b = 4p$

7. Un reflector sonoro se usa en eventos deportivos y tiene la forma de un paraboloide con su foco a 5 pulgadas del vértice, calcular el diámetro que debe tener si su profundidad es de 3 pies.

Resolución:



Al hacer un corte transversal a dicho paraboloide, se obtiene la parábola que se muestra en la figura adjunta. Los ejes se han ubicado adecuadamente de tal manera que el vértice es (0; 0) y p = 5/12 (en pies).

Ecuación:

$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{5}{12}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3}y$

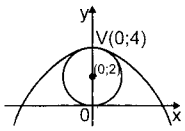
Observa de la figura que para:

$x = r, y = 3 \Rightarrow r^2 = \frac{5}{3}(3) \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}$

$\therefore$ El diámetro es $2r = 2\sqrt{5}$

8. Hallar la ecuación general de la parábola cuyo foco es el origen de coordenadas, es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4y$ y el punto de tangencia es el vértice, sabiendo además que éste pertenece al eje Y.

Resolución:



Lo primero es graficar, para ello analiza la circunferencia: $x^2 + y^2 = 4y$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$x^2 + (y-2)^2 = 4$ ...centro (0; 2); radio = 2

Ahora se deduce que la parábola se abre hacia abajo y por lo tanto su ecuación es de la forma:

(h; k) es el vértice (h; k) = (0; 4)

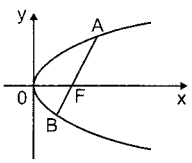
La distancia del foco al vértice: $|p| = 4$ como se abre hacia abajo $\Rightarrow p = -4$

La ecuación es: $(x-0)^2 = 4(-4)(y-4)$

$\therefore x^2 + 16y - 64 = 0$

9. Demostrar que siendo la ecuación de la parábola $y^2 = 4px$ se cumple:

$\frac{1}{AF} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{p}$, F es el foco.



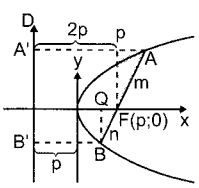
Resolución:

Sea AF = m y FB = n

D es la directriz, entonces por propiedad de la parábola A'A = m y B'B = n

Se deduce:

AP = m − 2p y QF = 2p − n



$\triangle APF \cong \triangle FQB$

$$\frac{AP}{AF} = \frac{FQ}{FB} \Rightarrow \frac{m-2p}{m} = \frac{2p-n}{n}$$

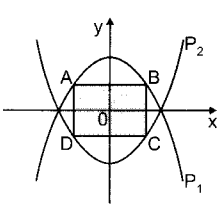
$$\frac{m}{m} - \frac{2p}{m} = \frac{2p}{n} - \frac{n}{n} \Rightarrow 1 - \frac{2p}{m} = \frac{2p}{n} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2p}{n} + \frac{2p}{m} = 2 \Rightarrow \frac{p}{n} + \frac{p}{m} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{p}$$

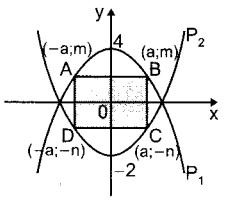
$$\therefore \frac{1}{AF} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{p}$$

10. Hallar las coordenadas de los vértices del cuadrado inscrito (ver figura adjunta).

P_1: $x^2 + 3y = 12$; P_2: $x^2 - 6y = 12$



Resolución:

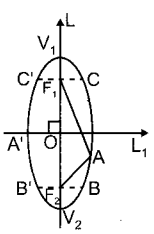


P_1: $x^2 + 3y = 12$
$\Rightarrow x^2 = -3y + 12$
$\Rightarrow x^2 = -3(y - 4)$
P_2: $x^2 - 6y = 12$
$\Rightarrow x^2 = 6y + 12$
$\Rightarrow x^2 = 6(y + 2)$

Como ABCD es un cuadrado: AB = BC
Si: B = (a; m) 41⇒ A = (−a; m)
C = (a; −n) ⇒ D = (−a; −n)
AB = 2a ∧ BC = m + n
$B \in P_1 \Rightarrow a^2 + 3m = 12 \Rightarrow m = \dfrac{12 - a^2}{3}$
$C \in P_2 \Rightarrow a^2 - 6(-n) = 12$
$\Rightarrow 6n = 12 - a^2 \Rightarrow n = \dfrac{12 - a^2}{6}$
$2a = m + n \Rightarrow 2a = \dfrac{12 - a^2}{3} + \dfrac{12 - a^2}{6}$
$\Rightarrow 12a = 24 - 2a^2 + 12 - a^2$
$3a^2 + 12a - 36 = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$
$\Rightarrow (a - 2)(a + 6) = 0$
Se deduce que:
$a = 2 \Rightarrow m = \dfrac{12 - 4}{3} = \dfrac{8}{3} \wedge n = \dfrac{12 - 4}{6} = \dfrac{4}{3}$
$\therefore A\left(-2; \dfrac{8}{3}\right), B\left(2; \dfrac{8}{3}\right), C\left(2; \dfrac{4}{3}\right), D\left(-2; \dfrac{4}{3}\right)$

LA ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de las distancias de cada uno de estos puntos a dos puntos fijos (denominados focos) es constante.



Elementos de la elipse

Puntos F_1 y F_2: Focos de la elipse
Puntos V_1 y V_2: Vértices de la elipse
Punto Q: Centro de la elipse
Recta L: Eje focal (pasa por los focos)
Recta L_1: Eje normal (pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal)
Segmentos BB' y CC': Lado recto (son perpendiculares al eje focal y pasan por los focos).

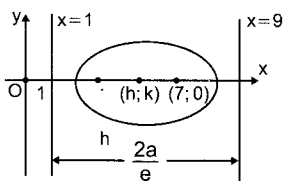
Propiedades:

- OF_1 y OF_2 se les denomina "distancias focales", generalmente se les representa por la letra "c". Entonces: $F_1F_2 = 2c$, ($OF_1 = OF_2 = c$).
- Al segmento V_1V_2 se le denomina "eje mayor" y generalmente se le representa por 2a, entonces: $V_1V_2 = 2a$; ($OV_1 = OV_2 = a$).
- Al segmento AA' se le denomina "eje menor" y generalmente se le representa por 2b.
  AA' = 2b; (OA' = AO = b).
- La longitud de cada uno de sus lados rectos (BB' y CC') es igual a: $2b^2/a$
- Por redefinición, si P es un punto (cualquiera) de la elipse se cumple que: $|F_1P| + |F_2P| = 2a$, esto significa que si elegimos un punto de la elipse y calculamos la distancia de este punto a los focos, la suma de estas distancias es igual a la distancia entre los vértices.
- Sabemos que "a" es la longitud del semieje mayor, "b" es la longitud del semieje menor y "c" es la distancia del centro a cualquiera de los focos, se cumple que: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Ecuación de la elipse

Para determinar la ecuación de una elipse es necesario conocer las coordenadas de su centro, las longitudes de su eje mayor y menor, además la posición de su eje focal.

Ecuación de una elipse cuyo eje focal es paralelo al eje "x" y su centro es (h; k)



$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Como el centro es (h; k), entonces:
Coordenadas de los focos: $F_1(h - c; k)$ y $F_2(h + c; k)$
Coordenadas de los vértices:
$V_1(h - a; k)$ y $V_2(h + a; k)$

Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de una elipse cuyo centro es (3; 4), la longitud de su eje mayor es 18 y la longitud de su eje menor es 10, y su eje focal es paralelo al eje de abscisas.

   Resolución:
   Centro de la elipse: (h; k) = (3; 4)
   Como la longitud del eje mayor es 18, entonces:
   $2a = 18 \Rightarrow a = 9$
   Como la longitud del eje menor es 10, entonces:
   $2b = 10 \Rightarrow b = 5$
   Como el eje focal es paralelo al eje X, entonces la ecuación de la elipse es:
   $$\frac{(x-3)^2}{9^2} + \frac{(y-4)^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{81} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

2. La ecuación de una elipse es: $4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$. Hallar las coordenadas del centro, los focos y vértices de la elipse.

Resolución:

Ecuación:

$4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$

$\Rightarrow \dfrac{4(x+2)^2}{36} + \dfrac{9(y-1)^2}{36} = 1$

$\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 <> \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)}{b^2} = 1$

Identificando términos:

$2 = -h \Rightarrow h = -2 \wedge -1 = -k \Rightarrow k = 1$

centro: $(-2; 1)$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ (Longitud del semieje mayor)

$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ (Longitud del semieje menor)

$c = \sqrt{5}$

Coordenadas de los focos:

$F_1(h-c; k) \wedge F_2(h+c; k)$

$F_1(-2-\sqrt{5}; 1) \wedge F_2(-2+\sqrt{5}; 1)$

Coordenadas de los vértices:

$V_1(h-a; k) \wedge V_2(h+a; k)$

$V_1(-2-2; 1) = (-4; 1) \wedge V_2(-2+3; 1) = (1; 1)$

3. Las coordenadas de los vértices de una elipse son $(-3; 7)$ y $(15; 7)$ y de sus focos $(1; 7)$ y $(11; 7)$. Hallar la ecuación de la elipse y la longitud de su lado recto.

Resolución:

Vértices: $(-3; 7)$ y $(15; 7)$ observamos que los vértices tienen la misma ordenada, entonces el eje focal es paralelo al eje X.

La longitud del eje mayor:

$2a = 15 - (-3) = 18 \Rightarrow a = 9$

Focos: $(1; 7)$ y $(11; 7)$, la longitud entre los focos es:

$2c = 11 - 1 = 10 \Rightarrow c = 5$

Hallamos el valor de b:

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 9^2 - 5^2 = 56$

$\Rightarrow b = \sqrt{56}$

Sabemos que el centro de la elipse es el punto medio de V_1V_2:

$V_1(-3; 7)$ y $V_2(15; 7)$ entonces centro:

$\left(\dfrac{-3+15}{2}; \dfrac{7+7}{2}\right) = (6; 7)$

Con todos estos datos se puede hallar la ecuación de elipse:

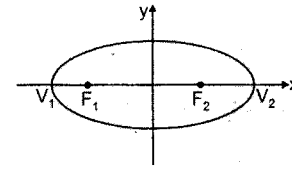
$\dfrac{(x-6)^2}{9^2} + \dfrac{(y-7)^2}{\sqrt{56}^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-6)^2}{81} + \dfrac{(y-7)^2}{56} = 1$

Longitud del lado recto:

$\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(\sqrt{56})^2}{9} \Rightarrow LR = \dfrac{112}{9}$

Observación

Un caso particular ocurre cuando el eje focal coincide con el eje "x" y su centro es (0; 0), en este caso la ecuación es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



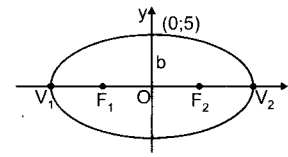
Coordenadas de los focos: $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; -0)$

Coordenadas de los vértices: $V_1(-a; 0)$ y $V_2(a; 0)$

Aplicaciones:

1. Los puntos de intersección de una elipse con los ejes son: $(-6; 0)$, $(0; 5)$, $(6; 0)$ y $(0; -5)$. Hallar la ecuación de la elipse:

Resolución:



Observamos que: $V_1(-6; 0)$ y $V_2(6; 0)$

entonces el centro es $(0; 0)$

Sabemos que la distancia del centro a un vértice es "a", entonces: $a = 6$.

Observamos que: $b = 5$

Ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{6^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

2. Hallar la ecuación de una elipse cuyo centro es $(0; 0)$, la longitud de su lado recto es 9/2 y uno de sus focos es $(\sqrt{7}; 0)$

Resolución:

Como el centro es $(0; 0)$ y uno de sus focos $(\sqrt{7}; 0)$ entonces el eje focal coincide con el eje X.

Sabemos que las coordenadas de los focos son: $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$.

Por dato $F_2(\sqrt{7}; 0)$, entonces $c = \sqrt{7} \Rightarrow c^2 = 7$

Lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 4b^2 = 9a$ ...(1)

Además:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{9a}{4} + 7 \Rightarrow 4a^2 = 9a + 28$

$4a^2 - 9a - 28 = 0 \Rightarrow (4a+7)(a-4) = 0$

$\Rightarrow a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

Reemplazando en (1): $4b^2 = 9(4) \Rightarrow b^2 = 9$

La ecuación de la elipse:

$\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

3. Hallar las coordenadas de los vértices, focos y la longitud del lado recto de la elipse:
$16x^2 + 25y^2 = 400$

Resolución:

Ecuación: $16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1$
$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
Observamos que: $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$; $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$
Además: $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$
Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5}$
Coordenadas de las vértices:
$V_1(-a; 0)$ y $V_2(a; 0) \Rightarrow V_1(-5; 0)$ y $V_2(5; 0)$
Coordenadas de los focos:
$F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0) \Rightarrow F_1(-3; 0)$ y $F_2(3; 0)$

4. Una elipse cuyo eje focal coincide con el eje X pasa por los puntos: $(\sqrt{6}; -1)$ y $(2; \sqrt{2})$. Hallar su ecuación (el centro es (0; 0)).

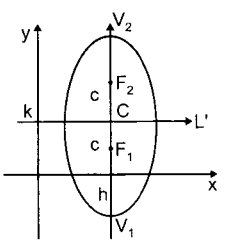
Resolución:

Como el eje focal coincide con el eje X y su centro es (0; 0), entonces su ecuación es de la forma:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$(\sqrt{6}; -1)$ pertenece a la elipse:
$\Rightarrow \frac{(\sqrt{6})^2}{a^2} + \frac{(-1)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
$(2; \sqrt{2})$ pertenece a la elipse:
$\Rightarrow \frac{(2)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$
Resolviendo al sistema se obtiene:
$a^2 = 8$ y $b^2 = 4$
La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ecuación de una elipse cuyo eje focal es paralelo al eje "y" y con centro (h; k)

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$$

Como el centro es (h; k), entonces:



Coordenadas de los focos: $F_1(h; k - c)$ y $F_2(h; k + c)$
Coordenadas de los vértices: $V_1(h; k - a)$ y $V_2(h; k + a)$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de una elipse cuyos vértices son: $V_1(6; -8)$ y $V_2(6; 14)$ y la longitud de su lado recto es 10.

Resolución:

El centro de la elipse es el punto medio V_1V_2, entonces sus coordenadas son:
$C\left(\frac{6+6}{2}; \frac{-8+14}{2}\right) \Rightarrow C(6; 3)$
Sabemos que: $V_1V_2 = 2a \Rightarrow 14-(-8) = 2a \Rightarrow a = 11$
Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = 10 \Rightarrow b^2 = 55$
Ecuación de la elipse: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
$\therefore \frac{(x-6)^2}{55} + \frac{(y-3)^2}{121} = 1$

2. Hallar la ecuación de una elipse cuyo centro (−3; 3), su eje focal es paralelo al eje Y, la longitud de su eje menor es 4 y de su eje mayor es 16.

Resolución:

Centro (h; k) = (−3; 3)
Longitud del eje menor: $2b = 4 \Rightarrow b = 2$
Longitud del eje mayor: $2a = 16 \Rightarrow a = 8$
Ecuación de la elipse:
$\frac{[x-(-3)]^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{8^2} = 1$
$\therefore \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{64} = 1$

3. La ecuación de un elipse es:
$100(x + 1)^2 + 81(y + 5)^2 = 8100$
hallar las coordenadas de los focos y vértices.

Resolución:

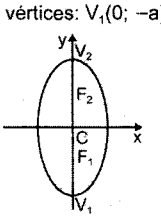
Ecuación: $100(x + 1)^2 + 81(y + 5)^2 = 8100$
$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{81} + \frac{(y+5)^2}{100} = 1$
Centro de la elipse: (−1; −5)
$b^2 = 81$, $a^2 = 100 \Rightarrow c^2 = 100 - 81 \Rightarrow c^2 = 19$
$\Rightarrow c = \sqrt{19}$
Coordenadas de los focos:
$F_1(-1; -5 - \sqrt{19})$ y $F_2(-1; -5 + \sqrt{19})$
Coordenadas de los vértices:
$V_1(-1; -5 - 10) = V_1(-1; -15)$
$V_2(-1; -5 + 10) = V_2(-1; 5)$

Observación

Un caso particular ocurre cuando el eje focal coincide con el eje "y", el centro es (0; 0). En este caso la ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Coordenadas de los focos: $F_1(0; -c)$ y $F_2(0; c)$
Coordenadas de los vértices: $V_1(0; -a)$ y $V_2(0; a)$



Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de una elipse cuyos vértices son: (0; −7) y (0; 7) y sus focos (0; −5) y (0; 5)

   Resolución:

   $F_1(0; -5)$ y $F_2(0; 5) \Rightarrow F_1F_2 = 10$

   $\Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

   $V_1(0; -7)$ y $V_2(0; -7) \Rightarrow V_1V_2 = 14$

   $\Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$

   $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = (7)^2 - (5)^2 \Rightarrow b^2 = 24$

   Eje focal es el eje y.

   Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$

2. La longitud del eje mayor de una elipse es el doble de su eje menor, la longitud de su lado recto es 5. Hallar la ecuación de la elipse, sabiendo que su vértice es (0; 0) y su eje focal coincide con el eje y.

   Resolución:

   Dato: $a = 2b$

   Lado recto: $\frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = 5 \Rightarrow b = 5$

   Por lo tanto: $a = 10$

   Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

Observaciones

1. Conociendo la ecuación de una elipse se puede determinar por simple inspección si su eje focal coincide o es paralelo a uno de los ejes coordenados. Por ejemplo:

   - $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$: En este caso como el número que está debajo de "x" es mayor que el número que está debajo de "y", entonces el eje focal coincide con el eje X.
   - $\frac{(x-3)^2}{7} + \frac{(y+9)^2}{4}$: En este caso ocurre algo similar al ejemplo anterior, pero la diferencia es que el centro de la elipse es (3; −9) por lo tanto el eje focal es paralelo al eje X.
   - $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{19} = 1$: En este caso el número que está debajo de "y", es mayor que el número debajo "x". Además su centro es (0; 0), entonces el eje focal coincide con el eje y.
   - $\frac{(x-11)^2}{23} + \frac{(y-17)^2}{25} = 1$: En este caso ocurre algo similar al ejemplo anterior pero el centro es (11; 17); por lo tanto el de eje focal es paralelo al eje y.

2. Es frecuente expresar la ecuación de una elipse en forma desarrollada, por ejemplo la ecuación de una elipse es:

   $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$, efectuando operaciones:

   $25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 225$

   $25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 225$

   $25x^2 - 100x + 100 + 9y^2 - 18y + 9 = 225$

   $25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$

3.° Ecuación general:

   La ecuación general de una elipse se puede representar como:

   $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

   $A \neq C$, A y C del mismo signo.

   Centro: $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

   Si: $|A| > |C|$ el eje focal de la elipse es paralelo o coincide con el eje y.

   Si: $|A| < |C|$ el eje focal de la elipse es paralelo o coincide con el eje x.

Aplicaciones:

1. La ecuación de una elipse es:

   $5x^2 + 2y^2 - 10x - 12y - 13 = 0$; reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos.

   Resolución:

   Ecuación: $5x^2 + 2y^2 - 10x - 12y + 13 = 0$

   Ordenamos: $5x^2 - 10x + 2y^2 - 12y = -13$

   $\Rightarrow 5(x^2 - 2x) + 2(y^2 - 6y) = -13$

   Completamos cuadrados:

   $5(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 6y + 9) = -13 + 5 + 18$

   $5(x-1)^2 + 2(y-3)^2 = 10 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

   Eje focal: paralelo al eje y.

   Observamos que:

   $a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \wedge b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

   $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 5 - 2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

   Coordenadas del centro: (1; 3)

   Coordenadas de los focos:

   $F_1(1; 3 - \sqrt{3}) \wedge F_2(1; 3 + \sqrt{3})$

   Coordenadas de los vértices:

   $V_1(1; 3 - \sqrt{5}) \wedge V_2(1; 3 + \sqrt{5})$

2. La ecuación de una elipse es:

   $5x^2 + 9y^2 - 70x + 18y + 209 = 0$. Hallar las coordenadas de los focos, vértices y centro.

   Resolución:

   Ecuación: $5x^2 + 9y^2 - 70x + 18y + 209 = 0$

   Ordenamos: $5x^2 - 70x + 9y^2 + 18y = -209$

   $5(x^2 - 14x) + 9(y^2 + 2y) = -209$

   Completamos cuadrados:

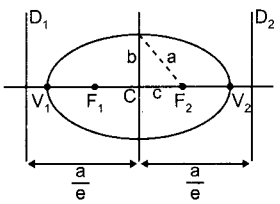
   $5(x^2 - 14x + 49) + 9(y^2 + 2y + 1) = -209 + 245 + 9$

   $5(x-7)^2 + 9(y+1)^2 = 45$

   $\Rightarrow \frac{(x-7)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$. Ecuación de la elipse.

Eje focal: paralelo al eje x.
Observamos que:
$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \wedge b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 9 - 5 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$
Centro de la elipse: $(7; -1)$
Coordenadas de los focos:
$F_1(7 - 2; -1) = F_1(5; -1)$
$F_2(7 + 2; -1) = F_2(9; -1)$
Coordenadas de los vértices:
$V_1(7 - 3; -1) = V_1(4; -1)$
$V_2(7 + 3; -1) = V_2(10; -1)$

Excentricidad y directrices de la elipse



Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

Para la elipse: $e < 1$

La distancia entre las directrices es: $\frac{2a}{e}$

Ejemplos:

1. La ecuación de una elipse es:
$5(y + 1)^2 + 9(x - 7)^2 = 45$; hallar las ecuaciones de las directrices y su excentricidad.

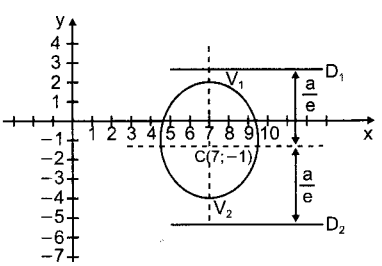
Resolución:

Ecuación de la elipse: $5(y + 1)^2 + 9(x - 7)^2 = 45$
Dividiendo a toda la expresión entre 45:

$$\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-7)^2}{5} = 1$$

Centro $(7; -1)$; $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 5$

$b = \sqrt{5}$; $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2$



Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{3}{2/3} = \frac{9}{2}$

Directriz D_1: $y = -1 + \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2}$

Directriz D_2: $y = -1 - \frac{9}{2} \Rightarrow y = -\frac{11}{2}$

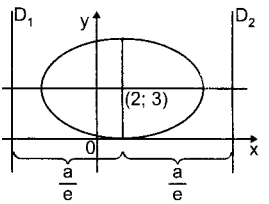
2. La ecuación de una elipse:
$25(y - 3)^2 + 9(x - 2)^2 = 225$, hallar las ecuaciones de las directrices y su excentricidad.

Resolución:

Ecuación de la elipse: $25(y - 3)^2 + 9(x - 2)^2 = 225$

$$\frac{25(y-3)^2}{225} + \frac{9(x-2)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$



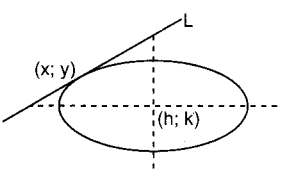
Centro: $(2; 3)$; $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$;
$c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{5}{4/5} = \frac{25}{4}$

Directriz D_1: $x = 2 - \frac{25}{4} \Rightarrow x = -\frac{17}{4}$

Directriz D_2: $x = 2 + \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{33}{4}$

Ecuación de la recta tangente a la elipse, conociendo el punto de tangencia



Si se conoce la ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_1; y_1)$

$$\boxed{\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} + \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1}$$

Si se conoce la ecuación general:
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

La ecuación es:

$$\boxed{Ax_1x + Cy_1y + \frac{D}{2}(x_1 + x) + \frac{E}{2}(y_1 + y) + F = 0}$$

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse, sabiendo que su ecuación es:
$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ y el punto de tangencia es: $(3; -2/5)$.

Resolución:

(*) Ecuación de la elipse:
$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$
(*) Punto de tangencia: $(3; -2/5)$

$$16(3)x + 25\left(-\frac{2}{5}\right)y + \frac{32}{2}(3 + x) - \frac{100}{2}\left(-\frac{2}{5} + y\right) - 284 = 0$$

$48x - 10y + 48 + 16x + 20 - 50y - 284 = 0$

$\Rightarrow 16x - 15y - 54 = 0$

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse cuya ecuación es: $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

Punto de tangencia: $\left(3; -\frac{2}{5}\right)$

Resolución:

Ecuación de la elipse: $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

Punto de tangencia: (3; −2/5)

Ecuación de la recta tangente:

$$\frac{(3+1)(x+1)}{25} + \frac{\left(-\frac{2}{5} - 2\right)(y-2)}{16} = 1$$

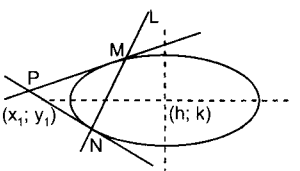
$$\frac{4(x+1)}{25} - \frac{3(y-2)}{20} = 1 \Rightarrow 16x - 15y - 54 = 0$$

Nota

Observa que los ejemplos A y B son iguales, solo ha variado la forma de la ecuación de la elipse, al final el resultado es el mismo.

Ecuación de la cuerda de contacto

Desde $P(x_1; y_1)$ (ver figura adjunta) se trazan tangentes a la elipse, cuya ecuación es:



$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, siendo M y N los puntos de tangencia; la ecuación de la recta que pasa por M y N es:

$$Ax_1x + Cy_1y + \frac{D}{2}(x_1 + x) + \frac{E}{2}(y_1 + y) + F = 0$$

Ejemplo:

La ecuación de una elipse es:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$$

Desde el punto (−4; 1) se trazan dos rectas tangentes a la elipse, hallar la ecuación de la cuerda de contacto.

Resolución:

Ecuación de la elipse: $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$

Desde el punto (−4; 1) se trazan las tangentes.

Ecuación de la cuerda de contacto:

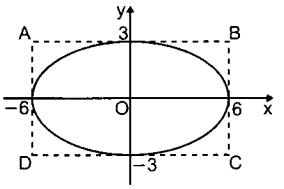
$$-4x + 4(1)y + \frac{2}{2}(-4 + x) - \frac{12}{2}(y + 1) + 6 = 0$$

$\therefore\ 3x + 2y + 4 = 0$

Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de la elipse inscrita en el rectángulo ABCD. A(−6; 3), B(6; 3) y C(6; −3)

Resolución:



Del gráfico, observamos:

Eje mayor: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$

Eje menor: $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Eje focal: coincide con el eje X

Centro: (0; 0)

Ecuación: $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 36$

2. La ecuación de una elipse es:

$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ ...E_1

Otra elipse tiene por ecuación:

$x^2 + 4y^2 - 8x - 8 = 0$ ...E_2. Hallar la distancia entre sus centros.

Resolución:

Por teoría; que si la ecuación de la elipse es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow$ centro $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

Ecuación:

$\underbrace{16}_{A}x^2 + \underbrace{25}_{C}y^2 + \underbrace{32}_{B}x - \underbrace{100}_{E}y - \underbrace{284}_{F} = 0$ ...E_1

Centro: $\left(-\frac{32}{32}; -\frac{-100}{50}\right) = (-1; 2)$

$x^2 + 4y^2 - 8x - 8 = 0$ ...E_2

Centro: $\left(-\frac{-8}{2}; -\frac{0}{2}\right) = (4; 0)$

Distancia entre centros:

$\sqrt{(-1-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}$

3. Determinar la ecuación de una elipse con centro en (−2; −5), eje focal paralelo al eje Y, la longitud del eje mayor es 24 y su excentricidad es $\sqrt{5}/3$.

Resolución:

Como el centro es (−2; −5) y el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es:

$$\frac{(x+2)^2}{b^2} + \frac{(y+5)^2}{a^2} = 1$$

Longitud del eje mayor: $2a = 24 \Rightarrow a = 12$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 4\sqrt{5}$

Pero: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (12)^2 = b^2 + (4\sqrt{5})^2 \Rightarrow b = 8$

Entonces la ecuación es: $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{144} = 1$

4. Determinar "n" para que la recta: $y = 2x + n$, sea tangente a la elipse: $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Resolución:

La recta $y = 2x + n$ debe ser tangente a la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, entonces:

$9x^2 + 4(2x + n)^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 + 4(4x^2 + 4nx + n^2) = 36$

$25x^2 + 16nx + 4n^2 - 36 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-16n \pm \sqrt{(16n)^2 - 4(25)(4n^2 - 36)}}{50}$$

Como debe haber tangencia, entonces el discriminante debe ser cero (para obtener solo un valor de x).

$(16n)^2 - 100(4n^2 - 36) = 0 \Rightarrow n = \pm 5$

5. Los focos de una elipse están en la recta L_1: $3x - 5y + 12 = 0$ y L_2: $2x + 3y - 6 = 0$, el eje focal es la recta L_3: $x - 6 = 0$. Hallar la ecuación de la elipse, si su eje menor mide 6 unidades.

Resolución:

Los focos son: $L_1 \cap L_3$ y $L_2 \cap L_3$

Calculamos $L_1 \cap L_3 = F_1$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = -12 \\ x - 6 = 0 \end{array}\right\} F_1 = (6; 6)$$

Calculamos: $L_2 \cap L_3 = F_2$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \\ x = 6 \end{array}\right\} F_2 = (6; -2).$$

Centro: $\dfrac{(6; -2) + (6; 6)}{2} \Rightarrow (6; 2)$

Distancia focal: $8 = 2c \Rightarrow c = 4$

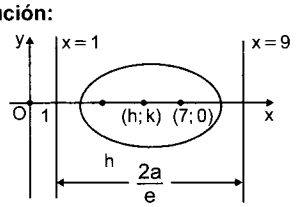
Dato: el eje menor: $6 = 2b \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = 5$

Ecuación: $\dfrac{(x-6)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

6. Hallar la ecuación de la elipse cuyas directrices son las rectas: L_1: $x - 1 = 0$ y L_2: $x - 9 = 0$ y uno de sus focos es (7; 0).

Resolución:



Centro = (h; k)

$h = \dfrac{1+9}{2} = 5 \wedge k = 0$

$c = 7 - 5 \Rightarrow c = 2$

$\dfrac{2a}{e} = \dfrac{2a^2}{c} = 8 \Rightarrow 2a^2 = 8(2) \Rightarrow a^2 = 8$

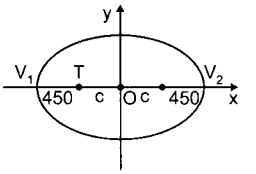
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 8 = b^2 + 2^2 \Rightarrow b^2 = 4$

La ecuación es:

$\dfrac{(x-5)^2}{8} + \dfrac{(y-0)^2}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

7. Un satélite se mueve alrededor de la Tierra describiendo una órbita elíptica, siendo la Tierra un foco y la excentricidad igual a 1/3. Si se sabe que la distancia más corta del satélite a la Tierra es 450 km, determinar la distancia más larga.

Resolución:



Ubicamos la elipse en forma adecuada (centro (0; 0))

Como la Tierra es un foco

$\Rightarrow OT = c$ y $TV_1 = 450$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$

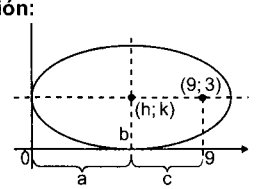
De la figura se deduce: $a = c + 450$

$\Rightarrow \dfrac{c}{c + 450} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3c = c + 450 \Rightarrow 2c = 450$

Luego: $TV_2 = 2c + 450 \Rightarrow 450 + 450 = 900$

8. Una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados es tangente a éstos, si su foco de mayor abscisa es (9; 3), hallar la ecuación general de la elipse.

Resolución:



De la figura se deduce: $b = 3$, además: $a + c = 9$.

Pero $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow (3)^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow 9 = (a - c)(a + c) \Rightarrow a - c = 1$

Se obtiene: $a + c = 9 \wedge a - c = 1$

Resolviendo: $a = 5 \wedge c = 4$

El centro: (h; k) = (5; 3), entonces la ecuación es:

$\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

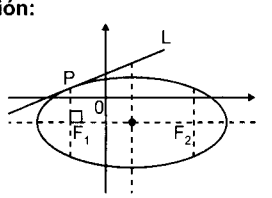
$\Rightarrow 9(x - 5)^2 + 25(y - 3)^2 = 225$

$9(x^2 - 10x + 25) + 25(y^2 - 6y + 9) = 225$

$9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$

9. La ecuación de una elipse es: $7(x - 1)^2 + 16(y + 1)^2 = 112$, hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por uno de los extremos del lado recto, intersecta al eje Y en (p; 0), $p > 0$ y su pendiente es positiva.

Resolución:



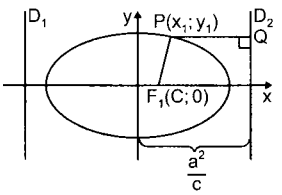
Ecuación: $7(x - 1)^2 + 16(y + 1)^2 = 112$

$\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{7} = 1 \Rightarrow$ centro: (1; −1)

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4;\ b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$
$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 \Rightarrow c = 3$
De acuerdo a las condiciones del problema el punto de tangencia es P.
Lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2} \Rightarrow PF_1 = \frac{7}{4}$
Observa que: $F_1 = (-2; -1)$
La ordenada de P es: $-1 + \frac{7}{4} = \frac{3}{4}$
Entonces el punto de tangencia P: $\left(-2; \frac{3}{4}\right)$
Ecuación de la recta tangente en P:
$7(-2-1)(x-1) + 16\left(\frac{3}{4}+1\right)(y+1) = 112$
$\Rightarrow -21x + 21 + 28y + 28 = 112$
$-21x + 28y - 63 = 0$
Simplificando: $3x - 4y + 9 = 0$

10. La excentricidad de una cónica es el cociente entre la distancia de un punto de la cónica al foco y su distancia a una recta fija llamada directriz.
Demostrar que para una elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, la excentricidad es c/a.

Resolución:



Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Excentricidad: $e = \frac{PF_1}{PQ}$

Como P pertenece a la elipse: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Se deduce: $y_1^2 = \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)b^2$

$$e = \frac{\sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1 - 0)^2}}{\frac{a^2}{c} - x_1}$$

$$e^2 = \frac{(x_1 - c)^2 + \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)b^2}{\left(\frac{a^2 - cx_1}{c}\right)^2}$$

$$e^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1c + c^2 + \frac{(a^2 - x_1^2)b^2}{a^2}}{\frac{(a^2 - cx_1)^2}{c^2}}$$

$$e^2 = \frac{\frac{a^2x_1^2 - 2a^2x_1c + a^2c^2 + a^2b^2 - x_1^2b^2}{a^2}}{\frac{(a^2 - cx_1)^2}{c^2}}$$

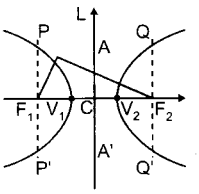
$$e^2 = \frac{[(a^2 - b^2)x_1^2 + a^2(c^2 + b^2) - 2a^2x_1c]c^2}{[(a^2 - cx_1)^2]a^2}$$

$$e^2 = \frac{(c^2x_1^2 + a^4 - 2a^2x_1c)c^2}{(a^4 + c^2x_1^2 - 2a^2cx_1)a^2} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

LA HIPÉRBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano (denominados focos), es igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Elementos de la hipérbola



Puntos F_1 y F_2: Focos de la hipérbola.
Puntos V_1 y V_2: Vértices de la hipérbola.
Punto C: Centro de la hipérbola
Recta L: Eje focal (pasa por los dos focos)
Recta L': Eje normal
Segmento V_1V_2: Eje transverso
Segmento AA': Eje conjugado
Segmentos PP' y QQ': Lados rectos

Propiedades

Longitud del eje transverso:
$V_1V_2 = 2a \Rightarrow |V_1C| = |V_2C| = a$
Longitud del eje conjugado:
$AA' = 2b \Rightarrow |AC| = |A'C| = b$
Distancia entre los focos:
$F_1F_2 = 2c \Rightarrow |F_1C| = |F_2C| = c$
C es punto medio de V_1V_2 y F_1F_2
La longitud de cada uno de los lados rectos:
(PP' y QQ') es $= \frac{2b^2}{a}$
Por definición, si S es un punto (cualquiera) de la hipérbola se cumple que: $||F_2S| - |F_1S|| = 2a$
Relación entre los parámetros a, b y c: $c^2 = a^2 + b^2$

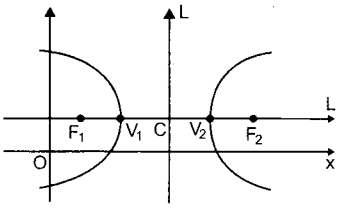
Ecuación de la hipérbola

Para determinar la ecuación de una hipérbola es necesario conocer la longitud del eje transverso y del eje conjugado, además la posición de su eje focal y su centro.

Ecuación de una hipérbola con centro en (h; k) y eje focal paralelo al eje x

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k^2)}{b^2} = 1}$$

Coordenadas de los focos: $F_1(h - c; k) \wedge F_2(h + c; k)$
Coordenadas de los vértices: $V_1(h - a; k) \wedge V_2(h + a; k)$



Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de una hipérbola, cuyo eje focal es paralelo al eje X, su centro es (4; 5); la longitud de su eje conjugado es 10 y de su eje transverso es 8.

   Resolución:

   Centro de la hipérbola (4; 5)

   Eje conjugado: $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

   Eje transverso: $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

   Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-4)^2}{16} - \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1$

2. Las coordenadas de los focos de una hipérbola son: (5; 2), (11; 2) y de uno de sus vértices es (6; 2). Hallar la ecuación de la hipérbola.

   Resolución:

   Observar que: $F_1(5; 2)$ y $F_2(11; 2)$ entonces el eje focal es paralelo al eje X, como el centro es punto medio de F_1 y F_2, entonces:

   $C\left(\dfrac{5+11}{2}; \dfrac{2+2}{2}\right) = C(8; 2)$... coordenadas del centro.

   Observamos que la distancia del centro al foco es igual a $3 \Rightarrow c = 3$

   Como $V_1(6; 2)$ y $C(8; 2)$, entonces la distancia del centro al vértice es $2 \Rightarrow a = 2$

   Sabemos que: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

   La ecuación de la hipérbola es:

   $\dfrac{(x-8)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$

3. La ecuación de una hipérbola es:
   $7(x+3)^2 - 9(y-4)^2 = 63.$
   Hallar las coordenadas de los vértices y focos.

   Resolución:

   Ecuación:

   $7(x+3)^2 - 9(y-4)^2 = 63 \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{7} = 1$

   Como $(x + 3)^2$ está afectado del signo positivo, entonces el eje focal de la hipérbola es paralelo al eje X.

   Observamos que:

   $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \wedge b^2 = 7$

   $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 7 = 16 \Rightarrow c = 4$

   Coordenadas del centro: (−3; 5)

   Coordenadas de los focos:

   $F_1(-3-4; 5) = F_1(-7; 5)$

   $F_2(-3+4; 5) = F_2(1; 5)$

   Coordenadas de los vértices:

   $V_1(-3-3; 5) = V_1(-6; 5)$

   $V_2(-3+3; 5) = V_2(0; 5)$

Observaciones

Un caso particular ocurre cuando el centro de la hipérbola es (0; 0) y su eje focal coincide con el eje X, en este caso la ecuación es:

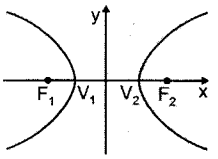
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Coordenadas de los focos:

$F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$

Coordenadas de los vértices:

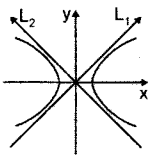
$V_1(-a; 0)$ y $V_2(a; 0)$



1. La hipérbola cuya ecuación es: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ tiene por asíntotas las rectas:
   $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$

   Ejemplos:

   1. La ecuación de una hipérbola es
      $6x^2 - 8y^2 = 48$
      Hallar la ecuación de sus asíntotas.



   Resolución:

   Ecuación: $6x^2 - 8y^2 = 48$

   $(\sqrt{6}x - \sqrt{8}y)(\sqrt{6}x + \sqrt{8}y) = 48$

   Para hallar las asíntotas se cambia el valor de 48 por el número cero.

   $(\sqrt{6}x - \sqrt{8}y)(\sqrt{6}x + \sqrt{8}y) = 0$

   Ecuación de L_1:

   $-\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{6}{5} + 3\right) \Rightarrow L_1: \dfrac{c}{c+450} = \dfrac{1}{3}x - 2y = 0$

   Ecuación de L_2:

   $\sqrt{6}x + \sqrt{8}y = 0 \Rightarrow L_2: \dfrac{c}{c+450} = \dfrac{1}{3}y + 2y = 0$

   2. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6; 2), tiene centro en el origen, su eje focal coincide con el eje X y una de sus asíntotas es la recta $2x + 5y = 0$

      Resolución:

      Como el centro es (0; 0) y su eje focal coincide con el eje X, su ecuación es de la forma:

      $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

      Si una asíntota es: $2x + 5y = 0$, entonces la otra asíntota es: $2x - 5y = 0$

      Entonces:

      $(2x - 5y)(2x + 5y) = k$ ...(k es una constante)

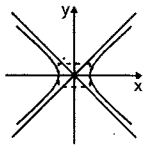
      $4x^2 - 25y^2 = k$; como (6; 2) es un punto de la hipérbola debe cumplir con la ecuación:

      $4x^2 - 25y^2 = k \Rightarrow 4(6)^2 - 25(2)^2 = k$

      Se obtiene el valor de $k = 44$

      Ecuación de la hipérbola: $4x^2 - 25y^2 = 44$

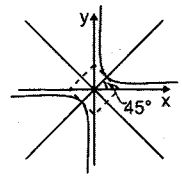
2. Cuando el eje transverso es igual al eje conjugado, entonces se le denomina: hipérbola equilátera o hipérbola rectangular.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si a = b

Entonces: $x^2 - y^2 = a^2$ ...ecuación de la hipérbola equilátera o hipérbola rectangular.

Si los ejes son oblicuos y forma 45° con los ejes coordenados, entonces la ecuación de la hipérbola equilátera es: xy = k



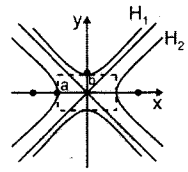
3. Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de una es igual al eje conjugado de la otra se llaman: hipérbolas conjugadas.

Hipérbola: H_1

$\Rightarrow$ Ecuación: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Hipérbola: H_2

$\Rightarrow$ Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Ejemplo:

H_1: $5x^2 - 9y^2 = 45$ y H_2: $9y^2 - 5x^2 = 45$ son hipérbolas conjugadas.

4. Ecuación General

La ecuación general de una hipérbola se puede representar como:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; A y C de signos opuestos.

Centro: $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

Ejemplo:

$4x^2 - 9y^2 + 16x - 54y - 101 = 0$ es una hipérbola

$\downarrow$ A, $\downarrow$ C, $\downarrow$ D, $\downarrow$ E, $\downarrow$ F

Centro: $\left(-\frac{16}{2(4)}; -\frac{-54}{2(-9)}\right) = (-2; -3)$

Aplicaciones:

1. Las coordenadas de los focos de una hipérbola son: $F_1(-6; 0)$ y $F_2(6; 0)$ y de uno de sus vértices es $(-5; 0)$, hallar la ecuación de la hipérbola.

Resolución:

Como $F_1(-6; 0)$ y $F_2(6; 0)$, entonces podemos observar que el centro es (0; 0) y además el eje focal coincide con el eje x.

Entonces: $F_1F_2 = 2c \Rightarrow 6 - (-6) = 2c \Rightarrow c = 6$

Como: $V_1(-5; 0) \Rightarrow a = 5$

$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 25 \Rightarrow b^2 = 11$

La ecuación es: $\frac{x^2}{25} - \frac{7^2}{11} = 1$

2. La longitud del lado recto de una hipérbola es 10, la longitud del eje transverso es 8, el eje focal coincide con el eje X, y su centro es (0; 0). Hallar la ecuación de la hipérbola.

Resolución:

Lado recto: $\frac{2b^2}{a} = 10 \Rightarrow b^2 = 5a$ ...(1)

Longitud del eje transverso:

$V_1V_2 = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Reemplazando en (1): $b^2 = 5(4) \Rightarrow b^2 = 20$

Como el eje focal coincide con el eje X y su centro es (0; 0), entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

3. Hallar los focos, vértices y lado recto de una hipérbola cuya ecuación es: $(4x - 3y)(4x + 3y) = 144$.

Resolución:

Ecuación:

$(4x - 3y)(4x + 3y) = 144 \Rightarrow 16x^2 - 9y^2 = 144$

$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Como la variable x está afectada de un coeficiente positivo y el centro es (0; 0), entonces el eje focal coincide con el eje x.

Observamos: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$

Coordenadas de los focos:

$F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0) \Rightarrow F_1(-5; 0)$ y $F_2(5; 0)$

Coordenadas de los vértices:

$V_1(-a; 0)$ y $V_2(a; 0) \Rightarrow V_1(-3; 0)$ y $V_2(3; 0)$

Longitud del lado recto:

$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} \Rightarrow LR = \frac{32}{3}$

4. La longitud del eje conjugado de una hipérbola es 2, su eje focal coincide con el eje x y su centro es (0; 0), la distancia entre un foco y vértice (del mismo lado) es 1/2. Hallar la ecuación de la hipérbola.

Resolución:

Longitud del eje conjugado: $2b = 2 \Rightarrow b = 1$

Como el centro es (0; 0) y su eje focal coincide con el eje x, entonces su ecuación es de la forma:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Distancia entre un foco y un vértice es: $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c - a = \frac{1}{2}$

Como: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + 1 \Rightarrow c^2 - a^2 = 1$

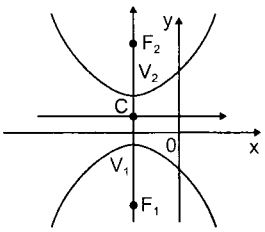
$\Rightarrow (c - a)(c + a) = 1$

$c - a = \frac{1}{2} \wedge c + a = 2$

Resolviendo: $a = \frac{3}{4} \wedge c = \frac{5}{4}$

Ecuación: $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{(1)^2} = 1 \Rightarrow \frac{16x^2}{9} - y^2 = 1$

Ecuación de una hipérbola con centro en (h; k) y eje focal paralelo al eje y



$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

Coordenadas del centro: (h; k)
Coordenadas de los focos:
$F_1(h; k - c)$ y $F_2(h; k + c)$
Coordenadas de los vértices:
$V_1 = (h; k - a) \wedge V_2 = (h; k + a)$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de una hipérbola con centro en (3; 7), eje focal paralelo al eje y, longitud del eje transverso 14 y longitud del eje conjugado 22.

   Resolución:

   Centro: (3; 7)
   Longitud del eje transverso: $2a = 14 \Rightarrow a = 7$
   Longitud del eje conjugado: $2b = 22 \Rightarrow b = 11$
   Eje focal: Paralelo al eje y.

   Ecuación: $\dfrac{(y-7)^2}{49}-\dfrac{(x-3)^2}{121}=1$

2. Hallar las coordenadas de los focos y vértices de una hipérbola cuya ecuación es:
   $7(y + 3)^2 - 9(x - 5)^2 = 63$

   Resolución:

   Ecuación: $7(y + 3)^2 - 9(x - 5)^2 = 63$

   $\Rightarrow \dfrac{(y+3)^2}{9^2}-\dfrac{(x-5)^2}{7}=1$ ...(1)

   Sabemos que la ecuación de la hipérbola es:

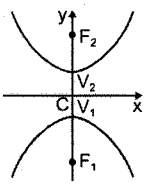
   $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ...(2)

   Identificando términos de (1) y (2):
   Eje focal: Paralelo al eje y
   Observamos que: $a^2 = 9$
   $\Rightarrow a = 3 \wedge b^2 = 7$
   $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 7$
   $\Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$
   Coordenadas del centro (5; −3)
   Coordenadas de los vértices:
   $V_1(5; -3 + 3) = V_1(5; 0)$
   $V_2(5; -3 -3) = V_2(5; -6)$
   Coordenadas de los focos:
   $F_1(5; -3 + 4) = F_1(5; 1)$
   $F_2(5; -3 -4) = F_2(5 ; -7)$

Observación

Un caso particular de esta ecuación ocurre cuando el centro de la hipérbola (h; k) = (0; 0) y el eje focal coincide con el eje Y. En este caso la ecuación es:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

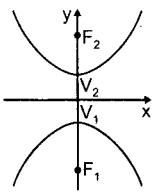


Coordenadas de los focos:
$F_1(0; -c)$ y $F_2(0; c)$
Coordenadas de los vértices:
$V_1(0; -a)$ y $V_2(0; a)$

Aplicaciones:

1. Hallar la ecuación de una hipérbola, si las coordenadas de sus focos son: (0; −5) y (0; 5) y además la longitud de su lado recto es igual a 9/2.

   Resolución:



   Observamos que: $F_1(0; -5)$ y $F_2(0; 5)$
   El centro de la hipérbola es el punto medio de F_1F_2,
   entonces: $C\left(\dfrac{0+0}{2}; \dfrac{-5+5}{2}\right) = C(0;0)$
   Centro en el origen, además el eje focal coincide con el eje y.
   Distancia entre los focos: $F_1F_2 = 2c$
   $10 = 2c \Rightarrow c = 5$ ...(1)
   Longitud del lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{9}{2}$
   $b^2 = \dfrac{9a}{4}$ ...(2)
   Sabemos que: $c^2 = a^2 + b^2$
   Reemplazamos (1) y (2): $5^2 = a^2 + \dfrac{9a}{4}$
   $25 = \dfrac{4a^2+9a}{4} \Rightarrow 4a^2 + 9a - 100 = 0$
   $\Rightarrow (a - 4)(4a + 25) = 0$
   Observamos que: $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$
   $\Rightarrow b^2 = \dfrac{9(4)}{4} \Rightarrow b = 3$
   Ecuación de la hipérbola:
   $\dfrac{y^2}{4^2}-\dfrac{x^2}{3^2}=1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

2. La ecuación de una hipérbola es:
   $15y^2 - 49x^2 = 735$, hallar las coordenadas de los vértices y focos, además la longitud del lado recto.

   Resolución:

   Ecuación: $15y^2 - 49x^2 = 735$

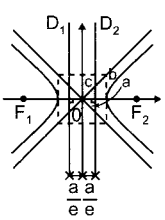
   $\Rightarrow \dfrac{15y}{735}-\dfrac{49x^2}{735}=1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{49}-\dfrac{x^2}{15}=1$

Observamos que el centro de la hipérbola es (0; 0) además su eje focal coincide con el eje y.
También se observa que:
$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$; $b^2 = 15 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 49 + 15 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = 8$
Longitud del eje transverso: $2a = 2(7) = 14$
Longitud del eje conjugado: $2b = 2\sqrt{15}$
Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(15)}{7} = \frac{30}{7}$
Coordenadas de los vértices: $V_1(0; -7)$ y $V_2(0; 7)$
Coordenadas de los focos: $F_1(0; -8)$ y $V_2(0; 8)$

3. Hallar la distancia de cada uno de los focos de la hipérbola: $5y^2 - 4x^2 = 80$, al punto P(5; 6).

Resolución:
Ecuación:
$5y^2 - 4x^2 = 80 \Rightarrow \frac{5y^2}{80} - \frac{4x^2}{80} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$
Observamos: Eje focal coincide con el eje y.
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 20 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 20$
$\Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$
Coordenadas de los focos: $F_1(0; -6)$ y $F_2(0; 6)$
Distancia de F_1 al punto P:
$F_1P = \sqrt{(0-5)^2 + [6-(-6)]^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$
Distancia de F_2 al punto P:
$F_2P = \sqrt{(0-5)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{25} = 5$

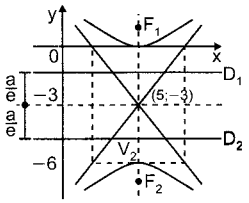
Excentricidad y directrices de la hipérbola



Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
Para la hipérbola $e > 1$
Distancia entre directrices: $\frac{2a}{e}$

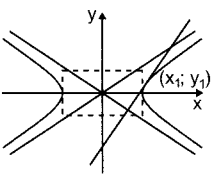
Por ejemplo: la ecuación de una hipérbola es:
$7(y + 3)^2 - 9(x - 5)^2 = 63$.
Hallar la excentricidad y la ecuación de cada directriz.

Resolución:
Dato: $7(y + 3)^2 - 9(x - 5)^2 = 63$
$\Rightarrow \frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{7} = 1$
$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; b^2 = 7; c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$
Centro: (5; −3); excentricidad: $\frac{c}{a} = \frac{4}{3}$
$V_1 = (5; 0)$ y $V_2 = (5; -6)$
$F_1 = (5; 1)$ y $F_2 = (5; -7)$



Directrices: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$
D_1: $y = -3 + \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$
D_2: $y = -3 - \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{13}{3}$

Ecuación de la recta tangente a la hipérbola, conociendo el punto de tangencia

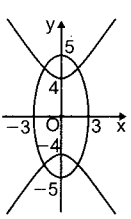


- Si se conoce la ecuación ordinaria
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_1; x_1)$ es:
$$\boxed{\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1}$$
- Si se conoce la ecúación general:
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
La ecuación de la recta tangente en $(x_1; y_1)$ es:
$Ax_1x + Cy_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices y focos coinciden con los focos y vértices (respectivamente) de la elipse cuya ecuación es:
$25x^2 + 9y^2 = 225$.

Resolución:
Ecuación de la elipse:
$25x^2 + 9y^2 = 225 \Rightarrow \frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = 1$
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$



Eje focal: coincide con el eje y.
$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$
Coordenadas de los focos: $F_1(0; -4)$ y $F_2(0; 4)$
Coordenadas de los vértices: $V_1(0; -a)$ y $V_2(0; a)$
$\Rightarrow V_1(0; -5)$ y $V_2(0; 5)$
Longitud del eje menor: $2b = 6$
Para la hipérbola:
Eje focal: coincide con el eje y.
Focos: $F_1(0; -5)$ y $F_2(0; 5) \Rightarrow c = 5$
Vértices: $V_1(0; -4)$ y $V_2(0; 4) \Rightarrow a = 4$
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b = 3$
Ecuación de la hipérbola:
$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

2. La ecuación de una hipérbola es:
$x^2 - y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$
Hallar el producto de las pendientes de sus asíntotas.

Resolución:

Ecuación: $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$
Completamos cuadrados:
$x^2 + 4x + 4 - (y^2 - 6y + 9) = 6 + 4 - 9$
$(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = 1$ ...es una hipérbola equilátera, de centro $(-2; 3)$.
Para hallar las asíntotas se cambia el 1 por 0.
$(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = 0$
$\Rightarrow (x + 2 + y - 3)(x + 2 - y + 3) = 0$
Entonces las asíntotas son:
L_1: $x + y - 1 = 0$; $m_1 = -1$;
L_2: $x - y + 5 = 0$; $m_2 = 1$
$\therefore m_1m_2 = -1$

3. Hallar la ecuación ordinaria de la hipérbola cuyas asíntotas son: $2x - y - 6 = 0 \wedge 2x + y - 2 = 0$, además pasa por $(-11; 8)$.

Resolución:

Asíntotas: $2x - y - 6 = 0 \wedge 2x + y - 2 = 0$
Entonces la ecuación de la hipérbola es:
$(2x - y - 6)(2x + y - 2) = k$
Como $(-11; 8) \in$ a la hipérbola, entonces:
$[2(-11) - 8 - 6][2(-11) + 8 - 2] = k \Rightarrow k = 576$
Ecuación de la hipérbola:
$(2x - y - 6)(2x + y - 2) = 576$
$[(2x - 4) - (y + 2)][(2x - 4) + (y + 2)] = 576$
$\Rightarrow (2x - 4)^2 - (y + 2)^2 = 576$
$\Rightarrow 4(x - 2)^2 - (y + 2)^2 = 576$
$$\therefore \frac{(x-2)^2}{144} - \frac{(y+2)^2}{576} = 1$$

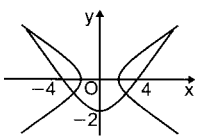
4. Hallar los puntos de intersección de la recta: $4x - 3y - 16 = 0$ y la hipérbola: $16x^2 - 25y^2 = 400$.

Resolución:

Para hallar los puntos de intersección, resolvemos el sistema de ecuaciones:
$4x - 3y - 16 = 0 \Rightarrow 4x = 3y + 16$
$(4x)^2 - 25y^2 = 400 \Rightarrow (3y + 16)^2 - 25y^2 = 400$
$9y^2 + 96y + 256 - 25y^2 = 400 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0$
$\Rightarrow (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow y = 3$
$4x = 3(3) + 16 \Rightarrow x = 25/4$
Solo hay un punto de intersección: $\left(\frac{25}{4}; 3\right)$

5. Los focos de la hipérbola: $7x^2 - 9y^2 = 63$ son los extremos del lado recto de una parábola cuyo eje focal coincide con el eje Y, hallar la ecuación de la parábola, sabiendo que se abre hacia arriba.

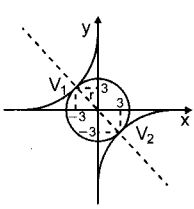
Resolución:



Ecuación de la hipérbola:
$$7x^2 - 9y^2 = 63 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$
$a^2 = 9$ y $b^2 = 7 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 7$
$\Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$
Coordenadas de los focos:
$F_1(-4; 0)$ y $F_2(4; 0) \Rightarrow F_1F_2 = 8$
Por dato los extremos del lado recto de la parábola coinciden con los focos de la hipérbola, sabemos que el lado recto es igual a $|4p|$ entonces: $|4p| = 8$ como la parábola se abre hacia arriba, entonces "p" es positivo, por lo tanto: $p = 2$. Como el eje focal de la parábola coincide con el eje Y, entonces la coordenada del vértice es: $(0; -2)$.
Ecuación de la parábola: $x^2 = 8(y + 2)$

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la hipérbola equilátera: $xy + 9 = 0$, en sus vértices.

Resolución:



Hipérbola equilátera:
$xy = -9$
Observar que los vértices de la hipérbola son:
$V_1(-3; 3)$ y $V_2(3; -3)$
Observar (del gráfico) que el radio de la circunferencia tangente es "r".
$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$
Ecuación de la circunferencia:
$x^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2 \wedge x^2 + y^2 = 18$

7. La ecuación de una hipérbola es:
$16x^2 - 9y^2 + 96x - 72y - 144 = 0$.
Hallar los puntos de intersección de las asíntotas con las directrices de dicha hipérbola.

Resolución:

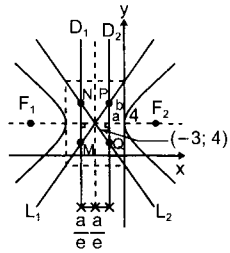
La ecuación dada la expresamos en su forma ordinaria.

$16x^2 - 9y^2 + 96x + 72y - 144 = 0$

$\Rightarrow 16x^2 + 96x - 9y^2 + 72y = 144$

$16(x^2 + 6x + 9) - 9(y^2 - 8y + 16) = 144 + 144 - 144$

$16(x+3)^2 - 9(y-4)^2 = 144 \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$



Se deduce que: centro $(-3; 4)$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

Las directrices D_1 y D_2

$D_1: x = -3 - \dfrac{9}{5} = -\dfrac{24}{5} \wedge D_2: x = -3 + \dfrac{9}{5} = -\dfrac{6}{5}$

Asíntotas:

$L_1: y - 4 = \dfrac{4}{3}(x + 3) \wedge L_2: y - 4 = \dfrac{4}{3}(x + 3)$

$\overleftrightarrow{D_1} \cap \overleftrightarrow{L_1}: y - 4 = \dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{24}{5} + 3\right) \Rightarrow y = \dfrac{8}{5}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{24}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$

$\overleftrightarrow{D_1} \cap \overleftrightarrow{L_2}: y - 4 = -\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{24}{5} + 3\right) \Rightarrow y = \dfrac{32}{5}$

$\Rightarrow N\left(-\dfrac{24}{5}; \dfrac{32}{5}\right)$

$\overleftrightarrow{D_2} \cap \overleftrightarrow{L_2}: y - 4 = -\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{6}{5} + 3\right) \Rightarrow y = \dfrac{8}{5} \Rightarrow Q\left(-\dfrac{6}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$

$\overleftrightarrow{D_2} \cap \overleftrightarrow{L_1}: y - 4 = \dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{6}{5} + 3\right) \Rightarrow y = \dfrac{32}{5} \Rightarrow P\left(-\dfrac{6}{5}; \dfrac{32}{5}\right)$

8. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son paralelas a los ejes coordenados y pasa por: $(4; 5)$, $(2; 6)$ y $(-1; 0)$.

Resolución:

Si las asíntotas son paralelas a los ejes coordenados, entonces es una hipérbola rectangular, y su ecuación es de la forma: $H: (x - h)(y - k) = m$; $(h; k)$ es el centro.

$(4; 5) \in H \Rightarrow (4 - h)(5 - k) = m$ ...(I)

$(2; 6) \in H \Rightarrow (2 - h)(6 - k) = m$ ...(II)

$(-1; 0) \in H \Rightarrow (-1 - h)(-k) = m$ ...(III)

$(I) = (III) \Rightarrow 20 - 5h - 4k + hk = k + hk \Rightarrow h + k = 4$

$(II) = (III) \Rightarrow 12 - 6h - 2k + hk = k + hk \Rightarrow 2h + k = 4$

Resolviendo: $h = 0$ y $k = 4$

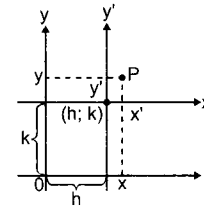
Reemplazamos en (I): $(4 - 0)(5 - 4) = m \Rightarrow m = 4$

La ecuación de la hipérbola es:

$H: (x - 0)(y - 4) = 4 \Rightarrow xy - 4x - 4 = 0$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Traslación de ejes



Observa en el gráfico adjunto que hay dos sistemas de coordenadas, el fundamental xy y el sistema x'y' que se obtiene trasladando el origen de coordenadas de xy a un punto denominado $(h; k)$, este punto para x'y' es el origen de dicho sistema, sus coordenadas serán $(0; 0)$.

Las coordenadas de P en xy son: $(x; y)$

Las coordenadas de P en x'y' son: $(x'; y')$

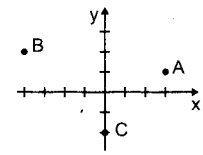
Se deduce del gráfico:

Ecuaciones de:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x = x' + h} \text{ e } \boxed{y = y' + k} \\ \boxed{x' = x - h} \text{ e } \boxed{y' = y - k} \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de traslación (I)}$$

Aplicaciones:

1. Si el origen del sistema se desplaza a $(2; 1)$, hallar las coordenadas de A, B y C en el nuevo sistema.



Resolución:

En el sistema xy:

Coordenadas de A: $(3; 1)$

Coordenadas de B: $(-4; 2)$

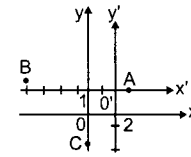
Coordenadas de C: $(0; -2)$

En el sistema x'y'

Coordenadas de A: $(1; 0)$

Coordenadas de B: $(-6; 1)$

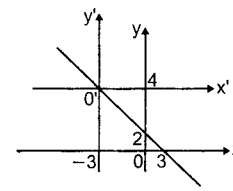
Coordenadas de C: $(-2; -3)$



Observa que en este caso las coordenadas del nuevo origen son: $(2; 1)$

2. La ecuación de una recta es: $3y + 2x - 6 = 0$, hallar la ecuación en x'y' sabiendo que el origen de este sistema tiene las coordenadas $(-3; 4)$.

Resolución:



Las coordenadas en xy del nuevo origen es: $(-3; 4)$
Entonces, se cumple: $x = x' + (-3)$ e $y = y' + 4$
Reemplazamos en la ecuación de la recta:
$3(y' + 4) + 2(x' - 3) - 6 = 0$
$3y' + 12 + 2x' - 6 - 6 = 0$
La ecuación de la recta en x'y' es: $3y' + 2x' = 0$

3. Transformar la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$; trasladando los ejes coordenados al nuevo origen: $(-1; 3)$.

Resolución:

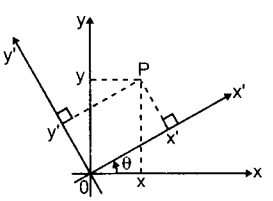
Ecuación: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$
Como el origen de coordenadas se ha trasladado a $(-1; 3)$, entonces las ecuaciones de transformación son: $x = x' = -1$ e $y = y' + 3$
Se reemplaza en la ecuación inicial:
$(x' - 1)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 = 0$
$\Rightarrow (x')^2 - 2x' + 1 + (y')^2 + 6y' + 9 +$
$2x' - 2 - y' - 18 + 6 = 0$
Simplificando: $x'^2 + y'^2 = 4$

4. Mediante una adecuada traslación de ejes, transformar la ecuación: $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$, en otra que carezca de términos de primer grado.

Resolución:

Ecuación: $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$
Un método para transformar este tipo de ecuaciones es emplear las ecuaciones de transformación considerando que el nuevo origen está en $(h; k)$.
$x = x' + h$ e $y = y' + k$
Se reemplaza en la ecuación:
$(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 8(y' + k) + 1 = 0$
Desarrollado y agrupando convenientemente, se obtiene:
$(x')^2 - 4(y')^2 + (2h + 6)x' - (8k - 8)y' + h^2 - 4k^2 +$
$6h + 8k + 1 = 0$ ...(I)
Por condición del problema, los términos de primer grado deben desaparecer, entonces:
$2h + 6 = 0 \Rightarrow h = -3 \quad \wedge \quad 8k - 8 = 0 \Rightarrow k = 1$
El nuevo origen está en: $(-3; 1)$
Sustituyendo en (I), se obtiene:
$(x')^2 - 4(y')^2 + (-3)^2 - 4(1)^2 + 6(-3) + 8(1) + 1 = 0$
$\Rightarrow (x')^2 - 4(y')^2 = 4$
Otro método es el de completar cuadrados que se explica más adelante.

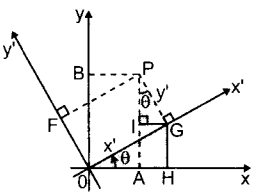
Rotación de ejes



Observa en el gráfico adjunto que hay dos sistema de coordenadas, el fundamental xy, y el sistema x'y' que se obtiene rotando los ejes "x" e "y" un ángulo θ (sentido antihorario) alrededor de origen de coordenadas.
Las coordenadas de P en xy, son: $(x; y)$
Las coordenadas de P en x'y' son: $(x'; y')$
Las ecuaciones de rotación son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}}$$

Demostración:



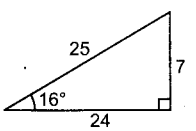
Observa que: $OA = x$; $OB = y$
$OG = x'$; $OF = y'$
Traza: $GH \perp$ al eje X; $GI \perp AP$
$\triangle PIG$: $IP = y'\cos\theta$; $IG = y'\operatorname{sen}\theta$
$\triangle OHG$: $HG = x'\operatorname{sen}\theta$: $OH = x'\cos\theta$
Además se cumple: $AH = IG$; $AI = HG$; $OB = AP$.
Finalmente: $OH = OA + AH \Rightarrow x'\cos\theta = x + y'\operatorname{sen}\theta$
$\Rightarrow x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$
$AP = AI + IP \Rightarrow y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$

Dejo como tarea al lector la demostración del otro grupo de ecuaciones.

Aplicaciones:

1. Hallar la nueva ecuación de la recta cuya ecuación es: $y = 3x - 5$, cuando los ejes se giran un ángulo que mide 16°. (Considerar $\operatorname{sen}16° = 0{,}28$).

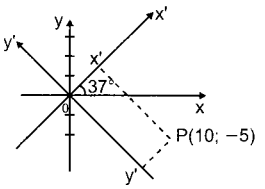
Resolución:



Dado que: $\operatorname{sen}16° = 0{,}28 = \dfrac{7}{25}$
Ecuaciones de transformación:
$x = x'\cos16° - y'\operatorname{sen}16° = x'\left(\dfrac{24}{25}\right) - y'\left(\dfrac{7}{25}\right)$
$\Rightarrow x = \dfrac{24x - 7y}{25}$
$y = x'\operatorname{sen}16° + y'\cos16° = x'\left(\dfrac{7}{25}\right) + y'\left(\dfrac{24}{25}\right)$
$\Rightarrow y = \dfrac{7x' + 24y'}{25}$
Se reemplaza en la ecuación de la recta:
$\dfrac{7x' + 24y'}{25} = 3\left(\dfrac{24x' - 7y'}{25}\right) - 5$
$\Rightarrow 7x' + 24y' = 72x' - 21y' - 125$
$\therefore\ 13x' - 9x' - 25 = 0$

2. Hallar las nuevas coordenadas del punto (10; −5) cuando los ejes coordenados giran un ángulo de 37°.

Resolución:



Para determinar las nuevas coordenadas se utilizan las ecuaciones de transformación:
$x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$; $y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$
En este caso: (x; y) = (10; −5) y θ = 37°

$x' = 10\cos 37° + (-5)\operatorname{sen}37°$

$x' = 10\left(\frac{4}{5}\right) + (-5)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow x' = 5$

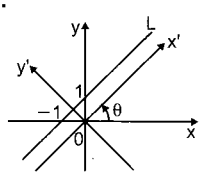
$y' = -10\operatorname{sen}37° + (-5)\cos 37°$

$y' = -10\left(\frac{3}{5}\right) + (-5)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow y' = -10$

Las coordenadas de P en x'y' son: (5; −10)

3. La recta y − x − 1 = 0 mediante una rotación adecuada se convierte en el sistema x'y' en una recta paralela al eje x'.
Determinar el ángulo de giro y la ecuación de la recta en el nuevo sistema.

Resolución:



Para entender mejor se debe graficar la recta cuya ecuación es: y − x − 1 = 0. Observar que la inclinación de L es 45°.
Entonces para que L sea paralela al eje x', el ángulo de rotación (θ) debe medir 45°.
En este caso no es necesario aplicar las ecuaciones de rotación, porque del gráfico es suficiente hallar el valor de "b", y como L es una recta horizontal, su ecuación es: y' = b.

$b\sqrt{2} = 1 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ La ecuación de L en x'y' es: $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Mediante una rotación de 45°, se obtuvo en el sistema x'y' la ecuación $(x')^2 + 3(y')^2 = 6$, hallar la ecuación original en xy.

Resolución:

Ecuaciones de transformación:
$x' = x\cos 45° + y\operatorname{sen}45°$

$\Rightarrow x' = x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$y' = -x\operatorname{sen}45° + y\cos 45°$

$\Rightarrow y' = -x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$

Reemplazamos en la ecuación dada:

$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6$

$\frac{x^2+2xy+y^2}{2} + \frac{3(x^2-2xy+y^2)}{2} = 6$

Simplificando se obtiene:
$4x^2 - 4xy + 4y^2 = 12 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 3$

Ecuación general de segundo grado

A toda ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se le denomina "Ecuación general de segundo grado", donde A, B y C son coeficientes no nulos al mismo tiempo; esta ecuación representa (analíticamente) un lugar geométrico (cónicas, rectas, puntos). Mediante una rotación de los ejes coordenados siempre es posible transformar esta ecuación en otra de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

En la que uno de los coeficientes A' y C', por lo menos es diferente de cero y no aparece el término en x'y'
El ángulo de giro se calcula así:

$$\boxed{\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}} \text{ (θ es agudo)}$$

Ejemplo:

Eliminar el término xy de la ecuación:
$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ mediante una rotación del sistema de coordenadas.

Resolución:

Ecuación:

$$\underset{A}{\underline{4}}x^2 - \underset{B}{\underline{4}}xy + \underset{C}{\underline{1}}y^2 - \underset{D}{\underline{8\sqrt{5}}}x - \underset{E}{\underline{16\sqrt{5}}}y = 0$$

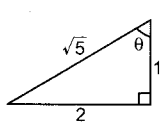
Cálculo del ángulo de giro:

$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{4-1}{-4} = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \csc 2\theta = \sqrt{1+\cot^2 2\theta} = \sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}$

$\cot\theta = \csc 2\theta + \cot 2\theta = \frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$



Ecuaciones de rotación:

$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta = x'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - y'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow x = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$

$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = x'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow y = \frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$

Se reemplaza en la ecuación de segundo grado.

$$4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2-4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2-$$
$$8\sqrt{5}\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)-16\sqrt{5}\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)=0$$

Desarrollando y simplificando se obtiene: $(y')^2 = 8x'$

Observación

Método algebraicos para eliminar el término xy de la ecuación general de segundo grado.

Ecuación general de segundo grado:
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ecuación luego de la rotación (eliminando el término xy):
$A(x')^2 + C'y^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$

Paso 1: Calculamos: $r = \frac{C-A}{B}$

Paso 2: Calculamos: $m = r + \sqrt{1+r^2}$

Paso 3: Se expresa "m" como el cociente de dos números enteros (PESI): $m = \frac{y_1}{x_1}$

Paso 4: Cálculo de coeficientes:

$$A' = \frac{Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2}{x_1^2+y_1^2};\ A' + C' = A + C$$

$$D' = \frac{Dx_1 + Ey_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}};\ E' = \frac{D(-y_1) + Ex_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}};\ F' = F$$

Ejemplo:

eliminar el término xy de la ecuación:
$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ mediante una rotación del sistema de coordenadas xy.

Resolución:

Observa que es el ejemplo que se resolvió anteriormente, ahora se aplicará el método algebraico.

Ecuación:

$$\underset{A}{\underset{\uparrow}{4x^2}} - \underset{B}{\underset{\uparrow}{4xy}} + \underset{C}{\underset{\uparrow}{1y^2}} - \underset{D}{\underset{\uparrow}{8\sqrt{5}x}} - \underset{E}{\underset{\uparrow}{16\sqrt{5}y}} = 0$$

Paso 1: $r = \frac{C-A}{B} = \frac{1-4}{-4} = \frac{3}{4}$

Paso 2: $m = r + \sqrt{1+r^2} = \frac{3}{4} + \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \Rightarrow m = 2$

Paso 3: $m = 2 = \frac{2}{1} = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = 1 \wedge y_1 = 2$

Paso 4: $A' = \frac{4(1) - 4(1)(2) + (2)^2}{(1)^2 + (2)^2} = 0 \Rightarrow A' = 0$

$A' + C' = A + C \Rightarrow 0 + C' = 4 + 1 \Rightarrow C' = 5$

$$D' = \frac{Dx_1 + Ey_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{(-8\sqrt{5})(1) + (-16\sqrt{5})(2)}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$\Rightarrow D' = -40$

$$E' = \frac{-Dy_1 + Ex_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{(+8\sqrt{5})(2) + (-16\sqrt{5})(1)}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$\Rightarrow E' = 0$

$F' = F \Rightarrow F' = 0$

La ecuación es: $5(y')^2 - 40x' = 0 \Rightarrow (y')^2 = 8x'$

Nota

- Algunas relaciones importantes entre los coeficientes de las ecuaciones de segundo grado (general y rotada) son:
  (I) $A' + C' = A + C$; (II) $(D')^2 + (E')^2 = D^2 + E^2$
  (III) $F' = F$; (IV) $(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$
- A la expresión $B^2 - 4AC$ se le denomina invariante o "discriminante". Conociendo el valor de esta expresión se puede saber la naturaleza de la curva de segundo grado. (Ver cuadro).

$B^2 - 4AC$	Curva (género)
Negativo	Elipse (punto o no tiene gráfica)
Cero	Parábola (dos rectas paralelas o coincidentes o no tiene gráfica)
Positivo	Hipérbola (dos rectas que se cortan)

Ejemplo:

Identificar cada una de las siguientes curvas:

- $3x^2 - 4xy + 4y^2 = 17$
  $\Rightarrow (-4)^2 - 4(3)(4) = -32$
  $\Rightarrow$ Género: elipse
- $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6\sqrt{13}x - 9\sqrt{13}y - 52 = 0$
  $\Rightarrow (12)^2 - 4(4)(9) = 0 \Rightarrow$ Género parábola
- $xy + 2y^2 + 31 = 0$
  $\Rightarrow (1)^2 - 4(0)(2) = 1$
  $\Rightarrow$ Género hipérbola

Observa que cuando se dice, por ejemplo, que la curva es del género elipse, significa que puede ser elipse o un punto o quizá no tiene gráfica. (Ver cuadro)

Aplicaciones:

1. Dada la ecuación:
   $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6\sqrt{13}x - 9\sqrt{13}y - 52 = 0$
   - Identificar de que género es.
   - Eliminar el término xy, identificar luego qué lugar geométrico es:

   Resolución:

   Ecuación:

   $$\underset{A}{\underset{\uparrow}{4x^2}} + \underset{B}{\underset{\uparrow}{12xy}} + \underset{C}{\underset{\uparrow}{9y^2}} - \underset{D}{\underset{\uparrow}{6\sqrt{13}x}} - \underset{E}{\underset{\uparrow}{9\sqrt{13}y}} - \underset{F}{\underset{\uparrow}{52}} = 0$$

   Discriminante: $B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(4)(9) = 0$, entonces la curva es del género parábola.

   Eliminación del término xy (método algebraico)

   $$r = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow m = \frac{5}{12} + \sqrt{1+\frac{25}{144}} = \frac{3}{2}$$

   $$\frac{3}{2} = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = 2 \wedge y_1 = 3$$

   $$A' = \frac{4(4) + 12(6) + 9(9)}{(2)^2 + (3)^2}$$

$\Rightarrow A' = 13;\ 13 + C' = 4 + 9 \Rightarrow C' = 0$

$D' = \dfrac{-6\sqrt{13}(2) - 9\sqrt{13}(3)}{\sqrt{13}}$

$E' = \dfrac{-6\sqrt{13}(-3) - 9\sqrt{13}(2)}{\sqrt{13}} \Rightarrow E' = 0$

$F' = -52$

La ecuación es:

$13(x')^2 - 39x' - 52 = 0 \Rightarrow (x')^2 - 3x' - 4 = 0$

Factorizando (aspa simple): $(x' - 4)(x' + 1) = 0$

Se obtiene: $x' = 4$ y $x' = -1$, son dos rectas paralelas.

2. Determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación:
$4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$ y reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas.

Resolución:

Ecuación: $\underset{A}{\underset{\uparrow}{4x^2}} - \underset{B}{\underset{\uparrow}{24xy}} + \underset{C}{\underset{\uparrow}{11y^2}} + \underset{D}{\underset{\uparrow}{56x}} - \underset{E}{\underset{\uparrow}{58y}} + \underset{F}{\underset{\uparrow}{95}} = 0$

Discriminante:

$B^2 - 4(AC) = (-24)^2 - 4(4)(11) = 400 > 0$

Género hipérbola.

Eliminación del término xy (método algebraico)

$r = \dfrac{11 - 4}{-24} = -\dfrac{7}{24} \Rightarrow m = -\dfrac{7}{24} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{7}{24}\right)^2} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 = 4;\ y_1 = 3$

$A' = \dfrac{4(4)^2 - 24(4)(3) + 11(3)^2}{4^2 + 3^2} \Rightarrow A' = -5$

$\Rightarrow A' = -5;\ -5 + C' = 4 + 11 \Rightarrow C' = 20$

$D' = \dfrac{56(4) - 58(3)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow D' = 10$

$E' = \dfrac{56(-3) - 58(4)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow E' = -80$

Ecuación: $-5(x')^2 + 20(y')^2 + 10x' - 80y' + 93 = 0$

Simplificando y cambiando de signo:

$(x')^2 - 2x' - 4(y')^2 + 16y' - 19 = 0$

Para reducir a su forma canónica, se hace una traslación, usaremos el método de completar cuadrados.

$(x')^2 - 2x' + 1 - 4[(y')^2 - 4y' + 4] = 19 + 1 - 16$

$(x' - 1)^2 - 4(y' - 2)^2 = 4$

Sea: $x' - 1 = x'' \wedge y' - 2 = y'' \Rightarrow (x'')^2 - 4(y'')^2 = 4$

$\Rightarrow \dfrac{(x'')^2}{4} - (y'')^2 = 1$

Ejemplos:

1. Hallar aproximadamente las nuevas coordenadas del punto (3; 4) si primero giramos los ejes un ángulo de medida 53° y luego trasladamos el origen a (2; 4) del nuevo sistema x'y'.

Resolución:

Este ejercicio se puede hacer graficando o aplicando las fórmulas de transformación (traslación y rotación).

Aplicamos las fórmulas de rotación:

$\theta = 53°;\ (x; y) = (3; -4)$

$x' = 3\cos 53° + 4\text{sen}53° = 3(3/5) + 4(4/5) = 5$

$y' = -3\text{sen}53° + 4\cos 53° = -3(4/5) + 4(3/5) = 0$

$(x'; y') = (5; 0)$

Aplicamos las fórmulas de traslación: $(h; k) = (2; 4)$

$\left.\begin{array}{l} x'' = x' - h = 5 - 2 = 3 \\ y'' = y' - k = 0 - 4 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow (x''; y'') = (3; -4)$

2. Hallar la nueva ecuación de: $y = 3x$, después de trasladar los ejes al punto (5; 3).

Resolución:

Fórmulas de traslación: $x' = x - h$; $y' = y - k$; nuevo origen (h; k).

Entonces: $x = x' + 5 \wedge y = y' + 3$

Nueva ecuación: $y' + 3 = 3(x' + 5) \Rightarrow y' = 3x' + 12$

3. Mediante una adecuada traslación de ejes, expresar: $x^2 + xy + y^2 - 7x - 8y + 18 = 0$ en otra ecuación que no contenga términos de primer grado.

Resolución:

Sea (h; k) el nuevo origen $\Rightarrow x = x' + h;\ y = y' + k$

Se reemplaza en la ecuación:

$(x' + h)^2 + (x' + h)(y' + k) + (y' + k)^2 - 7(x' + h) - 8(y' + k) + 18 = 0$

$(x')^2 + 2x'h + h^2 + x'y' + hy' + kx' + hk + (y')^2 + 2ky' + k^2 - 7x' - 7h - 8y' - 8k + 18 = 0$

Agrupando adecuadamente se obtiene:

$(x')^2 + (y')^2 + x'y' + (2h + k - 7)x' + (h + 2k - 8)y' + h^2 + hk + k^2 - 8k - 7h + 18 = 0$ ...(I)

Por condición los términos de primer grado se deben cancelar, entonces:

$2h + k - 7 = 0 \wedge h + 2k - 8 = 0$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} 2h + k = 7 \\ h + 2k = 8 \end{array}\right. \Rightarrow h = 2 \text{ y } k = 3$

Se reemplaza en (I):

$(x')^2 + (y')^2 + x'y' + 2^2 + 2(3) + 3^2 - 8(3) - 7(2) + 18 = 0$

$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 - x'y' - 1 = 0$

4. Las coordenadas de un punto son: (−1; 3), cuando los ejes giran 45°, las coordenadas son (x'; y'). Calcular $x' + y'$.

Resolución:

Sea P el punto cuyas coordenadas son: (−1; 3)

Fórmulas de rotación: $\theta = 45°$, $(x; y) = (-1; 3)$

$x' = -1\cos 45° + 3\text{sen}45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$y' = +1\text{sen}45° + 3\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Las coordenadas de P en x'y' son: $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; luego: $x' + y' = 3\sqrt{2}$

5. Hallar la ecuación original de: $\dfrac{(x')^2}{4} + (y')^2 = 1$, si los ejes fueron girados un ángulo que mide 45°.

Resolución:

Ecuaciones de rotación:

$x' = x\cos\theta + y\text{sen}\theta \Rightarrow x' = x\cos 45° + y\text{sen}45°$

$\Rightarrow x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

$y' = x\text{sen}\theta + y\cos\theta \Rightarrow y' = x\text{sen}45° + y\cos 45°$

$\Rightarrow y' = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$

Reemplazamos en la ecuación:

$$\frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} + \left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{8} + \frac{x^2-2xy+y^2}{2} = 1$$

Sumando se obtiene: $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8 = 0$

6. Si las coordenadas de un punto P en el plano cartesiano son: (senθ; cosθ), hallar las coordenadas de P en un nuevo sistema, cuando los ejes rotan un ángulo cuya medida es θ ($0 < \theta < \pi/2$).

Resolución:

$x' = x\cos\theta + y\text{sen}\theta \Rightarrow x' = \text{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\text{sen}\theta$

$\Rightarrow x' = \text{sen}2\theta$

$y' = -x\text{sen}\theta + y\cos\theta \Rightarrow y' = -\text{sen}\theta\text{sen}\theta + \cos\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y' = \cos 2\theta$

Las nuevas coordenadas de P son: (sen2θ; cos2θ)

7. Hallar las nuevas coordenadas del punto (−1; 3) cuando los ejes coordenados son trasladados primero al nuevo origen (4; 5) y después se les gira un ángulo de 60°.

Resolución:

Punto (−1; 3), nuevo origen: (h; k) = (4; 5)

$x' = x - h = -1 - 4 = -5$

$y' = y - k = 3 - 5 = -2$

Las nuevas coordenadas en x'y' son:

(x'; y') = (−5; −2)

Luego se giran los ejes 60°, entonces:

$x'' = x'\cos\theta + y'\text{sen}\theta = (-5)\cos 60° + (-2)\text{sen}60°$

$\Rightarrow x'' = -\dfrac{5}{2} - \sqrt{3}$

$y'' = -x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta = -(-5)\text{sen}60° + (-2)\cos 60°$

$\Rightarrow y'' = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - 1$

Las nuevas coordenadas son: $\left(-\dfrac{5}{2} - \sqrt{3};\ \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - 1\right)$

8. Hallar las nuevas coordenadas de (2; 2) cuando los ejes coordenados son girados primero un ángulo de 45° y después se traslada el origen a (−1; 1)

Resolución:

Ángulo de rotación: 45°, P(x; y) = (2; 2)

$x' = (2)\cos 45° + (2)\text{sen}45°$

$\Rightarrow x' = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow x' = 2\sqrt{2}$

$y' = (-2)\text{sen}45° + (2)\cos 45°$

$\Rightarrow y' = -2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow y' = 0$

$\therefore$ P(x'; y') = (2; 0)

Los ejes se trasladan a (−1; 1), observa que este punto pertenece a xy, entonces lo rotamos.

$x' = (-1)\cos 45° + (1)\text{sen}45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$y' = -(-1)\text{sen}45° + 1\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

El nuevo origen: (h; k) = (0; $\sqrt{2}$) en x'y'

Ahora se realiza la traslación de P ($2\sqrt{2}$; 0)

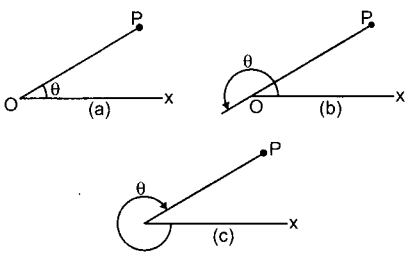
$x'' = x' - h = 2\sqrt{2} - 0 \Rightarrow x'' = 2\sqrt{2}$

$y'' = y' - k = 0 - \sqrt{2} \Rightarrow y'' = -\sqrt{2}$

$\therefore$ Las coordenadas son: ($2\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$)

COORDENADAS POLARES

Además de las coordenadas cartesianas son de uso frecuente las llamadas coordenadas polares que vamos a definir. Sea O un punto fijo del plano y Ox una recta fija.



El punto O se llama polo o punto de origen y la línea Ox se llama "eje polar". Las coordenadas polares de un punto P son la distancia r = OP llamado radio vector, y el ángulo θ, que es el formado por el radio vector con el eje polar, llamado ángulo polar.

El ángulo θ puede ser cualquiera de los formados por Ox y OP, considerándose positivo cuando se le mide en el sentido antihorario y negativo cuando se le mide en horario.

El radio vector "r" se considera positivo cuando el ángulo θ termina de medirse en OP y negativo cuando θ termina de medirse en la prolongación de OP.

Es fácil ver que un punto dado, P, tiene muchos pares de coordenadas polares puesto que θ puede ser cualquiera de los ángulos formados por Ox y OP. Sin embargo, dado un par de coordenadas polares queda determinado un solo punto, que se obtiene construyendo el ángulo θ y trazando "r" en uno u otro sentido del lado en que se termina la medición, según "r" sea positivo o negativo.

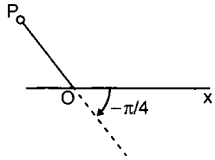
El punto, cuyas coordenadas polares son r; θ, se representa por el símbolo (r; θ).

La notación P(r; θ) significa que P es el punto (r; θ).

Ejemplo:

Construir el punto P(−1; $\pi/4$) y hallar la expresión general de sus coordenadas polares.

Resolución:

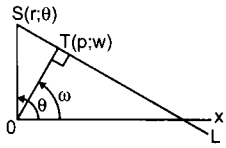


El punto es el señalado en la figura, el ángulo $-\frac{\pi}{4}$ termina de medirse en la prolongación de OP por ser el radio vector negativo. El ángulo xOP de medida $\frac{3}{4}\pi$ es la gráfica de cualquier otro ángulo que difiere de éste en un múltiplo positivo o negativo de 2π.

Luego, cualquier otro ángulo que termine en OP o en su prolongación se ajusta a una de las expresiones: $2n\pi - \frac{1}{4}\pi$ o $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$, donde "n" es un número entero positivo o negativo. Por consiguiente, cualquiera de los pares de coordenadas polares de P se ajusta a una de estas expresiones.

$$\left(-1;\ 2n\pi - \frac{\pi}{4}\right)\left(1;\ 2n\pi + \frac{3}{4}\pi\right)$$

Ecuación polar de la recta



La ecuación de la recta en el sistema polar va estar referida en términos de (P; w) donde P se llama radio vector y ω es el ángulo polar.

Determinación:

OX = eje polar
0 = polo
T = pie de la perpendicular trazada desde el polo.
OT = p, siempre positivo.

Tomemos S(r; θ) un punto cualquiera sobre la recta L, la ecuación de la recta L es según el triángulo OTS:

$r\cos(\theta - \omega) = p$ ...(1)

La ecuación (A) puede tomar las formas:

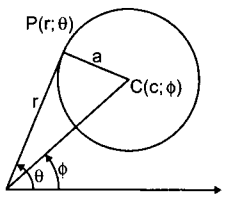
$r\cos\theta = \pm p$, $r\text{sen}\theta = \pm p$ y $\theta = k$

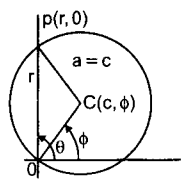
(Demostración en el siguiente grupo de ejercicios)

Ecuación polar de la circunferencia

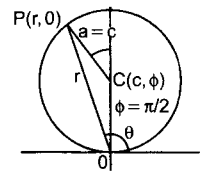
La circunferencia de centro c(c; ϕ) y radio igual a (a), según el triángulo OCP es:

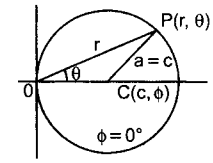
$r^2 - 2rc[\cos(\theta - \phi)] + c^2 = a^2$ ...(2)

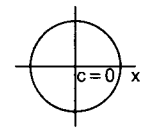




- Cuando la circunferencia pasa por el polo se tiene c = a, que sustituyendo en (2) da: $r = 2a\cos(\theta - \phi)$
- Cuando la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje a 90° se tiene que: $\phi = \pi/2$, y a = c, que reemplazando en (2) resulta: $r = 2a(\text{sen}\theta)$
- Cuando la circunferencia pasa por el polo y su centro en el eje polar, se tiene: $\phi = 0$, y a = c, sustituyendo en (2) obtenemos: $r = 2a(\cos\theta)$
- Si el centro está en el polo se tiene: c = 0 que llevado a (2) da: r = a.



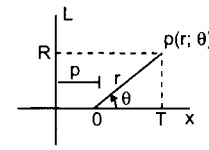




Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares

Para encontrar y discutir la ecuación del lugar geométrico de un punto P(r; θ) que se mueve de tal manera que siempre se cumple la relación: OP/RP = e, donde:

e = excentricidad.
En la figura se tiene:
OP = r = radio vector
θ = ángulo de giro de (r)
L = directriz
p = distancia focal



Por definición de cónica se debe cumplir la condición geométrica OP/RP = e, de donde: OP = e(RP) ...(1)

De la figura podemos establecer:

RP = p + r$\cos\theta$, pero OP = r, y sustituyendo en (1) los valores de OP, y RP se tiene:

$$r = e(p + r\cos\theta) \ \vee \ r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

- Cuando la directriz está a la derecha del polo (0) la ecuación toma la forma: $r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}$
- Si la directriz es paralela al eje polar y a p unidades de él, la ecuación toma la forma: $r = \frac{ep}{1 + e\text{sen}\theta}$

Tomamos el signo positivo o negativo según que la directriz este arriba o abajo del eje polar. El valor de (e) nos llevará a identificar las cónicas.

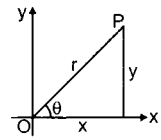
Si $e < 1$ representa a una elipse.
Si $e = 1$ representa una parábola
Si $e > 1$ representa una Hipérbola

Nota

Cambio de coordenadas

Un mismo punto puede representarse por coordenadas rectangulares o polares. A veces conviene usar ambos sistemas simultáneamente. En tal caso, el eje de las x generalmente coincide con el eje polar, y el origen de las coordenadas rectangulares coincide con el polo. Un punto P en este caso, cuatro coordenadas x, y, r, θ que se relacionan entre sí por varias ecuaciones de las cuales, las principales son:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta;\ r = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\,\mathrm{sen}\theta;\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\}$$



Haciendo uso de estas ecuaciones y de la figura, una expresión cualquiera dada en coordenadas rectangulares puede convertirse en otra equivalente en coordenadas polares, y viceversa.

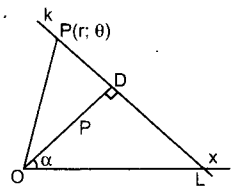
Ecuación polar de la recta

Sea Lk una recta y OD la perpendicular a ella desde el polo. Llamemos:

OD = p, m∡XOD = α

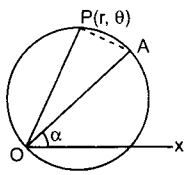
Si P(x; θ) es un punto cualquiera de la recta, tendremos:

OP = r, m∡XOP = θ.



En el triángulo rectángulo DOP, resulta que OD = OP cos(∡DOP), es decir: rcos(θ − α) = p

Ecuación polar de la circunferencia

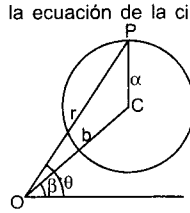


Supongamos que la circunferencia pasa por el polo y sea su radio "a" y su centro (a; α). Sea A el otro extremo del diámetro que pasa por el polo, y P(r; θ) un punto cualquiera de la circunferencia.

En el triángulo AOP resultan.

OA = 2a; OP = r; m∡AOP = θ − α

Y como OP = (OA)[cos(AOP)], la ecuación de la circunferencia será: r = 2a[cos(θ − α)]

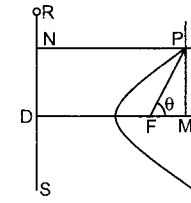


Supongamos ahora que la circunferencia no pase por el polo y sea "a" el radio y C(b; β) su centro. Sea P(r; θ) un punto cualquiera de la circunferencia.

En el triángulo COP resulta:

$(CP)^2 = (OP)^2 + (OC)^2 - 2(OC)(OP)\cos[m(\sphericalangle COP)]$, es decir: $a^2 = r^2 + b^2 - 2br[\cos(\theta - \beta)]$, que es la ecuación que se busca.

Ecuación polar de las cónicas



El lugar geométrico de un punto que se mueve de manera que la razón de sus distancias a otro punto fijo y a una recta fija es constante, es una cónica. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la cónica.

La razón constante se llama excentricidad de la curva. Las cónicas son la elipse, parábola y la hipérbola, y su nombre genérico de "cónica" tiene por origen el hecho de que cualquier sección trazada en un cono resulta una cónica.

Sea P un punto de una cónica cuyo foco es F y cuya directriz es RS. Siendo "e" la excentricidad, la curva se define de este modo: FP = eNP

Para hallar la ecuación del lugar geométrico tomemos F como polo y la recta que pasa por F que es perpendicular a RS como eje polar, y supongamos que DF = k.

Tendremos: FP = r; NP = DF + FM = k + rcosθ

Por lo tanto:

$$r = e(k + \pi\cos\theta) \vee r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta} \qquad ...(1)$$

Esta es la ecuación de la cónica cuyo foco es el polo y cuya directriz es la recta perpendicular al eje polar por el punto (−k; 0).

Si queremos la ecuación en coordenadas rectangulares, tomemos F como origen y DF como eje de las x.

Resulta: $r = \sqrt{x^2+y^2}$; rcosθ = x.

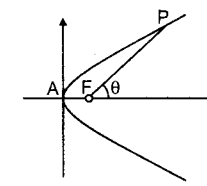
La ecuación (1) puede escribirse:

r = ke + re(cosθ) = e(k + x).

Por consiguiente: $x^2 + y^2 = e^2(k + x)^2$ ...(2)

que es la ecuación indicada.

Parábola

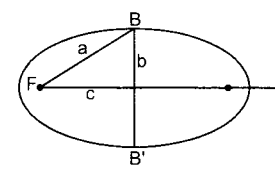


Supuesto e = 1 y $k = \frac{1}{2}a$, la ecuación 2 resulta equivalente a: $y^2 = a\left(x + \frac{1}{4}a\right)$ que representa una parábola.

Dado que "a" puede tener cualquier valor, resulta que, recíprocamente, una parábola es una cónica de excentricidad igual a la unidad. El vértice de la parábola es $\left(-\frac{1}{4}a;\ 0\right)$.

La distancia del vértice al foco es igual al valor absoluto de (1/4)a. Por consiguiente, una parábola $y^2 = ax$ tiene un foco sobre su eje, a la distancia de (1/4)a del vértice.

Elipse



Supóngase que: $e < 1$.

Si: $a > b$ se verifica $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; $k = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

La ecuación (2) se transforma en:

$$\frac{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de una elipse cuyos semiejes son a y b; cuyo eje mayor es el horizontal. Puesto que a y b pueden tener cualquier valor, resulta que una elipse es una cónica de excentricidad menor que la unidad.

El centro de la elipse es: $(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$

Y como el origen de coordenadas es el foco, la distancia del centro al foco es: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

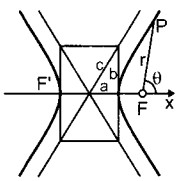
Eso demuestra que FB = a. Teniendo en cuenta la simetría de la curva, resulta que existe otro foco simétrico del anterior respecto al centro. Luego, una elipse tiene dos focos sobre el eje mayor, a una distancia de los extremos del eje menor igual al semieje mayor.

Hipérbola

Supóngase $e > 1$

Se verifica: $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

$$k = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Y la ecuación (2) se transforma en:

$$\frac{(x + \sqrt{a^2 + b^2})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyos semiejes son a y b, y cuyo eje transversal es el horizontal. Puesto que a y b pueden tener cualquier valor, resulta que, recíprocamente, una hipérbola es una cónica cuya excentricidad es mayor que la unidad.

El centro de la hipérbola es: $(-\sqrt{a^2 + b^2};\ 0)$ Como el origen de coordenadas es el foco, la distancia del centro al foco será: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

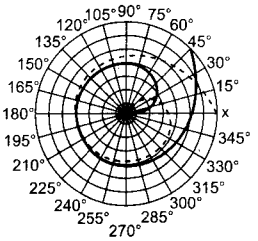
Teniendo en cuenta el hecho de la simetría, existirá otro foco simétrico del anterior respecto del centro. Luego, una hipérbola tiene dos focos sobre su eje transversal, a una distancia de su centro igual a la mitad de la diagonal de rectángulo de sus ejes.

Gráfica de ecuaciones polares

Para trazar la gráfica de una ecuación polar, se construye un cuadro con algunos de los pares de valores que satisfacen la ecuación, se trazan los puntos correspondientes, y se unen mediante una curva continua. Sirven para este caso las normas dadas para la gráfica de una ecuación en coordenadas rectangulares. En la mayor parte de los casos, se supone que el ángulo polar comienza con un valor definido y aumenta gradualmente; se determina, en cada momento, si "r" crece o decrece, y se traza una curva indicadora de las variaciones de "r". Se señalan los puntos donde "r" es un máximo, un mínimo o cero. En forma análoga se procede en el caso de que el ángulo polar varíe en sentido decreciente.

1. Construir la gráfica de la ecuación $r = \theta + 1$.

Resolución:

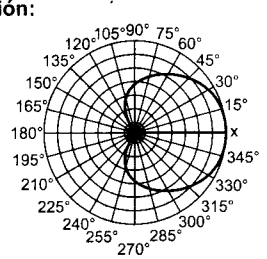


La curva pasa por el punto de origen cuando $\theta = -1$. Al aumentar θ a partir de este valor, "r" es siempre positivo y aumenta constantemente. Al dar el ángulo una vuelta completa alrededor del polo, "r" aumenta en 2π. Esta parte de la curva (indicada con una línea continua consiste en una serie de espirales que se van ensanchando. Para valores de θ, menores que -1, resultan valores negativos de "r" (indicados en la figura por la línea de puntos). Los ángulos $\theta = -1 \pm k$ nos dan valores numéricamente iguales para "r".

En el caso de que "k" tome valores que sean un múltiplo impar de $\pi/2$, los puntos resultantes coincidirán. Luego, los dos conjuntos de espirales se cortan en puntos de la recta perpendicular a la que tiene por ecuación $\theta = -1$. A las curvas de este tipo que constan de un número infinito de espiras se les llama **espirales**.

2. Graficar la curva cardiode por la ecuación $r = a(1 + \cos n)$.

Resolución:

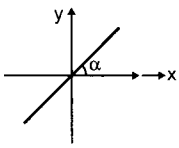
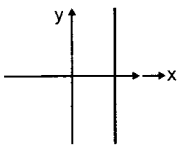
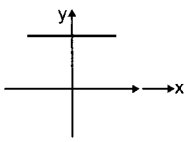


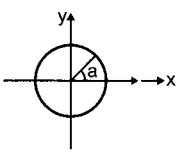
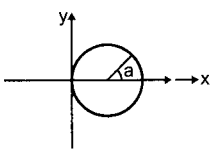
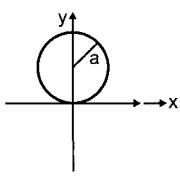
Para construirla, hagamos variar "n" de 0 a $\frac{\pi}{2}$. El valor de "r" disminuye de 2a a a. Al aumentar "n" de $\pi/2$ a π, el radio vector disminuye hasta valer 0. Puesto que el coseno de "n" no puede ser menor que -1, "r" no es nunca negativo. Al variar "n" de π a 2π, x aumenta de 0 a 2a.

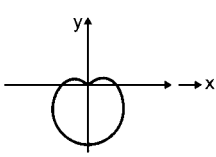
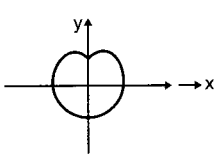
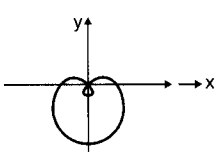
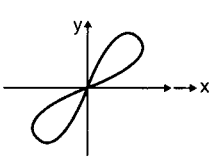
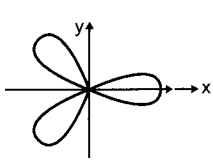
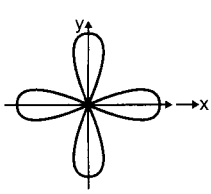
Puesto que $\cos(n + 2\pi) = \cos n$, resulta que para valores de "n" mayores que 2π y lo mismo que para valores negativos, los puntos que se obtengan coincidirán con los ya trazados.

Clasificación de las ecuaciones polares

Las ecuaciones de algunas líneas y curvas en coordenadas polares y sus correspondientes ecuaciones en coordenadas rectangulares se tienen en la siguiente tabla:

LÍNEAS			
Descripción	Línea recta que pasa por el polo y forma un ángulo α con el eje polar.	Línea vertical	Línea horizontal
Ecuación rectangular	$y = (\tan\alpha)\,x \vee \tan\alpha = \dfrac{y}{x}$	$x = a$	$y = b$
Ecuación polar	$\theta = \alpha$	$r\cos\theta = \alpha$	$r\,\text{sen}\theta = b$
Gráfica			

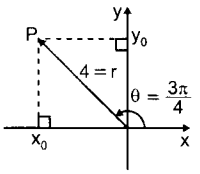
CIRCUNFERENCIAS			
Descripción	Centro en el polo, radio a	Pasa por el polo y es tangente a la línea $\theta = \pi/2$ centro en el eje polar y radio a.	Pasa por el polo y es tangente al eje polar centro en la línea $\theta = \pi/2$ y radio a.
Ecuación rectangular	$x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ax,\ a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ay,\ a > 0$
Ecuación polar	$r = a,\ a > 0$	$r = \pm\, 2a\cos\theta,\ a > 0$	$r = \pm\, 2a\,\text{sen}\theta,\ a > 0$
Gráfica			

OTRAS ECUACIONES			
Descripción	**Cardiode**	**Caracol o limazón**	**Caracol o limazón**
Ecuación polar	$r = a \pm a\cos\theta,\ a > 0$	$r = a \pm b\cos\theta,\ 0 < b < a$	$r = a \pm b\cos\theta,\ 0 < a < b$
Gráfica	$r = a \pm a\,\text{sen}\theta,\ a > 0$ 	$r = a \pm b\,\text{sen}\theta,\ 0 < b < a$ 	$r = a \pm b\,\text{sen}\theta,\ 0 < a < b$ 
Descripción	**Lemniscata**	**Rosa de tres pétalos**	**Rosa de cuatro pétalos**
Ecuación rectangular	$r^2 = a^2\cos 2\theta,\ a > 0$	$r = a\,\text{sen}3\theta,\ a > 0$	$r = a\,\text{sen}2\theta,\ a > 0$ $r = a\cos 2\theta,\ a > 0$
Ecuación polar	$r^2 = a^2\,\text{sen}2\theta,\ a > 0$	$r = a\cos 3\theta,\ a > 0$	
Gráfica			

Aplicaciones:

1. Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son: (4; 3π/4).

Resolución:



Del gráfico:

$x_0 = 4\cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x_0 = -2\sqrt{2}$

$y_0 = 4\text{sen}\frac{3\pi}{4} \Rightarrow y_0 = 2\sqrt{2}$

$\therefore P(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

2. Dada la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 16$, expresar la misma en forma polar.

Resolución:

Tenemos: $x^2 + y^2 = 16$

Hacemos los cambios: $x = r\cos\theta \quad r = r\text{sen}\theta$

Reemplazamos: $(r\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\theta)^2 = 16$

$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$

3. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es:
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Resolución:

Tenemos: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Para llevarlo a ecuación polar hacemos los cambios: $x = r\cos\theta \wedge y = r\text{sen}\theta$

Reemplazamos:

$(r\cos\theta - 2)^2 + (r\text{sen}\theta - 2)^2 = 4$

$r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta + 4 + r^2\text{sen}^2\theta - 4r\text{sen}\theta + 4 = 4$

$\Rightarrow r^2 - 4r\underbrace{(\text{sen}\theta + \cos\theta)}_{\sqrt{2}\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} + 4 = 0$

Luego: $r^2 - 4\sqrt{2}\,r\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 4 = 0$

4. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es: $x^2 - y^2 = 4$

Resolución:

Tenemos: $x^2 - y^2 = 4$

Hacemos el cambio: $x = r\cos\theta \wedge y = r\text{sen}\theta$

Reemplazamos:

$(r\cos\theta)^2 - (r\text{sen}\theta)^2 = 4 \Rightarrow r^2\underbrace{(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}_{\cos 2\theta} = 4$

$r^2\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}\right) = 4 \Rightarrow r^2 - r^2\tan^2\theta = 4 + 4\tan^2\theta$

$\therefore r^2 - 4 = (r^2 + 4)\tan^2\theta$

5. La ecuación polar de la parábola es: $r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$, hallar la longitud del lado recto.

Resolución:

$r = \frac{2}{1 - \cos\theta} \Rightarrow r - r\cos\theta = 2$

Recordemos que: $r = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge r\cos\theta = x$

Reemplazamos:

$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$

$x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4$

$y^2 = 4(x + 1) \Rightarrow 4 = 4p$

Conocemos que longitud del lado recto: 4p

$\therefore$ LR: 4

6. Por una traslación de ejes, obtener el nuevo origen y simplificar la ecuación: $3y^2 - 6y + 6x - 4 = 0$

Resolución:

$3y^2 - 6y + 6x - 4 = 0$

Completamos cuadrados:

$3(y^2 - 2y + 1) + 6x - 7 = 0$

$3(y - 1)^2 = 7 - 6x$

$(y - 1)^2 = -2\left(x - \frac{7}{6}\right)$

Si cambiamos: $(y - 1) = y' \wedge \left(x - \frac{7}{6}\right) = x'$

obtenemos: $(y')^2 = -2x'$

Donde el nuevo origen será: $\left(\frac{7}{6}; 1\right)$

7. Simplificar la ecuación dada:
$x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 7 = 0$, trasladando los ejes coordenados a un nuevo origen que permita eliminar los términos lineales y el término independiente.

Resolución:

$x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 7 = 0$

Completamos cuadrados:

$\underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{(x-3)^2} - 2\underbrace{(y^2 + 2y + 1)}_{(y+1)^2} = 0$

$\Rightarrow (x - 3)^2 = 2(y + 1)^2$

Si hacemos los cambios de: $(x + 3) = x' \wedge (y + 1) = y'$

Tendremos: $(x')^2 = 2(y')^2$

8. Por medio de una traslación de ejes, la ecuación: $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ se transformó en $(x')^2 = 4p(y')$. Hallar el valor de p.

Resolución:

$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$

Completamos cuadrados:

$4\underbrace{\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right)}_{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} = 24y - 97 + 25$

$\Rightarrow 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 24(y - 3) \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3)$

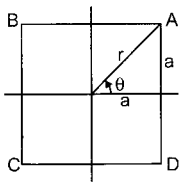
Cuando: $x' = \left(x - \frac{5}{2}\right) \wedge y' = y - 3$

Obtenemos: $(x')^2 = 6(y') \Rightarrow 6 = 4p \quad \therefore p = \frac{3}{2}$

Ejemplos:

1. Un cuadrado de lado 2a tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar. Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de los cuatro vértices.

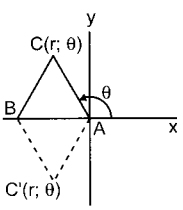
Resolución:



De la figura: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$
$\tan\theta = a/a = 1$, $\theta = \pi/4$
las coordenadas polares de los vértices son:
$A(a\sqrt{2}; \pi/4)$, $B(a\sqrt{2}; 3\pi/4)$, $C(a\sqrt{2}; 5\pi/4)$ y $D(a\sqrt{2}; 7\pi/4)$

2. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(0; 73°)$ y $B(1; \pi)$, hallar el par principal de coordenadas polares del tercer vértice.

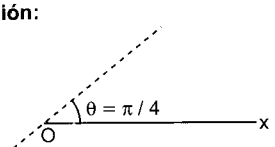
Resolución:



$CA = AB = r = 1$
$m\sphericalangle BAC = \pi/3$ (equilátero)
entonces: $\theta = 180° - 60° = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$
$\therefore$ $C(1; 2\pi/3)$
Como: $r_2 = r_1$; $e_2 = \pi/3$
$\therefore$ $C(1; 4\pi/3)$

3. Un punto P se mueve de tal manera que para todos los valores de sus radios vectores, su ángulo polar permanece constante e igual a $\pi/4$. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

Resolución:



Del enunciado, el ángulo θ permanece constante, entonces el lugar será:
$\theta = k$, pero $k = \pi/4$
$\therefore$ $\theta = \pi/4$ Es una recta.

4. Dada la ecuación rectangular: $x^2 - 4y = 4$ ...(I), expresada en polares.

Resolución:

Los equivalente son: $x^2 = r^2\cos^2\theta \wedge y = r\text{sen}\theta$
Sustituyendo en (I): $r^2\cos^2\theta - 4r\text{sen}\theta - 4 = 0$
cuyas raíces son:

$$r = \frac{2\text{sen}\theta \pm \sqrt{4\text{sen}^2\theta + 4\cos\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{2\text{sen}\theta \pm 2}{\cos^2\theta}$$

tomando la raíz positiva:

$$r = \frac{2(\text{sen}\theta + 1)}{(1 - \text{sen}\theta)(1 + \text{sen}\theta)} = \frac{2}{1 - \text{sen}\theta}$$

$$\therefore\ r = \frac{2}{1 - \text{sen}\theta}$$

5. Transformar la ecuación polar:
$x\cos\phi + y\text{sen}\phi - p = 0$ ...(1)

Resolución:

$x = r\cos\theta \wedge y = r\text{sen}\theta$
Sustituyendo en (1):
$r\cos\theta\cos\phi + r\text{sen}\theta\text{sen}\phi = p$
Como: $\cos\theta\cos\phi + \text{sen}\theta\text{sen}\phi = \cos(\theta - \phi)$, se tiene: $r\cos(\theta - \phi) = 0$

6. Hallar la ecuación rectangular de:
$r = 2\sec^2(\theta/2)$

Resolución:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge \sec(\theta/2) = \dfrac{1}{\cos\theta/2}$

O sea: $r = \dfrac{2}{\cos^2\theta/2} = \dfrac{2}{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}} = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

$1 + \cos\theta = 4/r \Rightarrow 1 + x/r = 4/r$
$r + x = 4$; de donde: $\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - x$
Finalmente: $x^2 + y^2 = (4 - x)^2$
$\therefore$ $y^2 + 8x - 16 = 0$

7. Discutir y graficar la ecuación: $r = a\cos\theta$

Resolución:

Intersecciones:

- Con el eje polar: damos valores a θ de 0° hasta "n", donde n = número entero cualquiera, o sea:
  Para $\theta = 0 \Rightarrow r = a\cos\theta = a$ $\quad P(a; 0)$
  Para $\theta = \pi \Rightarrow r = a\cos\pi = -a$ $\quad P(-a; \pi)$
  Importante: el punto $P(a; 0°)$ es igual al punto $P(-a; \pi)$ ver teoría.
- Con el eje a 90°, hallamos "r", dando a θ valores $n(\pi/2)$, n = número impar cualquiera para $\theta = \pi/2 = 0$ para $\theta = -\pi/2$, $r = a\cos(\pi/2) = 0$
  Vemos en ambas pruebas que siempre se repiten los mismos puntos cuando damos valores a "n".
  Como r = 0, la curva pasa por el polo.

Simetría

- Con respecto al eje polar: Sustituyendo θ por $(-\theta)$; $r = a\cos(-\theta) = a\cos\theta$ la curva es simétrica porque la ecuación no varía.

- Con respecto al eje a 90°: Sustituyendo θ por $(\pi - \theta)$; $r = a\cos(\pi - \theta) = -a\cos\theta$; como varía no es simétrica con el eje a 90°.
- Con respecto al Polo: Sustituyendo "r" por $(-r)$, $-r = a\cos\theta$, la ecuación varía entonces no es simétrica.

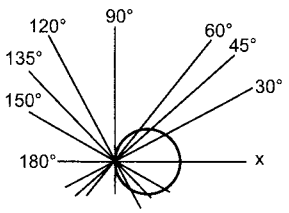
Extensión

Para todos los valores de θ, "r" es siempre finito por consiguiente la curva es cerrada.

Dirección del polo

$r = \cos\theta = 0$, o $\cos\theta = 0 \wedge \theta = \pi/2$, por lo tanto la curva es tangente al eje a 90°.

Tabulación:



θ	r	θ	r
0°	a	120°	−05a
30°	0,87a	135°	−0,71a
45°	0,71a	150°	−0,87a
60°	0,5a	180°	−a
90°	0	360°	a

8. Trazar la curva representada por: $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$

Resolución:

Intersección:

- Con el eje polar:
  para $\theta = 0$; $r = 4 \Rightarrow A(4; 0)$
  para $\theta = \pi$; $r = 4/3 \Rightarrow B(r/3; \pi)$
- Con el eje a 90°:
  para $\theta = \pi/2$; $r = 2 \Rightarrow C(2; \pi/2)$
  para $\theta = \pi/2$; $r = 2 \Rightarrow D(2; -\pi/2)$

Simetría:

- Con el eje polar:
  Sustituyendo θ por $(-\theta)$ la ecuación no varía; como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, siendo simétrica con este eje.
- Con el eje a 90°:
  Sustituyendo θ por $(\pi - \theta)$ la ecuación varía; como $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ entonces no es simétrica con el eje a 90°.
- Con el polo:
  Sustituyendo r por $(-r)$ la ecuación varía; no es simétrica.

Extensión:

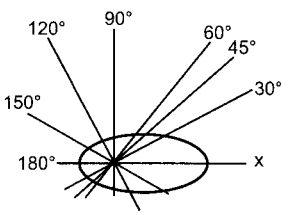
Para todo valor de θ, r es finito, luego la curva es cerrada., como:

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ habrá curva entre $4/3 \leq r \leq 2$

Dirección en el polo

Si hacemos: $r = 0$, se tiene: $2 = \cos\theta = 4/0 = 0$, como $\cos\theta < 1$, la curva no pasa por el polo.

Tabulación:



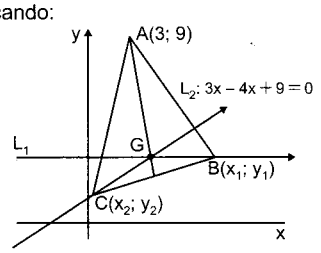
θ	r
0°	4
30°	3,5
45°	3,08
60°	2,66
90°	2
120°	1,6
150°	1,4
180°	1,34

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El punto A(3; 9) es uno de los vértices del triángulo ABC y las ecuaciones de dos de sus medianas son:
L_1: $y - 6 = 0 \ \wedge \ L_2$: $3x - 4y + 9 = 0$
Si los otros vértices son: $B(x_1; y_1)$ y $C(x_2; y_2)$, hallar $x_1 + x_2$.

Resolución:

Graficando:



G: baricentro del △ABC.

Cálculo de las coordenadas de G.

Para ello resolvemos $\begin{cases} 3x - 4y + 9 = 0 \\ y = 6 \end{cases}$

$\therefore$ G: (5; 6)

Pero: $\dfrac{A + B + C}{3}$

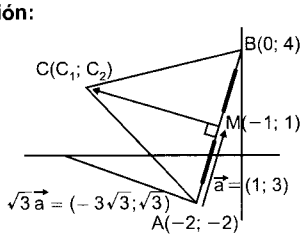
$\Rightarrow (5; 6) = \dfrac{(3; 9) + (x_1; y_1) + (x_2; y_2)}{3}$

$\therefore (12; 9) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

De donde: $x_1 + x_2 = 12$

2. Los puntos A= (−2; −2), B = (0; 4), C = $(C_1; C_2)$ son los vértices de un triángulo equilátero. Si C está en el segundo cuadrante, hallar el valor de:
$\sqrt{3}(C_1 + C_2)$

Resolución:



Note que: $MC = \sqrt{3}\,\vec{a}$

$\Rightarrow C - M = (-3\sqrt{3}; \sqrt{3})$

$(C_1; C_2) - (-1; 1) = (-3\sqrt{3}; \sqrt{3})$

$\Rightarrow (C_1; C_2) = (-3\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1)$

Luego: $C_1 + C_2 = -2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}(C_1 + C_2) = -6$

3. Si la recta L_1: $ax + 2y - 6 + b = 0$ pasa por el punto P(2; −3) y es paralela a la recta:
L_2: $(b - 2)x - 3y + a = 0$, hallar la suma a + b.

Resolución:

L_1: $ax + 2y - 6 + b = 0$

Condición:

i) $P(2; -3) \in L_1 \Rightarrow$ evaluamos:
$2a - 6 - 6 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 12$

ii) Dado: L_2: $(b - 2)x - 3y + a = 0$
$L_1 // L_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow -\dfrac{a}{2} = \dfrac{b-2}{3}$
$\Rightarrow -3a = 2b - 4$

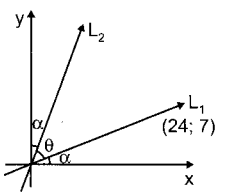
Resolvemos las ecuaciones:

$2a + b = 12 \ \wedge \ 2b + 3a = 4$

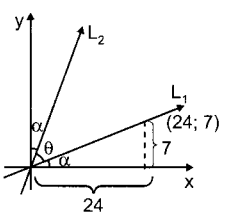
$\therefore a = 20 \ \wedge \ b = -28$

$a + b = -8$

4. Si θ es el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2 del gráfico mostrado, hallar tanθ:



Resolución:



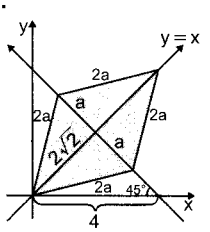
Note que: $2\alpha + \theta = 90° \Rightarrow \tan\theta = \cot 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$

Donde: $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$

$$\tan\theta = \frac{1 - \left(\frac{7}{24}\right)^2}{2 \times \frac{7}{24}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{527}{336}$$

5. Sobre las rectas: $x + y - 4 = 0 \wedge x - y = 0$, se encuentran las diagonales de un rombo. Si uno de sus vértices es el origen de coordenadas y la medida de una de sus diagonales es igual a la medida del lado del rombo; calcular el área del rombo.

Resolución:



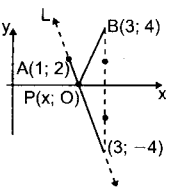
Del gráfico: $2\sqrt{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$S_{Rombo} = 2S_{\triangle} = 2\left[\dfrac{(2a)(2\sqrt{2})}{2}\right] = 4\sqrt{2}a$

Reemplazamos: $S_{Rombo} = 4\sqrt{2} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{16}{3}\sqrt{3}$

6. Hallar en el eje X, un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos A(1; 2) y B(3; 4) sea mínima.

Resolución:

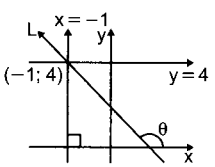


En la recta L: $m_L = \dfrac{2-(-4)}{1-3} = \dfrac{2-0}{1-x}$

Resolviendo: $x = \dfrac{5}{3}$ $\therefore P\left(\dfrac{5}{3}; 0\right)$

7. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y pasa por la intersección de las rectas: $x = -1 \wedge y = 4$.

Resolución:



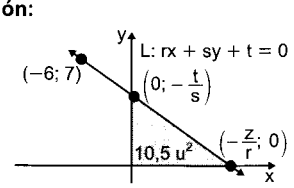
Para L: $\begin{cases} m_L = \tan\theta = -3 \\ \text{Punto de paso: } (-1; 4) \end{cases}$

L: $(y - 4) = -3[x - (-1)]$

$\therefore$ L: $3x + y - 1 = 0$

8. Sea: $rx + sy + t = 0$, la ecuación de la recta que pasa por el punto A(−6; 7) y el primer cuadrante y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 10,5. Hallar la suma: $r + s + t$.

Resolución:



- Dado que: $(-6; 7) \in L$.
  $\Rightarrow -6r + 7s + t = 0$ ...(1)
- $S_{\triangle} = 10{,}5 = \dfrac{\left(\frac{t}{s} \times \frac{t}{r}\right)}{2} \Rightarrow 21 = \dfrac{t^2}{sr}$ ...(2)

Con las ecuaciones (1) $\wedge$ (2) no es suficiente para determinar los valores de s, t y r.

Sea: $t = -1$

$-6r + 7s - 1 = 0$ ...(1)

$21 = \dfrac{1}{sr}$ ...(2)

Del (2): $r = \dfrac{1}{21S}$

Reemplazamos en (1)

$-(6)\left(\dfrac{1}{21s}\right) + 7s - 1 = 0$

Ordenando:

$49s^2 - 7s - 2 = 0 \Rightarrow (7s - 2)(7s + 1) = 0$

$s = \dfrac{2}{7} \wedge s = \dfrac{-1}{7}$

Luego, cuando: $t = -1$; $s = 2/7$; $r = 1/6$

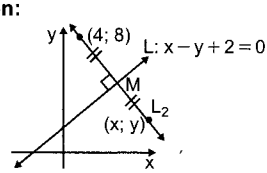
Si $\{t; s; r\} \in \mathbb{Z}$ y son las menores posibles.

$t = -42$; $s = 12$; $r = 7$

$\therefore t + s + r = -23$

9. Hallar el simétrico del punto Q(4; 8) con respecto a la recta L: $x - y + 2 = 0$.

Resolución:



Para: $L_1 m = 1$

Como: $L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_2 = -1$

L_2: $(y - 8) = -1(x - 4) \Rightarrow L_2$: $x + y = 12$

Cálculo de las coordenadas de M.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 12 \end{cases}$

$\therefore$ M: (5; 7)

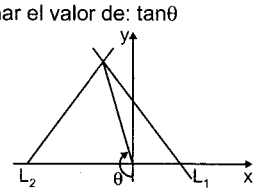
Por coordenadas del punto medio:

$(5; 7) = \dfrac{(4; 8) + (x; y)}{2} \Rightarrow (x; y) = (6; 6)$

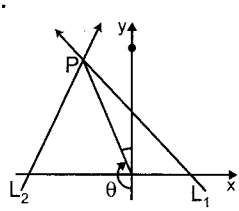
10. La figura muestra la intersección de las rectas:

L_1: $y + 2x - 2 = 0 \wedge L_2$: $y - 3x - 7 = 0$

Determinar el valor de: $\tan\theta$



Resolución:

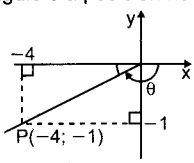


Cálculo de las coordenadas del punto P

Resolvemos el sistema:

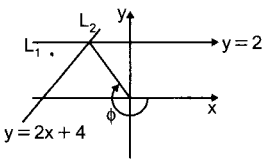
$\begin{matrix} y + 2x - 2 = 0 \\ y - 3x - 7 = 0 \end{matrix} \Rightarrow P: (-1; 4)$

Llevamos el ángulo θ a posición normal:

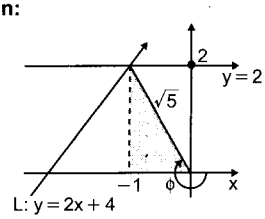


$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{4}$

11. De la figura mostrada, calcular:
$W = \sqrt{5}\,\text{sen}\phi + \tan\phi$.



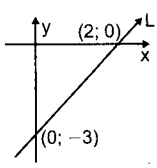
Resolución:



Tabulamos: $y = 2 \Rightarrow 2 = 2x + 4 \Rightarrow x = -1$
Luego, evaluamos la expresión pedida:
$W = \sqrt{5}\,\text{sen}\phi + \tan\phi$
$W = \sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} + (-2) \quad \therefore\ W = 0$

12. Los puntos que una recta determina sobre los ejes x e y son, respectivamente: (2; 0) y (0; −3). Hallar su ecuación.

Resolución:



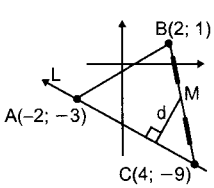
Cálculo de la pendiente:

$m = \dfrac{0-(-3)}{2-0} \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

$L: (y - 0) = (3/2)(x - 2) \quad \therefore\ L: 3x - 2y - 6 = 0$

13. Dados los puntos A(−2; −3) ; B(2; 1); C(4; −9) y M punto medio de BC; hallar la distancia de M al segmento AC:

Resolución:



Coordenadas de M:

$M = \dfrac{(2;1)+(4;-9)}{2} \Rightarrow M: (3; -4)$

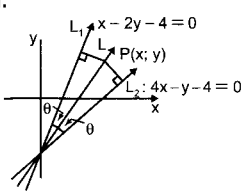
Ecuación de L.: $m_L = \dfrac{-3-(-9)}{-2-4} = -1$

$\Rightarrow L: y - (-3) = -1[x - (-2)]$
$\Rightarrow L: x + y + 5 = 0$

Distancia de M a L: $d = \dfrac{|(3)+(-4)+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$

14. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas:
$x - 2y - 4 = 0 \ \wedge\ 4x - y - 4 = 0$

Resolución:



Notemos que P equidista de $L_1 \wedge L_2$
$\Rightarrow d(P; L_1) = d(P; L_2)$

$\dfrac{|x-2y-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|4x-y-4|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}$

$\dfrac{|x-2y-4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|4x-y-4|}{\sqrt{17}}$

- $\dfrac{x-2y-4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4x-y-4}{\sqrt{17}}$

$(\sqrt{17}-4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17}-\sqrt{5})y - 4(\sqrt{17}-\sqrt{5}) = 0$

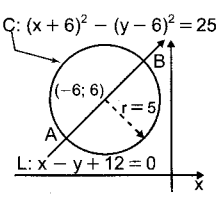
- $\dfrac{x-2y-4}{\sqrt{5}} = \dfrac{-4x+y+4}{\sqrt{17}}$

$(\sqrt{17}+4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17}+\sqrt{5})y - 4(\sqrt{17}+\sqrt{5}) = 0$

Pero la pendiente de la recta L es positiva.
$\Rightarrow L: (\sqrt{17}+4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17}+\sqrt{5})y - 4(\sqrt{17}+\sqrt{5}) = 0$

15. Determinar la suma de las abscisas de los puntos de intersección de la circunferencia:
$C: (x+6)^2 + (y-6)^2 = 25$ y la recta $L: x - y + 12 = 0$

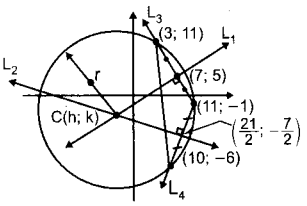
Resolución:



En A y B $L \cap C$
Resolvemos el sistema de ecuaciones:
$x - y + 12 = 0 \Rightarrow y = x + 12 \quad ...(1)$
$(x+6)^2 + (x-6)^2 = 25 \quad ...(2)$
Reemplazamos (1) en (2):
$(x+6)^2 + (x+6)^2 = 25 \Rightarrow 2(x+6)^2 = 25$
$x + 6 = \pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}$
Luego: $x_1 = -6 + \dfrac{5}{\sqrt{2}} \ \wedge\ x_2 = -6 - \dfrac{5}{\sqrt{2}}$
$\therefore\ x_1 + x_2 = -12$

16. Dada la circunferencia de centro c(h; k) y radio "r", que pasa por los puntos (10; −6), (11; −1) y (3; 11); determinar el valor de: S = r + h + k.

Resolución:



Note que: $L_1 \cap L_2 = \{c\}$

Para L_3: $m_3 = \dfrac{11+1}{3-11} \Rightarrow m_3 = -\dfrac{3}{2}$

como $L_3 \perp L_1 \Rightarrow m_1 = \dfrac{2}{3}$

$\therefore\ L_1: (y-5) = \dfrac{2}{3}(x-7)$ ...(1)

Para L_4: $m_4 = \dfrac{-1+6}{11-10} \Rightarrow m_4 = 5$

Como: $L_4 \perp L_2 \Rightarrow m_2 = -1/5$

$\therefore\ L_2: \left(y+\dfrac{7}{2}\right) = -\dfrac{1}{5}\left(x-\dfrac{21}{2}\right)$ ...(2)

Ordenando las ecuaciones de $L_1 \wedge L_2$

L_1: $3y = 2x + 1$ ...(1)

L_2: $5x = -x - 7$ ...(2)

Resolviendo el sistema formado: $x = -2 \wedge y = -1$

Luego, C: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = r^2$

Como $(3; 11) \in C \Rightarrow 5^2 + 12^2 = r^2 \Rightarrow r = 13$

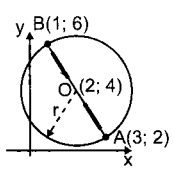
Finalmente:

Centro: $(h; k) = (-2; -1) \wedge$ radio: $r = 13$

$\therefore\ h + k + r = 10$

17. Hallar la ecuación de la circunferencia, donde los puntos A(3; 2) y B(1; 6) son extremos de uno de los diámetros.

Resolución:



$d_{(0;A)} = r = \sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2} \Rightarrow r = \sqrt{5}$

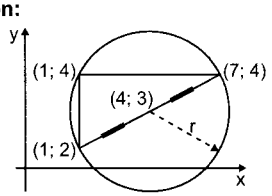
Luego, la ecuación de la circunferencia sera:

C: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = \sqrt{5}^2$

Desarrollando: C: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

18. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: (1; 2) , (1; 4) y (7; 4)

Resolución:



Del gráfico: $r = \sqrt{(7-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$

Luego:

C: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{10}^2$

$\therefore$ C: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$

19. Determinar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 + x - 3y - 4 = 0$ y tangente al eje y.

Resolución:

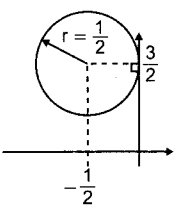
Tenemos: C_1: $x^2 + y^2 + x - 3y - 4 = 0$

Completamos cuadrados:

C_1: $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{13}{2}$

Centro: (−1/2: 3/2)

La circunferencia pedida debe tener su centro en el punto: $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ y a la vez debe de ser tangente al eje y.



Luego: C_2: $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

Desarrollamos:

C_2: $x^2 + y^2 + x - 3y + 9/4 = 0$

$\therefore\ C_2$: $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 9 = 0$

20. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y es concéntrica a la circunferencia.

$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 5 = 0$

Resolución:

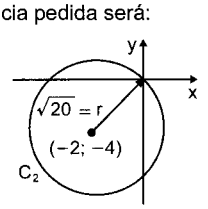
C_1: $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 5 = 0$

Completamos cuadrados:

C_1: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 15$

centro: $(-2; -4) \wedge$ radio: $\sqrt{15}$

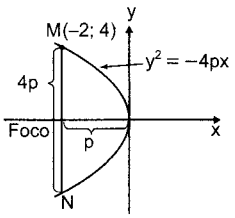
La circunferencia pedida será:



$\therefore\ C_2$: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 20$

21. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje x pasa por el punto (−2; 4). Determinar las coordenadas del foco y la longitud de un lado recto.

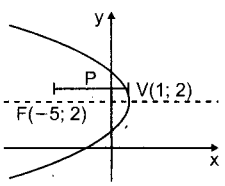
Resolución:



Como $(-2; 4) \in y^2 = -4px$
Evaluamos: $4^2 = -4p(-2) \Rightarrow p = 2$
Ecuación de la parábola $y^2 = -8x$
Foco: $(-p; 0) = (-2; 0)$
Lado recto MN: $4p = 8$

22. Una parábola cuyo vértice es (1; 2), y su foco de coordenadas (−5; 2) tiene por ecuación:

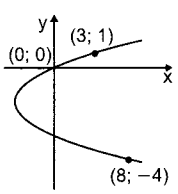
Resolución:



Ecuación de la parábola: $(y - 2)^2 = -4p(x - 1)$
Del gráfico: $p = 1 - (-5) \Rightarrow p = 6$
P: $(y - 2)^2 = -24(x - 1)$
P: $y^2 - 4y + 24x - 20 = 0$

23. Determinar la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas y pasa por los puntos (0; 0), (8; −4) y (3; 1).

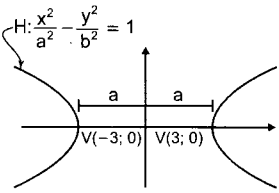
Resolución:



Sea la ecuación de la parábola:
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Al desarrollar esta tendrá la forma:
$y^2 - by = cx + d$
Cálculo de b, c y d:
Para (0; 0) $\Rightarrow 0 = 0 + d \Rightarrow d = 0$
Para (3; 1) $\Rightarrow 1 - b = 3c$
Para (8; −4) $\Rightarrow 16 + 4b = 8c$
Resolvemos ambas ecuaciones: $b = -2$; $c = 1$
$\therefore$ P: $y^2 + 2y = x$

24. Hallar la ecuación de la hipérbola, con vértice (−3; 0), (3; 0) y lado recto igual a 24 unidades.

Resolución:



Del gráfico: $a = 3$
Por condición, lado recto: $\frac{2b^2}{a}$
$\Rightarrow 24 = \frac{2b^2}{3} \Rightarrow b = 6$
H: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

25. Dada la ecuación de la hipérbola H: $5x^2 - 20y^2 = 100$, determinar la distancia entre los focos.

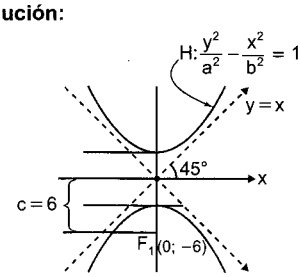
Resolución:
Dato: H: $5x^2 - 20y^2 = 100$
$H = \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{20} \quad b = \sqrt{5}$
Como: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 5$
Distancia focal: 2c
$\therefore$ Distancia focal: 10

26. Verificar que la ecuación:
$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 181 = 0$
corresponde a la hipérbola de centro (h; k) y eje principal paralelo al eje X, luego hallar el valor numérico de: $h + k + 3(a^2 + b^2)$

Resolución:
H: $4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 181 = 0$
Agrupamos los términos:
$$H: \frac{(x+3)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(y-4)^2}{\frac{25}{12}} = 1$$
De la ecuación, centro: $(h; k) = (-3; 4)$
$a^2 = \frac{25}{4} \quad \wedge \quad b^2 = \frac{25}{12}$
Luego:
$$h + k + 3(a^2 + b^2) = -3 + 4 + 3\left(\frac{100}{12}\right) = 26$$

27. Una asíntota de una hipérbola es: $y = x$, tiene un foco (0; −6), y tiene al eje Y como eje focal. Hallar la ecuación de dicha hipérbola.

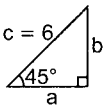
Resolución:



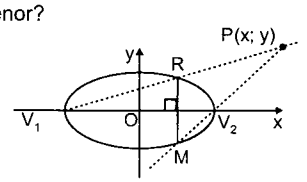
Como: $m_L = 1 \Rightarrow a = b$

Luego: $a = b = 3\sqrt{2}$

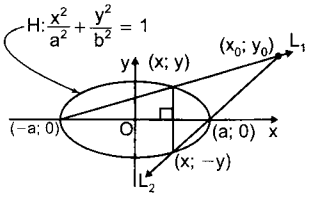
$\Rightarrow H: \dfrac{y^2}{18} - \dfrac{x^2}{18} = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 18$



28. En la figura mostrada, se tiene la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. ¿Qué lugar geométrico determina el punto P, si RM se mueve en forma paralela al eje menor?



Resolución:



En L_1: $m_1 = \dfrac{y_0}{x_0 + a} = \dfrac{y}{x + a}$ ...(1)

En L_2: $m_2 = \dfrac{y_0}{x_0 - a} = \dfrac{y}{a - x}$ ...(2)

De (1) $\wedge$ (2) obtenemos que:

$x = \dfrac{a^2}{x_0} \quad \wedge \quad y = \dfrac{ay_0}{x_0}$

Reemplazamos en la ecuación:

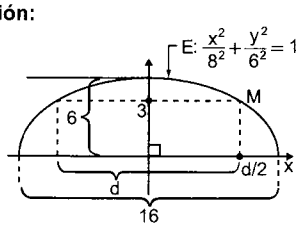
$E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{\left(\dfrac{a^2}{x_0}\right)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{ay_0}{x_0}\right)^2}{b^2} = 1$

Ordenando obtenemos:

$\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ Ecuación de la hipérbola.

29. El arco de un túnel es de forma semielíptica, tiene un ancho en la parte más baja de 16 m y una altura en el centro de 6 m, hallar ancho que tiene el túnel a la mitad de su altura.

Resolución:

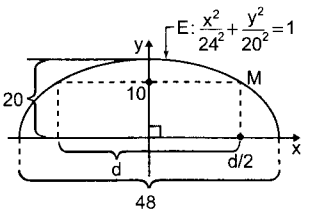


Evaluamos el punto: $M\left(\dfrac{d}{2}; 3\right) \in E$.

$\Rightarrow \dfrac{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}{64} + \dfrac{3^2}{36} = 1 \Rightarrow d = 8\sqrt{3}\,m$

30. Un arco tiene la forma de una semielipse, tiene 48 m de ancho en la base y una altura de 20 m. ¿Qué tan ancho es el arco a una altura de 10 m sobre la base?

Resolución:



Como: $M\left(\dfrac{d}{2}; 10\right) \in E$, verificar la ecuación de E.

$\Rightarrow \dfrac{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}{24^2} + \dfrac{10^2}{20^2} = 1 \Rightarrow d = 24\sqrt{3}$ m

31. La recta de ecuación: $4x + 5y + k = 0$, forma con los ejes coordenados una región triangular cuya área es S/.2. Hallar los valores de la constante k.

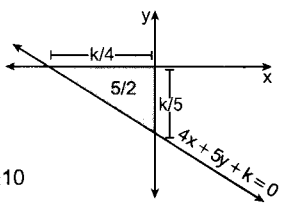
Resolución:

Por dato:

$\left(\dfrac{k}{4}\right)\left(\dfrac{k}{5}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$

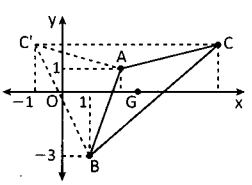
$\Rightarrow \dfrac{k^2}{40} = \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow k^2 = 100 \quad \therefore k = \pm 10$



32. El área de un triángulo es S = 9, dos de sus vértices son los puntos A(3; 1) y B(1; −3); el centro de gravedad de este triángulo está situado en el eje X. Determinar las coordenadas del tercer vértice C.

Resolución:



Sean (x; y) las coordenadas del vértice C.

Si: $S = 9 \Rightarrow 9 = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & y \\ 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow 18 = |3y - 3x + 1 + 9 - y - x|$

De donde: $|2x - y - 5| = 9$ ... (1)

Si $G(\bar{x}; 0)$ es el baricentro, entonces:

$0 = \dfrac{1}{3}(1 - 3 + y) \Rightarrow y = 2$

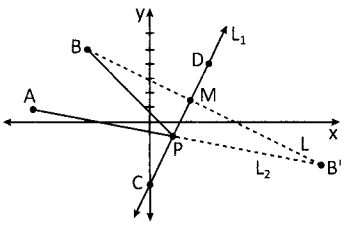
Luego, en (1): $|2x - 7| = 9$

$\Rightarrow 2x - 7 = 9 \vee 2x - 7 = -9 \Rightarrow x = 8 \vee x = -1$

$\therefore C(8; 2)$ y $C'(-1; 2)$

33. Hallar en la recta que pasa por C(0; −5) y D(4; 3) un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos A(−7; 1) y B(−5; 5) sea mínima.

Resolución:



Construimos B', simétrico de B, respecto de la recta L_1 que pasa por C y D. Resulta evidente que $\overline{AP} + \overline{CB'}$ es mínima.

Luego, la pendiente de $\overline{CD}$ es: $m_1 = \dfrac{3+5}{4-0} = 2$

Ecuación de L_1: $y + 5 = 2(x - 0)$

$\Rightarrow L_1: 2x - y - 5 = 0$

La ecuación de la recta $L \perp L_1$, que pasa por B es:

$y - 5 = -\dfrac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow L: x + 2y - 5 = 0$

Como: $M \in (L_1 \cap L_2) \Rightarrow M = (3; 1)$

Siendo M punto medio de $\overline{BB'}$ se deduce fácilmente que B' = (11; −3)

Pendiente de AB': $m_2 = \dfrac{1+3}{-7-11} = -\dfrac{2}{9}$

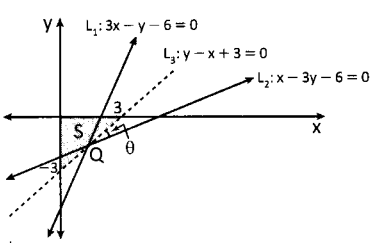
Ecuación de la recta L_2 que pasa por A y B':

$y - 1 = -\dfrac{2}{9}(x + 7) \Rightarrow L_2: 2x + 9y + 5 = 0$

Por consiguiente, si $P \in (L_1 \cap L_2) \Rightarrow P = (2; -1)$

34. Dadas las rectas
$L_1: 3x - y - 6 = 0$ y $L_2: x - 3y - 6 = 0$ y la recta L_3 que contiene a su menor bisectriz. Hallar el área de la región triangular que determina L_3 con los ejes coordenados.

Resolución:



$Q = \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$; $m_1 = 3 \wedge m_2 = 1/3$

$\tan\theta = \dfrac{3 - 1/3}{1 + (3)\left(\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53°$

Luego: $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{m_3 - 1/3}{1 + (m_3)\left(\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{3m_3 - 1}{3 + m_3}$

$\tan\left(\dfrac{53°}{2}\right) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{3m_3 - 1}{3 + m_3} \Rightarrow 3 + m_3 = 6m_3 - 2$

$\Rightarrow 5 = 5m_3 \Rightarrow m_3 = 1$

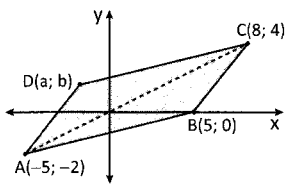
Luego: $1 = \dfrac{y + 3/2}{x - 3/2} \Rightarrow L_3: y = x - 3$

Ahora, si tenemos la ecuación L_3: $y = x - 3$ ya podemos hallar los interceptos con los ejes coordenados, como se observa en la gráfica.

En consecuencia: $S = \dfrac{(3)(3)}{2} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5 = 4{,}5$

35. En un paralelogramo ABCD, de coordenadas A(−5; −2), B(5; 0) y C(8; 4), si m∠ABC es obtuso, hallar el área de la región ABCD.

Resolución:



Para el △ABC:

$$A_{\triangle ABC} = 1/2\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 0 \\ 8 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = (1/2)|M - N|$$

Donde: $M = (5)(-2) + (8)(0) + (-5)(4) \Rightarrow M = -30$

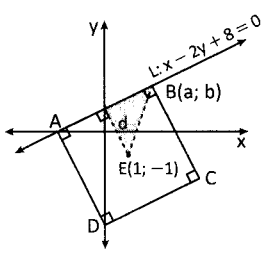
Ahora: $N = (-5)(0) + (5)(4) + (8)(-2) \Rightarrow N = 4$

Luego: $A_{\triangle ABC} = (1/2)|-30 - 4| \Rightarrow A_{\triangle ABC} = (1/2)(34)$

Pero: $A_{\square ABCD} = A_{\triangle ABC}(2) \quad \therefore A_{\square ABCD} = 34$

36. El punto E(1; −1) es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta $x - 2y + 8 = 0$. Hallar las coordenadas del vértice del cuadrado ubicado en el primer cuadrante.

Resolución:



Sabemos que: $|\overline{BE}|^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2$

También: $d = \dfrac{|(1) - 2(-1) + 8|}{\sqrt{1+4}}$

$\Rightarrow d = \dfrac{11}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \dfrac{11\sqrt{5}}{5}$

Luego: $|\overline{BE}| = \left(\dfrac{11\sqrt{5}}{5}\right)(\sqrt{2}) = \dfrac{11\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{11\sqrt{10}}{5}\right)^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \quad ...(1)$

Pero: $B(a; b) \in L: x - 2y + 8 = 0$

$\Rightarrow a - 2b + 8 = 0 \Rightarrow a = 2b - 8$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

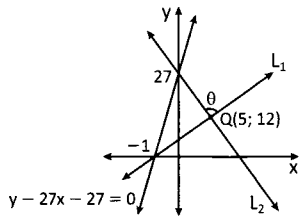
$\frac{242}{5} = (2b - 9)^2 + (b + 1)^2$

Resolviendo: $b = \frac{28}{5} \Rightarrow a = \frac{16}{5}$

$\therefore B(a; b) = B\left(\frac{16}{5}; \frac{28}{5}\right)$

37. Dos rectas L_1 y L_2 se intersecan en el punto (5; 12) además las intersecciones de $\overleftrightarrow{L_1}$ con el eje X y $\overleftrightarrow{L_2}$ con el eje Y están contenidas en una recta cuya ecuación es $y - 27x - 27 = 0$. Calcular el menor ángulo formado por las rectas L_1 y L_2.

Resolución:



$m_1 = \frac{12 - 0}{5 - (-1)} = \frac{12}{6} = 2$

$m_2 = \frac{12 - 27}{5 - 0} = \frac{-15}{5} = -3$

Luego, como: $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{-3 - 2}{1 + (2)(-3)} = \frac{-5}{1 - 6} \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\therefore \theta = 45°$

38. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta L_1: $2x - y + 6 = 0$ en el punto S(−1; 4), y tiene radio $3\sqrt{5}$.

Resolución:

Conocido el radio de la circunferencia, el problema se reduce a determinar su centro C(h; k).

Luego, si $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{L_1} \Rightarrow m_{sc} m_1 = -1$

Además: $m_1 = 2$

$\Rightarrow \left(\frac{k - 4}{h + 1}\right)(2) = -1 \Rightarrow h + 2k - 7 = 0$

$r = d(C; L_1) \Rightarrow 3\sqrt{5} = \frac{|2h - k + 6|}{\sqrt{4 + 1}}$

$\Rightarrow |2h - k + 6| = 15$

$\Rightarrow 2h - k + 6 = 15 \vee 2h - k + 6 = -15$

$\Rightarrow 2h - k - 9 = 0 \vee 2h - k + 21 = 0$

Entonces:

$(2h - k - 9 = 0) \cap (h + 2k - 7 = 0) = C_1(5; 1)$

$(2h - k + 21 = 0) \cap (h + 2k - 7 = 0) = C_2(-7; 7)$

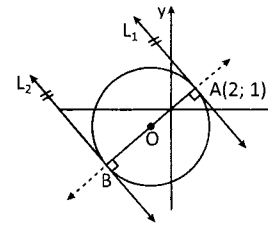
Hay dos soluciones:

$\mathscr{C}_1$: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 45 \wedge$

$\mathscr{C}_2$: $(x + 7)^2 + (y - 7)^2 = 45$

39. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las dos rectas paralelas L_1: $2x + y - 5 = 0$ y L_2: $2x + y + 15 = 0$, y a una de ellas, en el punto A(2; 1).

Resolución:



Por sustitución de sus coordenadas vemos que: $A \in L_1$

$\Rightarrow |\overline{AB}| = d(L_1; L2) = \frac{|15 - (-5)|}{\sqrt{4 + 1}} = 4\sqrt{5}$

Como: $|\overline{AB}| = 2r \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$

La ecuación de la recta L, perpendicular a L_1 y L_2 es: $y - 1 = (1/2)(x - 2) \Rightarrow L: x - 2y = 0$

$\Rightarrow L_2 \cap L = B(-6; -3)$; C biseca al diámetro $\overline{AB}$

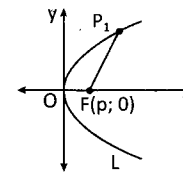
$\Rightarrow C\left(\frac{2 - 6}{2}; \frac{1 - 3}{2}\right) = C(-2; -1)$,

Luego, la ecuación de la circunferencia es:

$\mathscr{C}$: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$

40. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1; y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es $r = |x_1 + p|$.

Resolución:



Sea la parábola $\mathscr{P}$: $y^2 = 4px$

Cuyo foco tiene por coordenadas: F(p; 0)

Si $p_1(x_1; y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1$ ...(1)

Y si $r = d(F; p_1) \Rightarrow r = \sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2}$ ...(2)

Luego, sustituyendo (1) en (2) se tiene:

$r = \sqrt{(x_1 - p)^2 + 4px_1} = \sqrt{(x_1 + p)^2} \quad \therefore r = |x_1 + p|$

41. Hallar en la parábola $y^2 = 16x$, los puntos cuyos radios focales son iguales a 13.

Resolución:

Si $y^2 = 16x \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4$

Por la fórmula obtenida en el problema anterior, se tiene: $r = |x_1 + p| \Rightarrow 13 = |x_1 + 4|$

$\Rightarrow x_1 + 4 = 13 \vee x_1 + 4 = -13$

$\Rightarrow x_1 = 9 \vee x_1 = -17$

Como $p > 0$, la curva se abre hacia la derecha del eje Y, por lo que x_1 debe ser positivo; luego, para

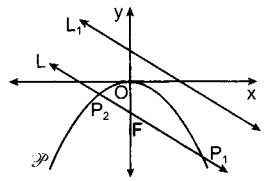
$x_1 = 9 \Rightarrow (y_1)^2 = 16(9) \Rightarrow y_1 = \pm 12$

Por lo tanto, los puntos requeridos son:

$p_1 = (9; 12) \vee p_1 = (9; -12)$

42. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $\mathscr{P}$: $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta: L_1: $3x + 4y - 7 = 0$

Resolución:



Si: $x^2 = -8y \Rightarrow 4p = -8 \Rightarrow p = -2$

Luego, el foco tiene por coordenadas: F(0; −2)

La familia de rectas paralelas a L_1 es:

L: $3x + 4y + k = 0$ ... (1)

Si $F(0; -2) \in L \Rightarrow 3(0) + 4(-2) + k = 0$,

de donde: $k = 8$

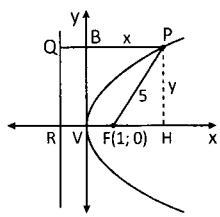
Entonces, en (1); L: $3x + 4y + 8 = 0$

Ahora, $L \cap \mathscr{P} = P_1(8; -8)$ y $P_2(-2; -1/2)$

$\therefore |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(8+2)^2 + (-8+1/2)^2} = 25/2$

43. En cierta parábola la distancia del vértice al foco F es 1. P es un punto de la parábola que dista 5 del foco. Q es la proyección de P sobre la directriz. R es la intersección de la directriz con el eje X. Hallar el área del cuadrilátero PQRF.

Resolución:



El cuadrilátero PQRF es un trapecio rectángulo de lados paralelos $\overline{PQ}$ y $\overline{FR}$, y altura $\overline{PH}$, entonces:

$A_{\square PQRF} = (1/2)(|\overline{PQ}| + |\overline{FR}|)|\overline{PH}|$ ...(1)

Por definición: $|\overline{PF}| = |\overline{PQ}| = 5$ ...(2)

$|\overline{FR}| = 2|\overline{VF}| = 2(1) = 2$ ...(3)

Si $|\overline{PQ}| = |\overline{PB}| + |\overline{BQ}| \Rightarrow 5 = x + 1 \Rightarrow x = 4$

La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 4px$

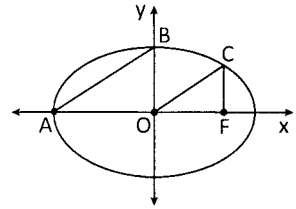
Para: $x = 4$; $y^2 = 4(1)(4) = 16$

$\Rightarrow y = |\overline{PH}| = 4$ ...(4)

Sustituyendo (2); (3) y (4) en (1) obtenemos:

$A_{\square PQRF} = (1/2)(5 + 2)(4) = 14$

44. Para el foco F de la elipse se ha trazado una perpendicular a su eje mayor. Determinar para qué valor de la excentricidad de la elipse serán paralelos los segmentos AB y OC.



Resolución:

Si $\overline{AB} \,//\, \overline{OC} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle OFC$

$\Rightarrow \dfrac{AO}{OB} = \dfrac{OF}{FC} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{FC}$

De aquí: $FC = \dfrac{bc}{a}$; pero $FC = \dfrac{1}{2}LR \Rightarrow FC = \dfrac{b^2}{a}$

Luego: $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow b = c$

Excentricidad: $e = c/a$

$\Rightarrow e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{b^2}{2b^2} \quad \therefore e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

45. Una elipse con centro en el origen tiene un vértice en (0; 5) y una de sus directrices es la recta $4y - 25 = 0$. Hallar su ecuación.

Resolución:

Como la directriz dada es una recta horizontal, la ecuación de la elipse tiene la forma:

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ ... (1)

Si $V(0; 5) \Rightarrow a = 5$, y L_1: $y = \dfrac{25}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{25}{4} \Rightarrow c = 4$

De la relación: $c^2 = a^2 - b^2$

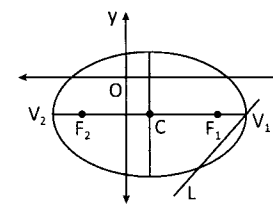
$\Rightarrow 16 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

Luego, en (1): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

La ecuación de la elipse es: $25x^2 + 9y^2 = 225$

46. Los focos de una elipse son $F_1(4; -2)$ y $F_2(-2; -2)$. Hallar la ecuación de la elipse si uno de los vértices está sobre la recta L: $x - y - 8 = 0$

Resolución:



Como los focos están en una línea horizontal, la ecuación de la elipse tiene la forma:

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ...(1)

C(y; k) es punto medio de $\overline{F_1F_2} \Rightarrow C(1; -2)$

Si $V_1(h + a; k) \in \overleftrightarrow{L} \Rightarrow (h + a) - k - 8 = 0$
$\Rightarrow (1 + a) + 2 - 8 = 0 \Rightarrow a = 5$
Además:
$2c = d|\overline{F_1F_2}| \Rightarrow 2c = |4 - (-2)| = 6 \Rightarrow c = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16$
En (1), se tiene la ecuación buscada de la elipse:
$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

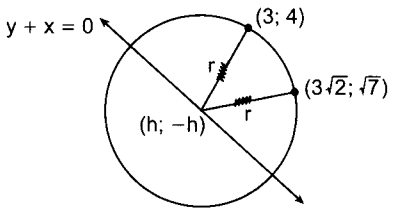
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $y + x = 0$. Además, pasa por los puntos $(3; 4)$ y $(3\sqrt{2}; \sqrt{7})$?

A) $x^2 + y^2 = 5$ B) $x^2 + y^2 = 9$
C) $x^2 + y^2 = 15$ D) $x^2 + y^2 = 16$
E) $x^2 + y^2 = 25$

Resolución:



$r^2 = (h - 3)^2 + (-h - 4)^2 = (h - 3\sqrt{2})^2 + (-h - \sqrt{7})^2$
Desarrollando:
$2h^2 + 2h + 25 = 2h^2 + 2(\sqrt{7} - 3\sqrt{2})h + 25$
Despejando: $h = 0$
Reemplazando: $r = 5$
Piden ecuación de la circunferencia:
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Reemplazando: $x^2 + y^2 = 25$

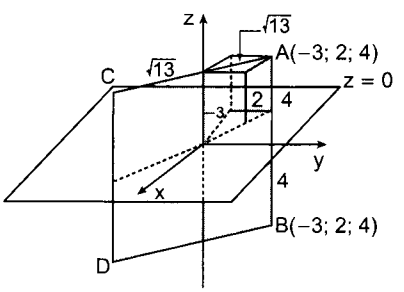
Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - II)

Dado el punto $(-3; 2; 4)$, determine sus simetrías respecto del eje Z y respecto del plano $z = 0$. Determine el área del rectángulo cuyos vértices son justamente los puntos generados.

A) $16\sqrt{13}$ B) $15\sqrt{13}$ C) $14\sqrt{13}$
D) $13\sqrt{13}$ E) $12\sqrt{13}$

Resolución:



B simétrico de A respecto al plano $z = 0$
C simétrico de A respecto al eje Z
Formando el rectángulo de acuerdo a la condición:
El área: $A_{ABCD} = (2\sqrt{13})(8) = 16\sqrt{13}$

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

Determine la distancia del punto $(1/4; 4)$ a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación: $y + 1 = 2(x + 3/4)$.

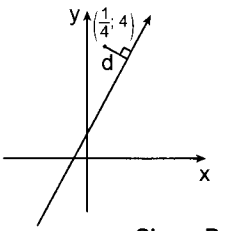
A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{4}{\sqrt{5}}$
D) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

Resolución:

Efectuando operaciones en $\mathscr{L}$:
$\mathscr{L}$: $4x - 2y + 1 = 0$

$$\Rightarrow d = \frac{\left|4\left(\frac{1}{4}\right) - 2(4) + 1\right|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{5}}$$



Clave: B

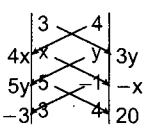
PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

El área de un triángulo cuyos vértices son $A(x; y)$, $B(3; 4)$ y $C(5; -1)$, es 7
Además: $y + 3x = 4 \wedge x > -2$
Calcule $x + y$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución:

Área



$I = 4x + 5y - 3$ $D = 3y - x + 20$
$I = 4x + 5y - 3$ $D = 3y - x + 20$

$$\text{Área} = \frac{|D - I|}{2} \Rightarrow 7 = \frac{|23 - 2y - 5x|}{2}$$

Dato: $y = 4 - 3x \Rightarrow 14 = |15 + x|$
Dato: $x > -2 \Rightarrow 15 + x > 13$

$\Rightarrow 14 = 15 + x \Rightarrow x = -1;\ y = 7$

Piden: $x + y = 6$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

Determina la cónica que representa la ecuación polar.

$$r = \frac{8}{4 + 3\cos\theta}$$

A) Hipérbola
B) Parábola
C) Elipse
D) Circunferencia
E) Un punto

Resolución:

Sabemos: $x = r\cos\theta;\ y = r\text{sen}\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

Del dato: $4r + 3r\cos\theta = 8$

A coordenadas cartesianas:

$4r = 8 - 3x$

$16r^2 = 64 - 48x + 49x^2$

$16x^2 + 16y^2 = 64 - 48x + 9x^2$

$7x^2 + 16y^2 + 48x - 64 = 0$

Por lo tanto, es una elipse

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar en el primer cuadrante el área de la región no convexa, de una sola pieza, limitada por las curvas ($a > 0$)

C_1: $x^2 + y^2 = (4a)^2$ C_2: $y = -2x + 4a$

C_3: $y = 2x - 4a$ C_4: $y = -2x + 8a$

A) $8\pi a^2 - 2a^2$ B) $16\pi a^2 - 6a^2$
C) $12\pi a^2 - 5a^2$ D) $4\pi a^2 - 6a^2$
E) $16\pi a^2 - 5a^2$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas:
L_1: $x + 2y + 1 = 0 \wedge L_2$: $2x + y - 1 = 0$
que es perpendicular a la cuerda común de las circunferencias:
C_1: $x^2 + y^2 + 3x = 0 \wedge C_2$: $x^2 + y^2 + 3y = 0$

A) $2x + y - 1 = 0$ B) $y - 2x + 3 = 0$
C) $2y + x + 1 = 0$ D) $y - x - 2 = 0$
E) $y + x = 0$

3. Un avión realiza una maniobra a velocidad supersónica, según la trayectoria: $2y^2 - x^2 = 48$. Hallar la menor distancia de la trayectoria al punto (6; 0)

A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

4. Hallar la medida del área de la región comprendida entre la curva de ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ y la circunferencia que pasa por el punto P(2; 6); que es concéntrica con la curva anterior.

A) 5π B) 10π C) 16π
D) 20π E) 25π

5. Dada la ecuación de la parábola:
$y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$, hallar la suma de las coordenadas del foco de la parábola.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

6. Hallar la mayor distancia posible de los puntos de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$, al origen de coordenadas.

A) 7 B) 5 C) 8
D) 10 E) 4

7. Hallar la medida del ángulo formado por las circunferencias:
C_1: $x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0$
C_2: $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

A) 45° B) 30° C) 60°
D) 53° E) 90°

8. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C(1; − 2) y radio igual a 2.

A) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$
E) $x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C(2; 3) y que pasa por P(1; −1).

A) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$
E) $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 1 = 0$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia canónica, tangente a la recta: L: $2x - 3y + 13 = 0$

A) $x^2 + y^2 = 13$ B) $x^2 + y^2 = 13/3$
C) $x^2 + y^2 = 26$ D) $x^2 + y^2 = 26/3$
E) $x^2 + y^2 = 39$

11. Dada la circunferencia: C: $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 1 = 0$
Hallar la ecuación de otra concéntrica a ella, de radio $\sqrt{5}$.

A) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 10 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 15 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 15 = 0$

12. El punto P(2; −1) es el centro de una circunferencia que intersecta a la recta: $2x - 5y + 16 = 0$ determinando una cuerda cuya longitud es igual a 8. Calcular la medida del radio de dicha circunferencia.

A) $\frac{15}{\sqrt{29}}$ B) $\frac{18}{\sqrt{29}}$ C) $\frac{20}{\sqrt{29}}$
D) $\frac{33}{\sqrt{29}}$ E) $\frac{35}{\sqrt{29}}$

13. Calcular la distancia del punto de la circunferencia: C: $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$ más próxima a la recta L, sabiendo que: L: $8x - 4y + 73 = 0$

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$ E) 5

14. El espejo del faro de un auto tiene la forma de una parábola en su sección transversal. Hallar el parámetro de esta parábola, si el diámetro del faro mide

20 cm y la profundidad 15 cm. El eje Ox es el eje del faro y el origen se ubica en la parte profunda del espejo.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 1

15. El techo en el pasillo de 20 pies de ancho tiene la forma de una semielipse, tiene 18 pies de altura en el centro y 12 pies de altura en las paredes laterales. Encontrar la altura del techo a 4 pies de cualquier pared.

A) $\frac{14}{5}$ B) $\frac{78}{5}$ C) $\frac{20}{3}$
D) $\frac{73}{3}$ E) $\frac{24}{7}$

16. Hallar la ecuación de la cuerda común a las circunferencias:
C_1: $x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$
C_2: $x^2 + y^2 = 5$

A) $3x + 6y + 5 = 0$ B) $6x + 3y + 5 = 0$
C) $3x - 6y - 5 = 0$ D) $3x - 6y + 5 = 0$
E) $6x + 3y - 5 = 0$

17. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta L: $x - 4y + 3 = 0$ en el punto A(5; 2) y es tangente a la recta.
L_2: $4x + y - 5 = 0$, en el punto B(2; −3)

A) $x^2 + y^2 = 23$
B) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 23 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 23 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 20 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 23 = 0$

18. Si $2\sqrt{5}$ es la distancia entre las rectas:
L_1: $x + 2y - a = 0 \wedge L_2$: $x + 2y + 4a = 0$
Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a ambas rectas y cuyo centro se encuentra en el eje Y. (Si: $a > 0$)

A) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 5$ B) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 5$
C) $x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 5$ D) $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 5$
E) $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 5$

19. Dadas las circunferencias:
C_1: $x^2 + y^2 = 1 \wedge C_2$: $x^2 + y^2 + 20x + 4y + 100 = 0$
Hallar la longitud de la tangente común externa a dichas circunferencias.

A) 9 B) 10 C) $\sqrt{103}$
D) $\sqrt{105}$ E) $\sqrt{113}$

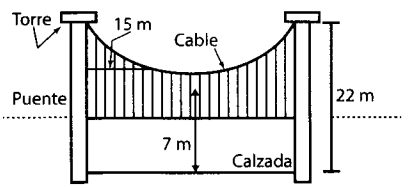
20. Hallar las coordenadas del centro de una circunferencia cuyo centro está en la recta L: $x + 2y - 6 = 0$ y que pasa por los puntos A(7; 3) y B(−3; −7).

A) (−4; 5) B) (−6; 6) C) $\left(-3; \frac{9}{2}\right)$
D) $\left(-5; \frac{11}{2}\right)$ E) (−8; 7)

21. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1; 6) y B(2; −1) y es tangente al eje y (señalar la de menor radio).

A) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$
B) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$
C) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$
D) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 15$
E) $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 9$

22. El cable del puente colgante de la figura tiene la forma de una parábola. Las dos torres se encuentran a una distancia de 150 m entre sí y los puntos de soporte del cable en las torres se hallan a 22 m sobre la calzada; además el punto más bajo del cable se encuentra a 7 m sobre dicha calzada. Hallar sobre la calzada, la distancia de un punto del cable que se encuentre a 15 m de una de las torres.



A) 16 B) 15,6 C) 16,6
D) 14 E) 14,6

23. El foco de una parábola es el punto A(4; 0) y un punto sobre la parábola es el punto P(2; 2).
Hallar la distancia del punto P a la recta directriz de la parábola.

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

24. Una recta con pendiente positiva que pasa por el punto (−4; 0) determina en la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 16$, una cuerda de 6,4 de longitud. Hallar la ecuación de la recta.

A) $3x - 4y + 3 = 0$ B) $3x - 4y + 12 = 0$
C) $3x - 4y + 6 = 0$ D) $3x - 2y + 12 = 0$
E) $2x + 3y + 6 = 0$

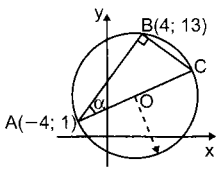
25. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (−2; 1) y es tangente a la recta: $3x - 2y - 6 = 0$, en el punto (4; 3).

A) $(x + 1)^2 + y^2 = 65$
B) $x^2 + (y - 5)^2 = 20$
C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$
D) $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \frac{1300}{49}$
E) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

26. Hallar la longitud de la circunferencia que pasa por los puntos (3; 0); (1; 0) y (0; 1).

A) 2π B) $\sqrt{2}\pi$ C) $2\sqrt{5}\pi$
D) $\sqrt{3}\pi$ E) $3\sqrt{3}\pi$

27. Hallar la ecuación de la circunferencia mostrada en la figura, si $\tan\alpha = 1/4$



A) $x^2 + y^2 - 3x - 12y = 53$
B) $x^2 + y^2 - 4x - 12y = 18$
C) $x^2 + y^2 - 5x - 12y = 19$
D) $x^2 + y^2 - 3x - 12y = 17$
E) $x^2 + y^2 - 5x - 6y = 13$

28. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{10}$, que pasa por P(7; 5) y es tangente a la recta: L: $x - 3y + 4 = 0$. (Señalar como respuesta aquella cuyo centro está más cerca al origen del sistema coordenado)

A) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 10$
B) $\left(x - \frac{44}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{38}{5}\right)^2 = 10$
C) $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 10$
D) $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 10$
E) $\left(x + \frac{44}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{38}{5}\right)^2 = 10$

29. Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano, de donde se divisa al segmento de extremos A(−1; 3) y B(7; 5) bajo un ángulo recto.

A) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 8 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 8 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$

30. Determinar para qué valor de "k" las circunferencias $C_1 \wedge C_2$, se intersecan.
C_1: $x^2 + y^2 + 3x + y + k = 0$
C_2: $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$

A) [1; 2] B) [−2; 2]
C) $\langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$ D) $\langle -\infty; 1] \cup [2; +\infty\rangle$
E) [−2; 1]

31. Determinar el punto de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$, más cerca a la recta L: $3x - 4y + 18 = 0$

A) $\left(\frac{317}{125}; \frac{517}{125}\right)$ B) $\left(\frac{331}{125}; \frac{441}{125}\right)$
C) $\left(\frac{436}{125}; \frac{627}{125}\right)$ D) $\left(\frac{112}{35}; \frac{189}{35}\right)$
E) $\left(\frac{421}{125}; \frac{717}{125}\right)$

32. Una elipse es tangente a una circunferencia de modo que sus focos se encuentran también sobre la circunferencia. Hallar su excentricidad.

A) 1/2 B) $\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{2}/2$
D) 3/5 E) 4/5

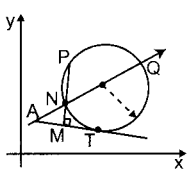
33. Sea la parábola P: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$; señalar la afirmación correcta.

A) $P \cap$ Eje Y $= \phi$ B) $P \cap$ Eje X $\neq \phi$
C) $P \cap$ Eje X $= \phi$ D) $P \cap$ Eje Y $\neq \phi$
E) P intersecta al eje X y al eje Y.

34. Una piedra arrojada hacia arriba formando un ángulo agudo con el horizontal, describe el arco de una parábola y cae a una distancia de 16 m.
Hallar el parámetro de esta parábola, si la altura máxima alcanzada es de 12 m.

A) 4/3 B) 2/3 C) 3/4
D) 3/2 E) 1

35. Según la figura: A(2; 3), Q(24; 36), 3(PN) = 8(NM) y T es punto de tangencia. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro O.



A) $(x - 16)^2 + (y - 24)^2 = 208$
B) $(x - 24)^2 + (y - 16)^2 = 208$
C) $(x - 12)^2 + (y - 8)^2 = 208$
D) $(x - 16)^2 + (y - 24)^2 = 202$
E) $(x - 16)^2 + (y + 24)^2 = 208$

36. Desde el foco F de la parábola:
P: $x^2 - 2x + 4y - 3 = 0$
se trazan los segmentos FB de tal modo que B este en la parábola. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de FB.

A) $x^2 + x + 2y = 0$ B) $x^2 - x + y = 0$
C) $x^2 - 2x + 2y = 0$ D) $x^2 + 2x - y = 0$
E) $x^2 - x + 3y = 0$

37. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas focales de la parábola P: $y^2 = 4px$

A) $y^2 = p(x + p)$ B) $y^2 = p(x - p)$
C) $y^2 = p(x - 2p)$ D) $y^2 = 2p(x + p)$
E) $y^2 = 2p(x - p)$

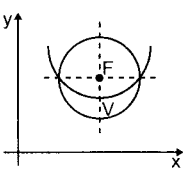
38. Dos móviles M_1 y M_2 describen sendas circunferencias concéntricas de radios 8 y 2 respectivamente. La velocidad angular w de ambos es constante e igual, pero de signo opuesto.
Señalar la ecuación del lugar geométrico que describe el punto medio de segmento M_1M_2.

A) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1$ B) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
C) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ D) $x^2=16(y-4)$
E) $y^2=16(x-4)$

39. Se tiene dos parábolas con el mismo lado recto, pero diferentes vértices.
Calcular la medida del ángulo que forman las rectas tangente a cada una de las parábolas en su punto de intersección.

A) 60° B) 45° C) 30° D) 90° E) 53°

40. Si la ecuación de la circunferencia mostrada es: $x^2+y^2-14x-14y+82=0$, hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son V y F respectivamente.



A) $x^2-14x-8y+89=0$
B) $x^2-x-6y+80=0$
C) $x^2-x+7y-80=0$
D) $x^2-12x-5y+50=0$
E) $x^2-7x-y+60=0$

41. Dada la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; hallar el área del rectángulo inscrito, si dos lados opuestos son los lados rectos de la elipse.

A) $\frac{4b^2c}{a}$ B) $\frac{4c^2b}{a}$ C) $\frac{4a^2c}{b}$
D) $\frac{4c^2a}{b}$ E) $\frac{4b^2a}{c}$

42. En una elipse definida por: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $(a>b)$

Se ubica el punto P de modo que se observan los focos bajo un ángulo recto. Determinar la ordenada del punto P.

A) $\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ B) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$
C) $\frac{b^2}{\sqrt{2a^2-b^2}}$ D) $\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$
E) $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

43. La entrada del túnel de una mina tiene forma semielíptica con 3 m de ancho en el piso y con su punto más elevado a 2 m de altura.
Calcular el ancho máximo (en m) que debe tener un carro de transporte de minerales de sección rectangular y de 1,5 m de altura para poder ingresar por esta entrada del túnel.

A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

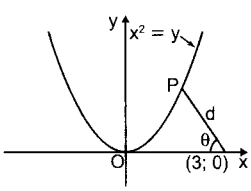
44. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola P: $x^2=-8y$, que es paralela a la recta L: $3x+4y-7=0$

A) $\frac{22}{3}$ B) $\frac{23}{2}$ C) $\frac{24}{5}$
D) $\frac{25}{2}$ E) $\frac{26}{3}$

45. Una pulga salta describiendo trayectorias parabólicas congruentes, donde la altura máxima alcanzada en cada salto es de 8 cm, si luego de cinco saltos ha recorrido desde su posición inicial 60 cm y si en un instante del segundo salto se encuentra a 6 cm de altura; calcular, en ese instante, la distancia más corta a su posición.

A) $\sqrt{43}$ B) $\sqrt{27}$ C) $3\sqrt{17}$
D) $3\sqrt{29}$ E) $2\sqrt{31}$

46. Si en el gráfico, la distancia d es mínima, calcular cotθ.



A) 2 B) 3,5 C) 4,5
D) 9 E) 7

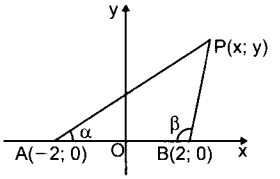
47. Dado el segmento AB de extremos A(3; −2) y B(7; 1) y la parábola: $x^2+2x-8y+17=0$
Hallar sobre la parábola un punto T, tal que unido a A y B determinan un triángulo cuya área es mínima, hallar el valor del área.

A) 23,5 B) 11,75 C) 7,25
D) 12,5 E) 20

48. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola: $y^2=12x$, que es paralela a la recta L: $3x-2y+30=0$

A) $3x-2y+5=0$ B) $2x-3y-10=0$
C) $3x-2y+4=0$ D) $2y-3x+30=0$
E) $3x-2y+8=0$

49. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x; y), que son vértices de los triángulos ABP de la figura, siendo: $\tan\alpha + \tan\beta = 2$



A) $x^2 = 4 + 2y$ B) $x^2 = 2y - 4$
C) $x^2 = 4 - 2y$ D) $x^2 = 2 - 4y$
E) $x^2 = 2 + 4y$

50. Dados los siguientes puntos: A(0; 0); B(5; 0); R(5; 7); S(12; 8). Sabiendo que el segmento RS es la diagonal de un cuadrado.
Hallar un punto P en el perímetro de dicho cuadrado para que el triángulo ABP tenga área máxima.
Hallar el área máxima.

A) 22,5 B) 17,5 C) 48,0
D) 2; $5\sqrt{151,25}$ E) 27,5

51. Dado el punto N(2; 4) y la circunferencia:
$C:(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$
Determinar el área del triángulo cuyos vértices son N y las intersecciones de C con el eje de abscisas.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

52. Determinar la ecuación de la recta ortogonal a la cuerda común de las circunferencias:
$C_1: x^2 + y^2 + 8y = 64 \wedge C_2: x^2 + y^2 - 6y = 16$

A) $y = -\frac{3}{4}x + 4$ B) $y = \frac{3}{4}x - 4$
C) $y + 4 = \frac{3}{4}(x - 1)$ D) $y - 4 = -\frac{4}{3}(x + 1)$
E) $y + 4 = \frac{4}{3}x$

53. Dada la elipse: $4x^2 + 3y^2 = 48$, hallar la ecuación de la cuerda que pasa por P(−1; 2) y se divide en él por la mitad.

A) $x - 3y + 8 = 0$ B) $x - 2y + 7 = 0$
C) $2x - 3y + 8 = 0$ D) $x - 5y + 10 = 0$
E) $x + 3y - 5 - 0$

54. Hallar la ecuación de la elipse cuyo lado recto es igual a 8; la longitud del eje mayor es 10, su eje focal es el eje X y su centro el origen.

A) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ B) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$
C) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{25} = 1$ D) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$
E) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$

55. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos estén en el eje Y, excentricidad: e = 7/9, centro en el origen y pasa por el punto $P\left(8; \frac{9}{2}\right)$

A) $81x^2 + 32y^2 = 5832$ B) $4x^2 + 25y^2 = 100$
C) $2x^2 + 6y^2 = 27$ D) $x^2 + 9y^2 = 30$
E) $3x^2 + 4y^2 = 48$

56. Determinar para que valores de $m(m > 0)$, la recta: $y = mx$, es tangente a la circunferencia.
$C: x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0;\ a > b > 0$

A) $m = \frac{ab}{a^2 - b^2}$ B) $m = \frac{ab}{a^2 + b^2}$
C) $m = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ D) $m = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$
E) $m = \frac{a^2b^2}{a - b}$

57. Dada una parábola de ecuación: $y^2 = 12x$, hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el vértice de la parábola y pasa por los extremos del lado recto.

A) $x^2 + y^2 = 10$ B) $x^2 + y^2 = 15$
C) $x^2 + y^2 = 30$ D) $x^2 + y^2 = 5$
E) $x^2 + y^2 = 45$

58. La ecuación de una circunferencia es:
$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$
Hallar las coordenadas del punto que pertenece a la circunferencia y esta más cerca del eje X.

A) (2; 1) B) (6; 4) C) (3; 2)
D) (2; 4) E) (−1; 4)

59. Hallar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias que son tangentes a la circunferencia: $(x + 1)^2 + y^2 = 36$, y pasan por el punto: A(1; 0)

A) $8x^2 + 9y^2 = 36$ B) $8x^2 + 9y^2 = 72$
C) $9x^2 + 8y^2 = 56$ D) $9x^2 + 8y^2 = 144$
E) $4x^2 + 9y^2 = 36$

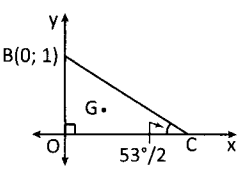
60. Calcular "n" para que la recta: $y = 2x + n$, sea tangente a la elipse: $9x^2 + 4y^2 = 36$; $(n > 0)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

61. En un triángulo ABC de coordenadas A(1; 1), B(3; 4) y C(5; 0), hallar la longitud de la mediana $\overline{AM}$.

A) $\sqrt{10}$ B) 7 C) 8 D) 9 E) 3

62. En la figura mostrada, calcular G, si G es el baricentro del △BOC.



A) (1; 3) B) (2; 4) C) (2; 3)
D) (3; 2) E) (2/3; 1/3)

63. En el segmento AB, A(−2; 2) y B(3; 7) ubicar un punto P, tal que AP = 5(BP). Calcular la diferencia de las coordenadas del punto P.

A) 6 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

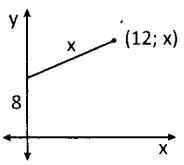
64. Dado A(3; 2) y B(13; 17), calcular las coordenadas de M. Si M ∈ $\overline{AB}$ y AM = 3AB/5.

A) (9; 11) B) (8; 10) C) (6; 9)
D) (8; 12) E) (7; 11)

65. Determinar los puntos (x; y) de la recta que pasa por (1; −1) y (−2; 2). Dar como respuesta la ecuación de dicha recta.

A) 3y + 2x = 2 B) x − y = 0
C) 2y + 4 = 3x D) y − 2x = 0
E) y + x = 0

66. Calcular x.



A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

67. Determinar el área limitada para un triángulo donde los puntos medios de sus lados son (−3; −2), (1; 6) y (4; −1).

A) 104 B) 52 C) 63.
D) 75 E) 100

68. Calcular la relación AP/PB, si P es el punto de intersección del eje Y con $\overline{AB}$, A(−2; 1) y B(3; 7).

A) 1/2 B) 4/5 C) 2/5
D) 3/4 E) 2/3

69. El área de la región limitada por un triángulo es 3 y dos de sus vértices son (3; 1) y (1; 3). Calcular las coordenadas del tercer vértice si se sabe que está situado en el eje de coordenadas.

A) (0; 1) B) (0; 2) C) (0; 8)
D) (0; 4) E) (0; 3)

70. Calcular el área de la región triangular ABC, si: A = (1; 1), B = (4; 5) y C = (6; 3)

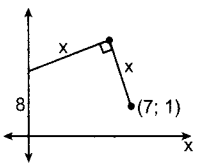
A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 5

71. Si: A = (−9; −2) y B = (−3; 6), calcular AB.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

72. Calcular x.

A) 2
B) 4
C) 6
D) 7
E) 8



73. Si A = (a; b) y B = (a + 9; b + 12), calcular AB.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

74. Si A = (x; 4) y B = (2 − x; 8) calcular las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$.

A) (1; 6) B) (2; 3) C) (3; 3)
D) (1; 7) E) (2; 7)

75. Calcular la pendiente de la recta que pasa por (−1; 0) y (1; −4).

A) −1 B) −2 C) −3
D) 0 E) 2

76. Si A = (6; 8) y O es el origen de coordenadas, calcular OA.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

CLAVES

1. D	11. B	21. B	31. D	41. A	51. E	61. A	71. E
2. E	12. D	22. C	32. C	42. A	52. E	62. E	72. D
3. D	13. B	23. C	33. B	43. C	53. C	63. D	73. A
4. C	14. B	24. B	34. A	44. D	54. D	64. A	74. A
5. C	15. B	25. D	35. A	45. D	55. A	65. E	75. B
6. A	16. E	26. C	36. C	46. A	56. D	66. D	76. B
7. E	17. E	27. D	37. E	47. B	57. E	67. A	
8. B	18. C	28. B	38. B	48. C	58. D	68. E	
9. A	19. C	29. C	39. D	49. C	59. B	69. A	
10. A	20. B	30. B	40. A	50. E	60. E	70. B	

Límites y derivadas de funciones trigonométricas

13 capítulo

John Wallis (Ashford, 23 de noviembre de 1616-Oxford, 28 de octubre de 1703) fue un matemático inglés a quien se le atribuye, en parte, el desarrollo del cálculo moderno. Fue un precursor del cálculo infinitesimal (introdujo la utilización del símbolo «∞» para representar la noción de infinito). Entre 1643 y 1689 fue criptógrafo del Parlamento y posteriormente de la Corte real. Fue también uno de los fundadores de la Royal Society y profesor en la Universidad de Oxford. En 1655, Wallis publicó un tratado sobre secciones cónicas en el que las define analíticamente. Este fue el primer libro en el que estas curvas fueron consideradas y definidas como curvas de segundo grado.

En 1656 se publicó *Arithmetica Infinitorum*, el trabajo más importante de Wallis. Pocos años después, en 1659, Wallis publica un tratado con la solución a los problemas de las cicloides propuestos por Blaise Pascal. En él, explica cómo los principios aportados en su *Arithmetica Infinitorum* pueden utilizarse para la rectificación de curvas algebraicas. En poco tiempo, empezó a escribir sus propios tratados sobre un amplio número de materias: a lo largo de su vida, Wallis realizó contribuciones significativas a la trigonometría, el cálculo, la geometría y el análisis de las series infinitas. Al margen de trabajos en matemáticas, también escribió sobre teología, lógica, gramática inglesa y filosofía.

Fuente: Wikipedia

NOCIONES PRELIMINARES

Dada una función f(x) si deseamos hallar el valor de ésta para $x = x_0$ se representa: $F(x_0)$

Ejemplo:

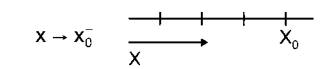
$F(x) = x^2 + 1$, calcular: F(3); F(4); F(7).

Resolución:

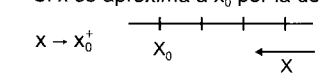
$F(3) = 3^2 + 1 = 10$
$F(4) = 4^2 + 1 = 17$
$F(7) = 7^2 + 1 = 50$

Si una determinada variable, por ejemplo x, se aproxima a un número dado, por ejemplo 3, se representa: $x \Rightarrow 3$ y se lee, x se aproxima a 3 o x tiende a 3.
Hay dos formas de aproximarse a un número dado, por la izquierda o por la derecha.

Si x se aproxima a x_0 por la izquierda se representa:



Si x se aproxima a x_0 por la derecha se representa:



Ejemplo:

$x \to 3$: significa que x toma valores cercanos a 3, pero no llega a tomar el valor 3.
$x \to 3^-$: significa que x toma valores cercanos a 3, por la izquierda, es decir, x puede ser:
2, 8 ; 2, 9 ; 2, 99 ; 2, 999; 2, 9999; ...
$x \to 3^+$. significa que x toma valores cercanos a 3, por la derecha, es decir, x puede ser:
3,2 ; 3,1; 3,01; 3, 001 ; 3, 0001; ...
(Observar que cuando $x \Rightarrow 3^-$, entonces $x < 3$ y si $x \to 3^+$, entonces $x > 3$)

IDEA DE LÍMITE

El límite de una función F(x) es el valor hacia el cual ésta se aproxima cuando la variable tiende a un valor dado.
Matemáticamente se representa:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se lee: "límite de F(x) cuando x tiende a x_0"

Ejemplo:

Si: $F(x) = x + 1$, calcular: $\lim\limits_{x \to x_3} F(x)$

Resolución:

Para ilustrar la idea de límite analizaremos detenidamente este ejemplo:

1.° Analizamos cuando x se aproxima a 3 por la izquierda.

x	2,8	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999
F(x)	3,8	3,9	3,99	3,999	3,9999	3,99999

2.° Analizamos cuando x se aproxima a 3 por la derecha.

x	3,2	3,01	3,001	3,0001	3,00001	3,000001
F(x)	4,2	4,1	4,001	4,0001	4,00001	4,000001

En ambos casos observamos que cuando x se aproxima a 3 (ya sea por la izquierda o derecha), F(x) se aproxima a 4.
Se dice entonces que 4 es el límite, de F(x) cuando x tiende a 3.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

Observaciones

- El límite de F(x) cuando x tiende a x_0 por la izquierda se representa.
$$\lim_{x \to x_0^-} F(x)$$
- El límite de F(x) cuando x tiende a x_0 por la derecha se representa:
$$\lim_{x \to x_0^+} F(x)$$
A estos límites se les denomina "límites laterales".
- El límite de F(x) existe si y solo si los límites laterales son iguales.
Es decir:
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} F(x)\ \exists \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)}$$

Aplicaciones:

1. • Si $\lim\limits_{x \to 3} F(x) = 4$, significa que:
$\lim\limits_{x \to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 3} F(x) = 4$
• Si $\lim\limits_{x \to 5^-} G(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} G(x) = 20$
entonces $\lim\limits_{x \to 5^-} G(x) = 20$
• Si $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = 4$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} F(x) \quad \nexists$

Una función F(x) es continua en x_0 si y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:
• $F(x_0)$ existe
• $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$; existe
• $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

2. Si: $F(x) = 5x + 3$, hallar $\lim\limits_{x \to 7} F(x)$.

Resolución:

Observar que f(x) es continua para x = 7, entonces se cumple:

$\lim\limits_{x \to 7} (5x + 3) = F(7) = 5(7) + 3 = 38$

3. Evaluar los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -8} \left(\frac{x-2}{x+3}\right) = \frac{-8-2}{-8+3} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$\lim_{x \to 4} (x^3 + 1) = (4)^3 + 1 = 65$$

En caso que f(x) no sea continua para $x = x_0$, entonces a partir de la función dada hallamos una función g(x) equivalente a f(x), pero continua en $x = x_0$.

Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} G(x) = G(x_0)$$

4. Si: $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, hallar: $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$.

Resolución:

Observamos que f(1) no existe (al reemplazar se obtiene 0/0 que es una forma indeterminada). Buscamos una función g(x) equivalente a f(x).

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1 = G(x)$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} G(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Límites usuales

- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{k}{x}\right) = \infty;\ k \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{k}{x}\right) = 0;\ k \in \mathbb{R}$

Nota

Existen muchas otras propiedades y teoremas sobre límite que exceden al ámbito de este libro, que solo pretende dar una idea de lo que es un límite.

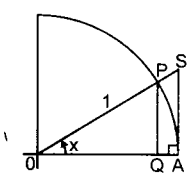
(Para mayor información sobre límites, consulte libros de análisis matemático.

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \cos x = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1}$$

Ejemplo:



Demostrar: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$

- Consideramos del CT adjunto que: $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
- Observar que la longitud del arco AP es mayor que QP y menor que AS, entonces:
  $QP \leq L_{\widehat{AP}} \leq AS$

$$\left.\begin{array}{l} QP = \operatorname{sen} x \\ AS = \tan x \\ L_{\widehat{AP}} = x \end{array}\right\} \operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x$$

- Dividimos a la desigualdad por senx y se obtiene:
  $1 \leq \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$
- Tomando el límite:
  $\lim\limits_{x \to 0} 1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right) \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$
  $1 \leq \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right) \leq 1$
- Por el teorema de Estricción (matemática superior), comúnmente llamado teorema del Sándwich, se concluye que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$$

Nota

Cuando se trabaja con este tipo de límites, debemos verificar que la expresión que está en el denominador sea igual a la que está afectada del operador "sen", además dicha expresión debe tender a cero.

Ejemplos:

1. Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}$

Resolución:

$\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}$ son iguales $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = 1$

2. Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{x}$

Resolución:

Cuando reemplazamos x = 0, nos queda $\dfrac{\operatorname{sen} 0}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminado)

Pero:

$\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{x}$ no son iguales $\Rightarrow$ En este caso se multiplica y se divide por 7.

luego:

$$\lim_{x \to 0} \frac{7\operatorname{sen} 7x}{7x} = 7 \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}}_{1} = 7(1) = 7$$

3. Calcular: $E = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{x}$

Resolución:

Este ejemplo es semejante al anterior, pero ahora lo resolvemos de otra forma.

Hacemos un cambio de variable, es decir:

Sea: $8x = h \Rightarrow$ si $x \to 0$, también se cumple que $h \to 0$

Luego reemplazamos en la expresión dada:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{\frac{h}{8}} = \lim_{h \to 0} \frac{8\operatorname{sen} h}{h} = 8 \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$\therefore\ E = 8(1) = 8$

Nota

Observar que ahora usted puede resolver de dos formas este tipo de límites..

4. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}5x}{3x}$

Resolución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}5x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}5x}{x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}5x}{5x}=\frac{5}{3}$$

5. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{x}$

Resolución:

Sea: $\frac{x}{3}=h$; si $x\to 0 \Rightarrow h\to 0$, luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{3h}=\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{h}}_{1}=\frac{1}{3}$$

6. Calcular: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\text{sen}(x-7)}{x-7}$

Resolución:

Sea: $x-7=h$, si $x\to 7 \Rightarrow h\to 0$, luego:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\text{sen}(x-7)}{(x-7)}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{h}=1$$

7. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1}$.

Resolución:

Observar que al reemplazar $x=1$ nos queda:

$$\frac{\text{sen}0}{0}=\frac{0}{0}(\text{IND})$$

Sea: $x-1=y$; si $x\to 1 \Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}y}{(y+2)y}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{1}{y+2}\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}y}{y}=\left(\frac{1}{0+2}\right)(1)=\frac{1}{2}$$

8. Calcular: $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\text{sen}x}{\pi-x}$

Resolución:

Sea: $h=\pi-x$, si $x\to\pi \Rightarrow h\to 0$.

Además: $x=\pi-h$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}x}{\pi-x}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(\pi-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{h}=1$$

9. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}5x}{\text{sen}7x}$

Resolución:

Cuando reemplazamos:

$$x=0\to\frac{\text{sen}5(0)}{\text{sen}7(0)}=\frac{\text{sen}(0)}{\text{sen}(0)}=\frac{0}{0}\ (\text{IND})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}5x}{\text{sen}7x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}5x}{x}\right)\left(\frac{x}{\text{sen}7x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\text{sen}5x}{5x}\right)\left(\frac{7x}{7\text{sen}7x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\text{sen}5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{7x}{7\text{sen}7x}=5\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}5x}{5x}}_{1}\frac{1}{7}\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{7x}{\text{sen}7x}}_{1}=\frac{5}{7}$$

10. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

Resolución:

Observar que al reemplazar $x=0$, entonces:

$$\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\ (\text{IND})$$

Además:

$1-\cos 2x=2\text{sen}^2x$ (identidad de ángulo doble)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\text{sen}^2x}{x^2}=2\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}\right)^2}_{1}=2$$

11. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$

Resolución:

Observar que: si $x=0 \Rightarrow \dfrac{\tan 0}{0}=\dfrac{0}{0}(\text{IND})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan 2x}{2x}=2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}}_{1}=2$$

12. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2x-1}{x^2}$

Resolución:

Observar que si:

$$x=0 \Rightarrow \frac{\sec^2 0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}(\text{IND})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{x^2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)^2=1$$

Nota

Existen otros problemas sobre límites en los cuales intervienen funciones trigonométricas pero no es necesario aplicar los límites dados anteriormente, más bien lo que se necesita es recordar las identidades ángulo doble, triple, mitad, transformación a producto, etc.

Ejemplos:

1. Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\text{sen}x}{1-\tan x}$

Resolución:

Reemplazamos $x=\dfrac{1}{4}$

$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\text{sen}\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-1}=\frac{0}{0}\ (\text{IND})$$

Tenemos que levantar la indeterminación, analizamos toda la expresión.

$$\frac{\cos x-\text{sen}x}{1-\tan x}=\frac{\cos x-\text{sen}x}{1-\frac{\text{sen}x}{\cos x}}=\frac{(\cos x-\text{sen}x)}{\frac{(\cos x-\text{sen}x)}{\cos x}}=\cos x$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x-\text{sen}x}{1-\tan x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\text{sen}5x-\text{sen}3x}$

Resolución:

Reemplazamos:

$x = 0;\ \dfrac{\cos 0 - \cos 0}{\text{sen}0 - \text{sen}0} = \dfrac{1-1}{0-0}$ (IND)

Entonces recordemos transformación a producto:

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\text{sen}5x - \text{sen}3x} = \frac{2\text{sen}x\text{sen}4x}{2\cos 4x\text{sen}x} = \tan 4x$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\text{sen}5x - \text{sen}3x} = \lim_{x\to 0}\tan 4x = \tan 0 = 0$$

3. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x}{\text{sen}3x - 2\text{sen}x}$

Resolución:

Reemplazamos $x = \dfrac{\pi}{6}$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\text{sen}\frac{\pi}{2} - 2\text{sen}\frac{\pi}{6}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}\ \text{(IND)}$$

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)\\ \text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos 2x + 1)\end{array}\right\}\ \text{Identidades del ángulo triple}$$

Entonces:

$$\frac{\cos 3x}{\text{sen}3x - 2\text{sen}x} = \frac{\cos x(2\cos 2x - 1)}{\text{sen}x(2\cos 2x + 1) - (2\text{sen}x)} = \frac{\cos x(2\cos 2x - 1)}{\text{sen}x(2\cos 2x - 1)}$$

Luego:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x}{\text{sen}3x - 2\text{sen}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cot x = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

4. Calcular los límites indicados:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\tan x}$

Resolución:

En todos los ejemplos planteados al reemplazar el valor de x se ha obtenido la forma indeterminada $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Este ejemplo analiza otros casos:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = (1)(\infty) = \infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)(0) = 0$

Estos casos están contemplados en la observación que denominamos límites usuales.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\tan x} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5. Calcular:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{7\tan^2 x + 5\tan x + 3}{3\tan^2 x + 4}$$

Resolución:

Observar que cuando $x - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x \to \infty$

Luego:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{7\tan^2 x + 5\tan x + 3}{3\tan^2 x + 4} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{7 + \frac{5}{\tan x} + \frac{3}{\tan^2 x}}{3 + \frac{4}{\tan^2 x}} = \frac{7+0+0}{3+0} = \frac{7}{3}$$

6. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{4\text{sen}^2 x - 1}{2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}x + 1}$

Resolución:

Al hacer $x = \dfrac{\pi}{6}$ nos queda $\dfrac{0}{0}$ (IND)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{4\text{sen}^2 x - 1}{2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}x + 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\text{sen}x - 1)(2\text{sen}x + 1)}{(2\text{sen}x - 1)(\text{sen}x - 1)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\text{sen}x + 1}{\text{sen}x - 1} = \frac{2\text{sen}\frac{\pi}{6} + 1}{\text{sen}\frac{\pi}{6} - 1} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -4$$

Nota

En algunos casos de límites es muy frecuente tener presente las siguientes relaciones:

Si: $\displaystyle\lim_{x\to 0}F(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}|F(x)| \cong F(x)$

Si: $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x) = 0 \Rightarrow \tan|g(x)| \cong g(x)$

Ejemplos:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\text{sen}ax - n\text{sen}bx}{\tan ax - \tan bx}$

Resolución:

Observamos que si reemplazamos $x = 0$ se obtiene la forma indeterminada $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; entonces:

$$\lim_{x\to 0}ax = 0\ \begin{cases}\text{sen}ax \cong ax\\ \tan ax \cong ax\end{cases}\quad \lim_{x\to 0}bx = 0\ \begin{cases}\text{sen}bx \cong bx\\ \tan bx \cong bx\end{cases}$$

Reemplazando en la expresión inicial se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(ax) - b(bx)}{ax + bx} = \lim_{x\to 0}\frac{(a^2 - b^2)x}{(a+b)x} = \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$$

2. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\cos x)}{\text{sen}^4 x}$

Resolución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\cos x)}{\text{sen}^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(2\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)}{\text{sen}^4 x}\ldots(\text{I})$$

Como: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \text{sen}\frac{x}{2} \cong \frac{x}{2} \Rightarrow \text{sen}^2\frac{x}{2} \cong \frac{x^2}{4}$

Como: $\displaystyle\lim_{x\to 0}x = 0 \Rightarrow \text{sen}x \cong x \Rightarrow \text{sen}^4 x \cong x^4$

Reemplazando en (I) se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(2\frac{x^2}{4}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

3. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arctan\frac{x}{2}}{\cos x(\text{sen}2x)^2}$

Resolución:

Como: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \arctan\frac{x}{2} \cong \frac{x}{2}$

Como: $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \Rightarrow \text{sen}2x \cong 2x \Rightarrow \text{sen}^2 2x = 4x^2$

Reemplazando en la expresión inicial:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos x(4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{8\cos 0} = \frac{1}{8\cos 0} = \frac{1}{8}$$

Nota

Es muy frecuente también (para valores "pequeños" de x) hacer las siguientes aproximaciones:

$\boxed{\text{sen}x = x - \frac{x^3}{6}}$ $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}}$ $\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3}}$

Ejemplos:

1. Calcular: $E = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}x - x}{x^3}$

Resolución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

2. Calcular: $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\pi\sec\frac{x}{2} - x\tan\frac{x}{2}\right)$

Resolución:

$$\lim_{x\to \pi} \left(\pi\sec\frac{x}{2} - x\tan\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to \pi} \left(\frac{\pi - x\text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)$$

Para facilidad hacemos el siguiente cambio de variable: $\theta = x/2 \Rightarrow x = 2\theta$, observar que si $x \to \pi$ entonces $\theta \to \pi/2$, reemplazando obtenemos:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi - 2\theta\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$$

Sea: $\theta = \pi/2 - \alpha \Rightarrow \alpha = \pi/2 - \theta$ observar que cuando $\theta \to \pi/2$; entonces $\alpha \to 0$, reemplazando:

$$\lim_{\alpha\to 0} \left[\frac{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}\right]$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \left[\frac{\pi - (\pi - 2\alpha)\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \wedge \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\ ;\ (\alpha \to 0)$$

Reemplazando:

$$\lim_{\alpha\to 0} \left[\frac{\pi - (\pi - 2\alpha)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}\right]$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \left[\frac{\pi - \left(\pi - 2\alpha - \frac{\pi\alpha^2}{2} + \alpha^3\right)}{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}\right]$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{2\alpha + \frac{\pi\alpha^2}{2} - \alpha^3}{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}\right) = \lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{2 + \frac{\pi\alpha}{2} - \alpha^2}{1 - \frac{\alpha^2}{6}}\right)$$

$$= \left(\frac{2 + \frac{\pi(0)}{2} - (0)^2}{1 - \frac{(0)^2}{6}}\right) = 2 \qquad \therefore\ E = 2$$

3. Calcular aproximadamente el valor de x, si $\dfrac{\text{sen}x}{x} = \dfrac{5045}{5046}$

Resolución:

$$\frac{\text{sen}x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6}}{x} = \frac{5045}{5046}$$

(Esto se puede hacer sólo cuando el valor es muy pequeño)

$$1 - \frac{x^2}{6} = \frac{5045}{5046} \Rightarrow \frac{x^2}{6} = \frac{1}{5046} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{841} \to x = \frac{1}{29}$$

4. Calcular aproximadamente el valor de x, si: $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,71$

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$

Como $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,71...$

Comparando con el valor anterior, resulta que son aproximados, esto implica que x sea un valor bien pequeño, por lo tanto:

$$\text{sen}x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\text{sen}\frac{\pi}{4} = 0,71$$

como x es pequeño, entonces: $\text{sen}x \cong x$ y $\cos x \cong 1$

Luego:

$$x\cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\frac{\pi}{4} = 0,71 \Rightarrow x(0,7071) = 0,71 - 0,7071$$

$$x = \frac{0,00029}{0,7071} \Rightarrow x \cong 0,0041 \text{ (aproximado)}$$

Nota

Para valores pequeños de h(h " 0) se cumple que:

$\boxed{\text{sen}(x + h) = \text{sen}x + h\cos x}$

$\boxed{\cos(x + h) = \cos x - h\text{sen}x}$

Ejemplos:

1. Calcular $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$, si $\theta = 0,005$ rad.

Resolución:

Como $\theta = 0,005$ (valor muy pequeño); entonces podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{6} - \theta\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

Reemplazando el valor θ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}005\left(\frac{1}{2}\right)$$

Luego: $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) = 0{,}8635$ (aproximado)

2. Calcular aproximadamente el valor de sen45°30':

Resolución:

Observamos que sen45°30' = sen(45° + 30')

Convertimos el ángulo a radianes:

$45° = \frac{\pi}{4}$ y $30' = \frac{\pi}{360}$ rad

Luego:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{360}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}7132$$

$\therefore$ sen 45°30' = 0,7132 (aproximado)

Nota

Otras relaciones que nos permite calcular con gran aproximación el valor de la tangente de los ángulos agudos es la siguiente:

$$\tan \pi x \cong \frac{2x}{1-2x}\sqrt{\frac{5-6x}{2+2x}} \qquad \tan \alpha° \cong \frac{\alpha}{90-\alpha}\sqrt{\frac{150-\alpha}{60+\alpha}}$$

Estas relaciones se pueden aplicar si x ! [0; 1/2] o α ! [0; 90]; el error en el cálculo es del orden de las milésimas y en algunos casos se obtiene valores exactos.

- $$\tan\frac{\pi}{6} = \tan\pi\left(\frac{1}{6}\right) \cong \frac{2\left(\frac{1}{6}\right)}{1-2\left(\frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{5-6\left(\frac{1}{6}\right)}{2+6\left(\frac{1}{6}\right)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
- $$\tan 60° = \frac{60}{90-60}\sqrt{\frac{150-60}{60+60}} = 2\sqrt{\frac{90}{120}} = 2\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$$
- $$\tan 15° = \frac{15}{90-15}\sqrt{\frac{150-15}{60+15}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{9}{5}} = 0{,}26832$$

LA SINUSOIDE

Un problema muy interesante es el de calcular el área encerrada por la curva y = senx con el eje de abscisas en un semi período, por facilidad se escoge [0; π].

(Notar en la figura adjunta que debido a la simetría de la curva, si escogemos el intervalo [π; 2π] el área encerrada por la curva con el eje de abscisas es la misma que Ax).

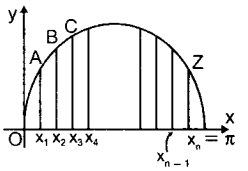
Este problema se resuelve muy fácilmente por integración (método que se estudia en cursos de matemáticas superiores), como es lógico no utilizaremos este método porque escapa del nivel elemental que tiene este libro.

Para resolver este problema procederemos de la siguiente manera:

Se divide:

1.° Al segmento limitado por 0 y π en "n" partes iguales, por lo tanto cada segmento tendrá una longitud igual a π/n, y sus extremos las denominantes: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ($x_n = \pi$).

2.° Por cada uno de estos puntos se levantan perpendiculares hasta intersectar a la curva y formamos rectángulos (como muestra la figura adjunta). Observar que la longitud de cada una de estas perpendiculares es:



$$Ax_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad Bx_2 = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$Cx_3 = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right), \quad Zx_{n-1} = \text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}$$

3.° Calculamos el área de cada rectángulo y luego sumamos todas ellas. (no olvidar que la base de todos los rectángulos es igual a π/n)

$$S = \frac{\pi}{n}(Ax_1) = \frac{\pi}{n}(Bx_2) + \frac{\pi}{n}(Cx_3) + \ldots + \frac{\pi}{n}(Zx_{n-1})$$

$$S = \frac{\pi}{n}[\underset{\text{sen}\frac{\pi}{n}}{\underset{\downarrow}{Ax_1}} + \underset{\text{sen}\frac{2\pi}{n}}{\underset{\downarrow}{Bx_2}} + \underset{\text{sen}\frac{3\pi}{n}}{\underset{\downarrow}{Cx_3}} + \ldots + \underset{\text{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}}{\underset{\downarrow}{Zx_{n-1}}}]$$

$$S = \frac{\pi}{n}\left[\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{3\pi}{n} + \ldots + \text{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}\right] \quad \ldots(I)$$

La expresión entre corchetes es una serie trigonométrica conocida, recordar:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{sen}kx = \frac{\text{sen}\frac{nx}{2}\text{sen}\frac{(n-1)(x)}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}}$$

Para nuestro problema $x = \frac{\pi}{n}$, simplificando la expresión (I) obtenemos:

$$S = \frac{\pi}{n}\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}(n-1)\frac{\pi}{2n}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\pi}{n}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4.° Observar en la figura que en los rectángulos formados hay unas pequeñas regiones sombreadas, estas evidentemente originan un exceso en el cálculo del área de nuestro problema, pero también debe observar que a medida que vamos aumentamos el valor de **n** los rectángulos se hacen cada vez más delgados y esto hace que el exceso sea cada vez más pequeño; por lo tanto cuando **n** sea una cantidad inconmensurable

($n \to \infty$) el exceso disminuye hasta llegar a cero.

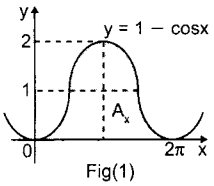
Conclusión: si A_x es el área solicitada, entonces:

$$A_x = \lim_{x\to\infty} S$$

$$A_x = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{n}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\pi}{2n}}_{1}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$A_x = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \Rightarrow A_x = 2$$

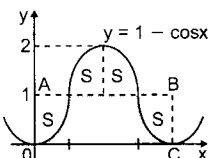
Por ejemplo, queremos hallar el área encerrada por la curva $y = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ con el eje de abscisas en $[0, 2\pi]$, he elegido esta función ya que utilizando las fórmulas de ángulo doble llegamos a que:



Fig(1)

$$y = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$$

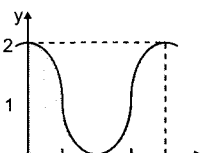
Denominamos como A_x el área solicitada, (fig. 1) debido a la simetría de la curva, hay algunas regiones como muestra la fig (2) que tienen igual área (debido a la observación (1) podemos afirmar que S = 1).



Fig(2)

Analizando la fig(2) podemos observar que el área del rectángulo OABC es igual a A_x por lo tanto:

$A_x = (2\pi)(1) = 2\pi$



Fig(3)

Algo similar ocurre con la curva de la función:

$$y = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$$

su gráfica se muestra en la fig.(3) el área de la región sombreada es igual a 2π.

En general podemos decir que el área de la región encerrada por las curvas de la forma:

$y = A\operatorname{sen}^2 kx$ o $y A\cos^2 kx$, con el eje de abscisas en $\left[0;\frac{\pi}{k}\right]$ (o en un intervalo de longitud $\frac{\pi}{k}$ es igual a $\frac{A\pi}{2k}$).

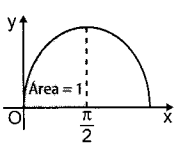
Por ejemplo, el área que encierra la curva:

$y = 3\operatorname{sen}^2 5x$ con el eje de abscisas en $\left[0;\frac{\pi}{5}\right]$, es igual a: $\frac{3\pi}{10}$.

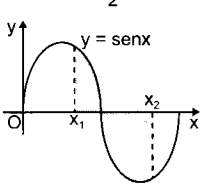
Por ejemplo, el área que encierra la curva de la función $y = 3\cos^2(x)$ en $[0, \pi]$, es igual a $\frac{3\pi}{10}$.

Conclusiones:

1.° Debido a la simetría de la curva $y = \operatorname{sen}x$ el área encerrada por ésta con el eje de abscisas en $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ es igual a 1.



2.° Debido a la periodicidad de la función: $y = \operatorname{sen}x$, y a la simetría de la curva, podemos afirmar que si elegimos dos puntos de su dominio x_1 y x_2, tal que $|x_1 - x_2| = \pi$



(semiperíodo), entonces el área encerrada por esa porción de curva y el eje de abscisas es igual a 2. Por ejemplo en la figura adjunta, si:

$x_1 = \frac{3\pi}{7}$ y $x_2 = \frac{10\pi}{7}$, observamos que $|x_1 - x_2| = \pi$

Por lo tanto el área de la región sombreada es igual a 2.

3.° En general podemos decir que el área de la región encerrada por la curva: $y = A\operatorname{sen}kx$ con el eje de abscisas en $\left[0;\frac{\pi}{k}\right]$ (o en un intervalo de longitud $\frac{\pi}{k}$) es igual a $\frac{2A}{k}$.

Por ejemplo:

El área que encierra la curva $y = 7\operatorname{sen}3x$ en $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ es igual a $\frac{2(7)}{3} = \frac{14}{3}$.

Nota

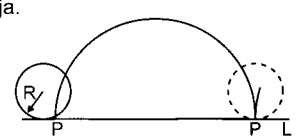
Un análisis similar se puede hacer con la función $y = \cos x$, pero si usted se da cuenta la curva de esta función es igual a la curva de la función $y = \operatorname{sen}x$ solamente que está desfasada $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda.

4.° Todas las curvas trigonométricas tienen cierta simetría, por las aplicaciones que tienen se estudian más las curvas sinusoidales. Un caso muy interesante es el de calcular el área de la región encerrada por las curvas de la forma: $y = A\operatorname{sen}^2 kx$ o $y = A\cos^2 kx$, con el eje de abscisas en $\left[0;\frac{\pi}{k}\right]$, (Observar que $\frac{\pi}{k}$ es el período de la función).

Para resolver este caso no emplearemos el método de integración, ni siquiera el concepto de límite, solamente usaremos la simetría de la curva. Partiremos de un caso simple para una vez captada la idea, poder generalizar.

LA CICLOIDE

Es el lugar geométrico descrito por cualquier punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta fija.



En la figura se tiene una circunferencia de radio R sobre una recta L, sea P el punto fijo, que en este caso es también el punto de contacto; cuando la circunferencia da una vuelta, el punto P describe una curva, a la cual denominamos un arco de cicloide.

Nuestro problema consiste en hallar la longitud de este arco y el área que éste encierra con la recta L.

Para resolver este problema tenemos que recordar que es un polígono regular y algunas de sus propiedades.

Por ejemplo en la figura adjunta, sea R el circunradio

del polígono regular; si unimos un vértice con los otros vértices y denominamos a cada segmento con d_k(k = 1, 2, 3, ..., n − 1) (incluyendo los vértices consecutivos) entonces la longitud de cada segmento está dado por la fórmula: $d_k = 2R\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, k = 1, 2, 3 ..., n − 1

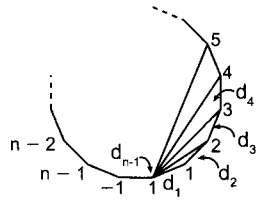
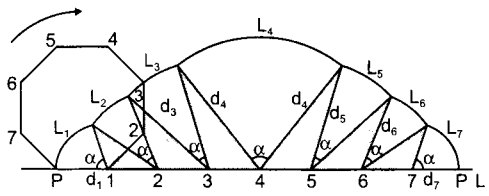


Fig. (4)

Consideramos que tenemos un polígono regular de n lados, descansando uno de sus lados sobre la recta L(en la figura adjunta se ha considerado un octógono regular, solamente para dar una idea de lo que se pretende hacer, pero se supone que usted debe imaginar lo que sucedería en el caso de tener un polígono regular de n lados), si hacemos rodar el polígono una vuelta completa podemos observar que se forman (n − 1) sectores circulares cuyo centro se indica con los números 1, 2, ... n − 1 sobre la recta L, los ángulos centrales son todos iguales a $2\pi/n(=\alpha)$ y el radio de cada sector es igual a d_k (k = 1, 2, 3, .. n −1).



Fig(5)

Podemos observar que la curva que describe el punto P se puede expresar como una suma de (n − 1) arcos cuya longitud es fácil de hallar.

$L_P = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_{n-1}$

$$L_P = \frac{2\pi}{n}d_1 + \frac{2\pi}{n}d_2 + \frac{2\pi}{n}d_3 + ... + \frac{2\pi}{n}d_{n-1}$$

$$L_P = \frac{2\pi}{n}(d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_{n-1})$$

Como: $d_k = 2R\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, entonces:

$$L_P = \frac{2\pi}{n}\left[2R\text{sen}\frac{\pi}{n} + 2R\text{sen}\frac{2\pi}{n} + 2R\text{sen}\frac{3\pi}{n} + ... + 2R\text{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

$$L_P = 4R\frac{\pi}{n}\left[\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{3\pi}{n} + ... + \text{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

$$L_P = 4R\frac{\pi}{n}\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}(n-1)\frac{\pi}{2n}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 4R\frac{\pi}{n}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Hasta ahora lo que hemos hallado es la longitud de la curva que describe el punto P para un polígono regular de n lados, ahora pensemos en que el número de lados del polígono se hace cada vez mayor, esto implicaría que el polígono regular cada vez se aproxime a una circunferencia, lo que a su vez implica que la curva que describe el punto P al aumentar el número de lados del polígono se aproxima, más aun arco de cicloide.

Conclusión: Si L es la longitud del arco de cicloide, entonces:

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} L_P}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} 4R\frac{\pi}{n}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 4R\underbrace{\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}_{1}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$L = (4R)2\underbrace{L\,m_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}_{1} \Rightarrow L = 8R$$

Cálculo del área, en la figura 5 observamos que hay (n −1) sectores circulares y (n − 2) triángulos, el área encerrada por esta curva con la recta L es igual a la suma de las áreas de estos sectores (A_s) más la suma de las áreas de todos los triángulos (A_t).

Observar que la suma de las áreas de todos los triángulos es igual al área del polígono regular (esto es fácil de demostrar comparando la fig.4 con la fig. 5), entonces:

$$A_1 = \frac{nR^2}{2}\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad ...(I)$$

Sea A_s la suma de las áreas de todos los sectores circulares.

$$A_S = \frac{\pi}{n}\left[d_1^2 + \frac{\pi}{n}d_3^2 + \frac{\pi}{n}d_3^2 + ... + d^2_{n-1}\right]$$

$$A_s = \frac{\pi}{n}[d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2 + ... + d^2_{n-1}]$$

Como $d_k = 2R\,\text{sen}\frac{k\pi}{n}$, entonces:

$$A_S = \frac{\pi}{n}\left[4R^2\text{sen}^2\frac{\pi}{n} + 4R^2\text{sen}^2\frac{2\pi}{n} + 4R^2\text{sen}^2\frac{3\pi}{n} + ... + 4R^2\text{sen}^2(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

$$A_S = 2R^2\frac{\pi}{n}\left[2\text{sen}^2\frac{\pi}{n} + 2\text{sen}^2\frac{2\pi}{n} + 2\text{sen}^2\frac{3\pi}{n} + ... + 2\text{sen}^2(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

$$A_S = 2R^2\frac{\pi}{n}\left[1 - \cos\frac{2\pi}{n} + 1 - \cos\frac{4\pi}{n} + 1 - \cos\frac{6\pi}{n} + ... + 1 - \cos 2(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

$$A_S = 2R^2\frac{\pi}{n}\left[n - 1 - \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + ... + \cos 2(n-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Recordar:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx = \frac{\cos\frac{nx}{2}\text{sen}(n-1)\frac{x}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}}$$

Para nuestro problema: $x = \frac{2\pi}{n}$, entonces:

$$A_S = 2R^2\frac{\pi}{n}\left[n - 1 - \frac{\cos\pi \operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right]$$

$$A_S = 2R^2\frac{\pi}{n}\left[n - 1 + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\right] \Rightarrow A_S = 2\pi R^2 \ldots (II)$$

El área total bajo la curva que describe el punto P es:

$$\boxed{A_P = A_t + A_S = \frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi R^2}$$

Ahora pensemos que cuando el número de lados del Polígono regular aumenta entonces, dicho polígono se aproxima a una circunferencia; por lo tanto la curva que describe el punto P se aproxima a un arco de cicloide. Conclusión sea Ac el área que el arco de cicloide encierra con la recta L, entonces:

$$\boxed{A_c = \lim_{x\to\infty} A_P}$$

$$A_C = \lim_{x\to 0}\left[\frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + s\pi R^2\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi R^2$$

$$A_C = \pi R^2 \underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right]}_{1} + 2\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi R^2$$

$$\boxed{Ac = 3\pi R^2}$$

Ejemplos:

Calcular el límite indicado en cada uno de los siguientes ejercicios. (Verificar la indeterminación en cada caso).

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Resolución:

Al reemplazar $x = -\frac{\pi}{4}$ se obtiene $\frac{0}{0}$ (IND)

Pero:

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \sqrt{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Luego:

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}(\cos x - \operatorname{sen} x) =$$

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

Resolución:

$$f(x) = \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$$

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)\cos x} = \frac{1}{(1 + \cos x)\cos x}$$

$$\lim_{x\to 2\pi} f(x) = \lim_{x\to 2\pi} = \frac{1}{(1 + \cos x)\cos x}$$

$$\lim_{x\to 2\pi} f(x) = \frac{1}{(1 + \cos 2\pi)\cos 2\pi} = \frac{1}{2}$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x - x\cos x}$

Resolución:

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x - x\cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$$

$$F(x) = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$$

$$F(x) = \frac{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}(1 + \cos x)}_{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} = 2$$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

Resolución:

$$F(x) = \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)}{x^3(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x}{x^3(1 + \cos x)}$$

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3(1 + \cos x)}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3(1 + \cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3}_{1}\left(\frac{1}{1 + \cos 0}\right) = \frac{1}{2}$$

5. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{vers} 3\theta}{\operatorname{vers}\theta}$

Resolución:

$$F(\theta) = \frac{\operatorname{vers} 3\theta}{\operatorname{vers}\theta} = \frac{1 - \cos 3\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{3\theta}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$F(\theta) = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}(2\cos\theta + 1)^2}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} = (2\cos\theta + 1)^2$$

Luego:

$$\lim_{\theta\to 0} F(\theta) = \lim_{\theta\to 0}(2\cos\theta + 1)^2 = (2\cos 0 + 1)^2 = 9$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{5\pi}{x}\right)$

Resolución:

Hacemos cambio de variable:

$\theta = \frac{1}{x}$; si $x \to \infty \Rightarrow \theta \to 0$

Luego:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{5\pi}{x}\right) = \lim_{x\to\theta}\left(\frac{1}{\theta}\operatorname{sen}5\pi\theta\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}5\pi\theta}{\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{5\pi\operatorname{sen}5\pi\theta}{5\pi\theta} = 5\pi\underbrace{\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}5\pi\theta}{5\pi\theta}\right)}_{1} = 5\pi$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(2\cot 2x - \cot x)$

Resolución:

$F(x) = 2\cot 2x - \cot x = \cot x - \tan x - \cot x = -\tan x$

$\lim\limits_{x\to 0}F(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-\tan x) = 0$

8. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$

Resolución:

Sea: $F(\theta) = \frac{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)+\operatorname{sen}\theta}{(1-\cos\theta)-\operatorname{sen}\theta}$

$$F(\theta) = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}+2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}-2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$F(\theta) = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\lim_{\theta\to 0}F(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}0+\cos 0}{\operatorname{sen}0-\cos 0}$$

$$\lim_{\theta\to 0}F(\theta) = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x-1}\right)$

Resolución:

Sea:

$$F(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x-1} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}\right)$$

$$F(x) = \frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{3-x})^2}{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}$$

$$F(x) = \frac{1+x-3+x}{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}$$

$$F(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{arcsen}[F(x)] = \lim_{x\to 1}\operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$$

$$= \operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{3-1}} = \operatorname{arcsen}\frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}7x}{x-\operatorname{sen}5x}$

Resolución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}7x}{x-\operatorname{sen}5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{\operatorname{sen}7x}{x}}{1-\frac{\operatorname{sen}5x}{x}}\right) = \frac{1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{x}}{1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{x}}$$

$$= \frac{1-7\operatorname{Lím}\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{7x}}{1-5\operatorname{Lím}\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}} = \frac{1-7(1)}{1-5(1)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x\sqrt{1-\cos x}}{x\operatorname{sen}2x}$

Resolución:

$$F(x) = \frac{x\operatorname{sen}x\sqrt{1-\cos x}}{x\operatorname{sen}2x} = \frac{x\operatorname{sen}x\sqrt{1-\cos x}}{x(2\operatorname{sen}x\cos x)}$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x\cos x}$$

Multiplicamos y dividimos por: $\sqrt{1+\cos x}$

$$F(x) = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x\cos x}\left(\frac{\sqrt{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{2x\cos x\sqrt{1+\cos x}} = \frac{\operatorname{sen}x}{2x\cos x\sqrt{1+\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2x\cos x\sqrt{1+\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0}F(x) = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}_{1}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x\sqrt{1+\cos x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x\sqrt{1+\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos 0\sqrt{1+\cos 0}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

12. $E = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x\sqrt{\csc x-\cot x}-x\sqrt{x}}{x\sqrt{\tan x}}\right)$

Resolución:

Calculamos dicho límite separadamente:

$$E = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x\sqrt{\csc x-\cot x}}{x\sqrt{\tan x}}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{\tan x}}\right)$$

$$E = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}_{1}\left(\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\csc x-\cot x}{\tan x}}\right) - \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)}_{1}$$

Reemplazando los valores indicados, nos queda:

$$E = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\csc x-\cot x}{\tan x}} - 1 = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{(1-\cos x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} - 1$$

$$E = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{(1-\cos x)\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} - 1 = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\cos x}{1+\cos x}} - 1$$

$$E = \sqrt{\frac{\cos 0}{1+\cos 0}} - 1 \Rightarrow E = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

DERIVADAS DE FUNCIONES

La derivada de una función y = F(x), que se denota: F'(x), es:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(x)\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \text{ si este límite existe}$$

Definiciones:

- La derivada de una función y = F(x), también se representa así: y'; F'(x); $\frac{dy}{dx}$; $D_x y$; $\frac{dF(x)}{dx}$
- Si una función se deriva más de una vez, se les denomina derivada de orden superior.

  Segunda derivada: y''; F''(x); $\frac{d^2y}{dx^2}$; $D^2_x y$; $\frac{d^2F(x)}{dx^2}$

  Tercera derivada: y'''; F'''(x); $\frac{d^3y}{dx^3}$; $D^3_x y$; $\frac{d^3F(x)}{dx^3}$

  y así sucesivamente.

- Otra manera de expresar la definición de derivada es: $F'(x) = \lim_{x\to h}\frac{F(x)-F(h)}{x-h}$

Ejemplo:

Calcular la derivada de: F(x) = senx.

Resolución:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}x\cosh + \cos x\text{sen}h - \text{sen}x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}x(\cosh - 1) + \cos x\text{sen}h}{h}$$

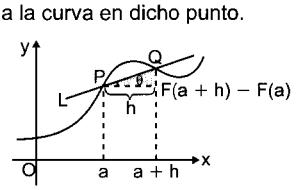
$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}x(\cosh - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\text{sen}h}{h}$$

$$\text{sen}x\underbrace{\lim_{h\to 0} f\left(\frac{\cosh - 1}{h}\right)}_{0} + \cos x\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{\text{sen}h}{h}\right)}_{1}$$

$\Rightarrow$ F'(x) = senx(0) + cosx(1) = cosx

Conclusión: Si F(x) = senx $\Rightarrow$ F'(x) = cosx

- La derivada de una función y = F(x), en, x = a; se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.



Observa en la figura adjunta que la pendiente de L es: $m = \tan\theta = \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$

Cuando h es muy pequeño (tiende a cero), el punto Q está muy próximo a P, por lo tanto la recta L es tangente a la curva en P.

Conclusión: Dada una función y = F(x), la derivada de F(x) en x = a es la pendiente de la recta tangente a la curva de F(x) en x = a.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$, en un punto de la curva cuya abscisa es 1.

Resolución:

- Calculamos el punto de tangencia para x = 1
  $F(1) = 2(1)^3 + 4(1)^2 - 5(1) - 3 \Rightarrow F'(1) = -2$
  El punto de tangencia es (1; −2).
- Calculamos la pendiente de la recta tangente:
  $F(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3 \Rightarrow F'(x) = 6x^2 + 8x - 5$
  Para x = 1 $\Rightarrow F'(1) = 6(1)^2 + 8(1) - 5 = 9$
- Ecuación de la recta tangente:
  $y - y_0 = m(x - x_0)$
  $\Rightarrow y - (-2) = 9(x - 1) \Rightarrow 9x - y - 11 = 0$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el cuadro adjunto se muestran las derivadas de las funciones trigonométricas, se considera que u = G(x), donde G es una función derivable y se restringe de tal manera que la función trigonométrica está definida.

$D_x(\text{sen}u) = \cos u D_x U$	$D_x(\cot u) = -\csc^2 u D_x U$
$D_x(\cos u) = -\text{sen}u D_x U$	$D_x(\sec u) = \sec u\tan u D_x U$
$D_x(\tan u) = \sec^2 u D_x U$	$D_x(\csc u) = -\csc u\cot u D_x U$

Ejemplos:

Calcular F'(x) en cada caso

- $F(x) = \text{sen}6x \Rightarrow F'(x) = \cos 6x\underbrace{D_x(6x)}_{6} = F(x) = 6\cos 6x$
- $F(x) = \cos(x^2+4) \Rightarrow F'(x) = -\text{sen}(x^2+4)\underbrace{D_x(x^2+4)}_{2x} =$
  $F'(x) = -2x\text{sen}(x^2+4)$
- $F(x) = \tan^3(5x) \Rightarrow F'(x) = 3\tan^2 5x D_x(\tan 5x)$
- $F(x) = 3\tan^2 5x[(\sec^2 5x\underbrace{D_x(5x)}_{5}] = 15\tan^2 5x\sec^2 5x$

CÁLCULO DE LÍMITES

Regla de L' Hospital

Sea ⟨a; b⟩ un intervalo que contiene a **c** y sean F y G funciones definidas y derivables en ⟨a;b⟩ (excepto posiblemente en c). Si $G'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y F(x) / G(x) tiene la forma indeterminada 0/0 o bien ∞/∞, entonces:

$$\lim_{x\to e}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to c}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

Nota

La regla de L'Hospital también es válida para límites unilaterales y para límites al infinito:

$(x \to c^+;\ x \to c^-;\ x \to +\infty;\ \ldots;\ x \to -\infty)$

Ejemplos:

1. Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{4\tan x}{1+\sec x}\right)$

Resolución:

Observa que cuando:

$x \to \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x = -\infty$ y $1 + \sec x \to -\infty$

entonces tenemos la forma indeterminada ∞/∞

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\tan x}{1+\sec x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\sec^2 x}{\sec x\tan x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\sec^2 x}{\tan x}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{\operatorname{sen}x}\right) = \frac{4}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

2. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - x}{x^3}\right)$

Resolución:

Observa que cuando $x \to 0$; $\tan x - x \Rightarrow 0$ y $x^3 \to 0$

Entonces tenemos la forma indeterminada 0/0.

Aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\right)$$

Observa que cuando $x \to 0$; $\sec^2 x - 1 \to 0$ y $x^2 \to 0$

Nuevamente tenemos la forma indeterminada 0/0.

Volvemos a aplicar la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sec x(\sec x\tan x)}{3(2x)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x\tan x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{3x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{3x\cos^3 x}\right) = \frac{1}{3} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}_{1}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}_{1} = \frac{1}{3}$$

Ejercicios:

1. Se tiene dos puntos A y B que pertenecen a las gráficas de las funciones:

$y = \operatorname{sen}x$, $y = 2 - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

Las rectas tangentes en A y B son paralelas. Calcular la distancia entre A y B, sabiendo que éstos tienen la misma abscisa (cuyo valor está entre $\pi/2$ y $3\pi/4$).

Resolución:

A pertenece a $y = f(x) = \operatorname{sen}x$

B pertenece a $y = g(x) = 2 - \operatorname{sen}(x - 3\pi/4)$

Por dato: las rectas tangentes en A y B son paralelas, luego:

$$\underbrace{\text{Pendiente en A}}_{f'(x)} = \underbrace{\text{pendiente en B}}_{g'(x)}$$

Por dato, es la misma abscisa x

Para hallar la abscisa x, resolvamos la ecuación:

$$f'(x) = g'(x)$$

$$(\operatorname{sen}x)' = \left[2 - \operatorname{sen}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right]'$$

$$\cos x = -\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2} \to x = \dfrac{7\pi}{8} \\ x - \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{3\pi}{2} \to x = \dfrac{15\pi}{8} \end{cases}$$

Por dato: $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, luego: $x = \dfrac{7\pi}{8}$

Coordenadas de A:

$A \in f(x) = \operatorname{sen}x$

Si $x = \dfrac{7\pi}{8} \Rightarrow f\left(\dfrac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{8}$

$\Rightarrow A = \left(\dfrac{7\pi}{8}; \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{8}\right)$

Coordenadas de B:

$B \in g(x) = 2 - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

Si $x = \dfrac{7\pi}{8} \Rightarrow g\left(\dfrac{7\pi}{8}\right) = 2 - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}$

$\Rightarrow B = \left(\dfrac{7\pi}{8}; 2 - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$

Nos piden:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{7\pi}{8} - \frac{7\pi}{8}\right)^2 + \left(2 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} - \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right)^2}$$

$$AB = \left|2 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} - \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right|$$

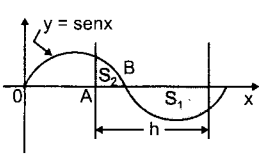
$$AB = \left|2 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right| = \left|2 - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right|$$

$$AB = 2\left|1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right| = 2\left|1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right|$$

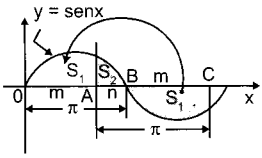
$$AB = 2\left|1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right| = 2\left|2\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{16}\right|$$

$$AB = 4\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{16}$$

2. En la figura mostrada, si $S_1 - S_2 = 1$, calcular S_2 / S_1.



Resolución:



Notemos que: $OA + AB = \pi$
También: $AB + BC = \pi$
Luego: $OA + AB = AB + BC \Rightarrow OA = BC$
Por simetría de la sinusoide podemos trasladar S_1 a donde indica la flecha.
Sabemos que: $S_1 + S_2 = 2$
Por dato: $S_1 - S_2 = 1$
Donde: $S_1 = 3/2$; $S_2 = 1/2$

Nos piden: $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$

3. Siendo: $f(x) = \text{sen}x + \cos x$
hallar la enésima derivada de f.

Resolución:

$f(x) = \text{sen } x + \cos x$

$f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Derivando sucesivamente a ambos miembros:

$f^{(1)}(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f^{(2)}(x) = \sqrt{2}\left[-\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(2\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f^{(3)}(x) = \sqrt{2}\left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f^{(4)}(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(4\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f^{(5)}(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(5\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \qquad = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

Luego:

$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}\left[\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\text{sen}\frac{\pi}{4}\right]$

$f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular:

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{x^3 - \alpha^3}{\cos^2 x - \cos^2\alpha}\right)$$

Resolución:

Sea: $L = \lim\limits_{x\to\alpha} f\left(\dfrac{x^3 - \alpha^3}{\cos^2 x - \cos^2\alpha}\right)$ ...(1)

Notemos que:

$\cos^2 x - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 2\cos^2\alpha)$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos 2x - (1 + \cos 2\alpha)]$

$= \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 2\alpha]$

$= \frac{1}{2}2\text{sen}(\alpha + x)\text{sen}(\alpha - x)$

$\cos^2 x - \cos^2\alpha = \text{sen}(\alpha + x)\,\text{sen}(\alpha - x)$

Reemplazando en (1):

$$L = \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3 - \alpha^3}{\text{sen}(\alpha + x)\text{sen}(\alpha - x)}$$

$$L = \lim_{x\to\alpha}\frac{(x - \alpha)(x^2 + x\alpha + \alpha^2)}{\text{sen}(\alpha + x)\text{sen}(\alpha - x)}$$

$$L = \lim_{x\to\alpha}\frac{-(\alpha - x)}{\text{sen}(\alpha - x)}\lim_{x\to\alpha}\frac{(x^2 + x\alpha + \alpha^2)}{\text{sen}(\alpha + x)}$$

Como: si $x \to \alpha \Rightarrow (\alpha - x) \to 0$

$$L = \lim_{(\alpha - x)\to 0}\frac{-(\alpha - x)}{\text{sen}(\alpha - x)}\lim_{x\to\alpha}\frac{(x^2 + x\alpha + \alpha^2)}{\text{sen}(\alpha + x)}$$

$$L = -(1)\frac{(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2)}{\text{sen}2\alpha}$$

$$\therefore\ L = \frac{-3\alpha^2}{\frac{1}{\csc 2\alpha}} = -3\alpha^2\csc 2\alpha$$

2. En qué punto de la gráfica de la función: $f(x) = 2\cos x + \text{sen}2x$, cuyo dominio es $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, la pendiente de la recta tangente es igual a cero.

Resolución:

Siendo: $f(x) = 2\cos x + \text{sen}2x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es: $f'(x)$

Luego:
$f'(x) = 2(-\text{sen}x) + 2(\cos 2x)$
$f'(x) = -2\text{sen}x + 2\cos 2x$

Por dato: $f'(x) = 0$
$\Rightarrow -2\text{sen}x + 2\cos 2x = 0$
$-2\text{sen}x + 2(1 - 2\,\text{sen}^2 x) = 0$
$-2[\text{sen}x - (1 - 2\text{sen}^2 x)] = 0$
$-2[2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1] = 0$
$(2\text{sen}x - 1)(\text{sen}x + 1) = 0$

De donde: $\text{sen}x = \frac{1}{2} \vee \text{sen}x = -1$

Considerando que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

I. Si: $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

II. Si: $\operatorname{sen}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ no cumple

Finalmente, siendo $x = \pi/6$, la ordenada correspondiente es:

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}2\frac{\pi}{6}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es cero, es $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

3. Calcular la abscisa del punto de la gráfica de la función: $f(x) = \operatorname{sen}^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}$, $x \in \langle 0; \pi \rangle$, donde la recta tangente tiene por pendiente a $-0{,}25$.

Resolución:

Siendo: $f(x) = \operatorname{sen}^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}$, $x \in \langle 0; \pi \rangle$

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es: $f'(x)$

Por dato: $f'(x) = -\frac{1}{4}$

Luego:

$f'(x) = 4\operatorname{sen}^3\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + 4\cos^3\frac{x}{4}\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right)\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\operatorname{sen}^3\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} - \cos^3\frac{x}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{4} = -\frac{1}{4}$

$-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\left(\cos^2\frac{x}{4} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

$2\operatorname{sen}\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos 2\frac{x}{4} = 2\left(\frac{1}{4}\right)$

$\operatorname{sen}2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1$

$\operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto la abscisa del punto donde la recta tangente tiene por pendiente a $-0{,}25$ es $\pi/2$.

4. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \arctan x$ en el punto de abscisa -1. Luego, si (a; b) pertenece a dicha recta.

Resolución:

Datos: $f(x) = \arctan x$

Abscisa del punto de tangencia $= -1$

La ecuación de la recta tangente es:

$y - f(-1) = f'(-1)[x - (-1)]$

$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$ ...(1)

Si $f(x) = \arctan x$

$\Rightarrow f(-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ...(2)

Si $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

$f'(-1) = \frac{1}{1 + (-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{2}$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$y - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(x + 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \ \vee\ 2x - 4y + 2 - \pi = 0$

Si (a;b) pertenece a ésta recta, entonces satisface a la ecuación, es decir: $2a - 4b + 2 - \pi = 0$

de donde: $2a - 4b = \pi - 2$

5. Si $f(x) = \operatorname{sen}x\cos 2x$, hallar: $\lim\limits_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$

Resolución:

Nos piden:

$\lim\limits_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$

Por definición, resulta ser la derivada $f'(x)$.

Es decir:

$\lim\limits_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = f'(x)$

Como: $f(x) = \operatorname{sen}x\cos 2x$

$\Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen}x(-2\operatorname{sen}2x) + \cos 2x\cos x$

$f'(x) = -2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x + \cos 2x\cos x$

$f'(x) = -\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x + \cos 2x\cos x - \operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x$

$f'(x) = -\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x + \cos(2x + x)$

$\therefore\ f'(x) = -\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x + \cos 3x$

6. Si $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a\operatorname{sen}2x}{x^3} + \frac{b}{x^2}\right) = 2$, calcular a y b.

Resolución:

Se tiene. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a\operatorname{sen}2x + bx}{x^3}\right) = 2$

Evaluando en el primer miembro, tal como está, para $x = 0$, resulta: $0/0$.

Apliquemos la regla de L'Hospital:

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{D_x(a\operatorname{sen}2x + bx)}{D_x(x^3)} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2a\cos 2x + b}{3x^2}\right) = 2$ ...(1)

Evaluando para $x = 0$, resulta:

$\frac{2a + b}{0} = 2$

$\Rightarrow$ necesariamente: $2a + b = 0$

$b = -2a$ ...(2)

Es decir, continúa la indeterminación $0/0$.

Seguimos aplicando la regla de L'Hospital en (1):

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{D_x(2a\cos 2x + b)}{D_x(3x^2)} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{-4a\operatorname{sen}2x}{6x} = 2 \Rightarrow -\frac{4a}{3}\lim\limits_{x \to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x} = 2$

$-\frac{4a}{3}(1) = 2 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Reemplazando en (1): $b = 3$

7. Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\tan x}\right)$

Resolución:

Resulta: $\infty - \infty$, indeterminado.
Hagamos transformaciones:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}\right)$$

Evaluando, resulta: 0/0
Aplicamos la regla de L'Hospital:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{D_x(\tan x - x)}{D_x(x^2\tan x)}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{x^2\sec^2 x + 2x(\tan x)}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{x^2\sec^2 x + 2x\tan x}$$

Evaluando para x = 0, resulta: 0/0
En vez de aplicar la regla de L'Hospital, hagamos transformaciones:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2\sec^2 x + 2x\tan x}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan^2 x}{x^2}}{\frac{x^2\sec^2 x}{x^2} + \frac{2x\tan x}{x^2}}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2}{\sec^2 x + 2\left(\frac{\tan x}{x}\right)}$$

$$\therefore\ L = \frac{1}{1+2(1)} = \frac{1}{3}$$

8. Hallar la enésima derivada de:
f (x) = senxcosx

Resolución:

f(x) = senxcosx
2f(x) = 2senxcosx
2f(x) = sen2x

Derivando sucesivamente a ambos miembros:

$$2f^{(1)}(x) = 2\cos 2x = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$2f^{(2)}(x) = 2^2[-\text{sen}2x] = 2^2\text{sen}\left(2\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$2f^{(3)}(x) = 2^3[-\cos 2x] = 2^3\text{sen}\left(3\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$2f^{(4)}(x) = 2^4\text{sen}2x = 2^4\text{sen}\left(4\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$2f^{(5)}(x) = 2^5\cos 2x = 2^5\text{sen}\left(5\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$2f^{(6)}(x) = 2^6[-\text{sen}2x] = 2^6\text{sen}\left(6\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$2f^{(n)}(x) = \ldots \quad = 2^n\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

Luego: $2f^{(n)}(x) = 2^n\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$$\therefore\ f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$$

9. Evaluar $K = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x + \tan 2x}\right)$

Resolución:

Evaluando para x = 0, resulta: 0/0.
Aplicando la regla de L'Hospital:

$$K = \lim_{x\to 0}\frac{D_x(1-\cos 3x)}{D_x(x+\tan 2x)}$$

$$K = \lim_{x\to 0}\frac{3\text{sen}3x}{1 + 2\sec^2 2x}$$

Evaluando para x = 0, $\quad\therefore\ K = \frac{0}{1+2} = 0$

10. Hallar el valor de:

$$A = \lim_{x\to -1}\left(\frac{\text{sen}5\pi x + \cos 3\pi x + 1}{x^2 - 1}\right)$$

Resolución:

Evaluando para x = −1, resulta: 0/0.
Apliquemos la regla de L'Hospital:

$$A = \lim_{x\to -1}\frac{D_x(\text{sen}5\pi x + \cos 3\pi x + 1)}{D_x(x^2 - 1)}$$

$$A = \lim_{x\to -1}\frac{5\pi\cos 5\pi x - 3\pi\text{sen}3\pi x}{2x}$$

Evaluando para x = − 1, resulta:

$$A = \lim_{x\to -1}\frac{5\pi\cos(-5\pi) - 3\pi\text{sen}(-3\pi)}{2(-1)}$$

$$\therefore\ A = \frac{5\pi(-1)}{-2} = \frac{5\pi}{2}$$

11. Sea la función:

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{\text{sen}x - \text{sen}\alpha}{\text{sen}\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{\alpha}{2}}, & x \neq \alpha \\ \sec\frac{\alpha}{2}, & x = \alpha\end{cases}$$

Calcular el valor de α para que f sea continua en $x = \alpha$. Se sabe además que $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Resolución:

Para que f sea continua en $x = \alpha$, se debe cumplir:

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ ...(1)

Cálculo de: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$

Tengamos en cuenta que $x \to \alpha$, es decir : $x \neq \alpha$
Luego:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\text{sen}x - \text{sen}\alpha}{\text{sen}\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{2\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+\alpha}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{x-\alpha}{4}\right)}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)2\text{sen}\left(\frac{x-\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x+\alpha}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{x-\alpha}{4}\right)}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{2\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x+\alpha}{4}\right)}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

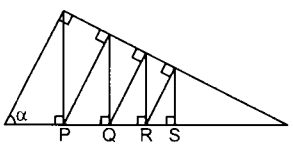
Reemplazando en (1): $\dfrac{2\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=f(\alpha)$

Como:

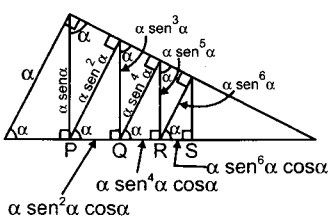
$f(\alpha)=\sec\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\dfrac{2\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sec\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{2\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

12. En la figura mostrada, cuando α tiende a $\frac{\pi}{2}$rad (por la izquierda), se puede afirmar que:



Resolución:



De la figura:

$\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{\alpha\text{sen}^2\alpha\cos\alpha}{\alpha\text{sen}^4\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$

Luego: $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{PQ}{QR}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}\right)=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{PQ}{QR}=1$

Es decir, en el límite: PQ = QR ...(1)

De la figura:

$\dfrac{QR}{RS}=\dfrac{\alpha\text{sen}^4\alpha\cos\alpha}{\alpha\text{sen}^6\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$

Luego:

$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{QR}{RS}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}\right)\Rightarrow\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{QR}{RS}=1$

Es decir, en el límite: QR = RS ...(2)

$\therefore$ De (1) y (2): PQ = QR = RS

13. ¿En qué puntos de la gráfica de la función: $f(x)=2\text{sen}^2 2x-\cos^3 2x$, $x\in\langle 0;\pi\rangle$, la recta tangente es paralela al eje x? Dar como respuesta la suma de las abscisas de dichos puntos.

Resolución:

Si la recta tangente, en el punto de abscisa x, es paralela al eje x, entonces:

Pendiente = 0, es decir: $f'(x)=0$

Luego:

$(2)2\text{sen}2x\cos2x(2)-3\cos^2x(-\text{sen }2x)\,2=0$

$8\text{sen}2x\cos2x+6\cos^2 2x\text{sen}2x=0$

$2\text{sen}2x\cos2x(4+3\cos2x)=0$

$\text{sen}4x(4+3\cos2x)=0$

$\begin{cases}\text{sen}4x=0\\ \cos2x=-\frac{4}{3}\rightarrow\text{no es posible}\end{cases}$

Si $\text{sen }4x=0\Rightarrow 4x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\Rightarrow x=k\frac{\pi}{4}$:

Considerando que $0<x<\pi$; en $x=k\frac{\pi}{4}$:

$k=1\rightarrow x=\pi/4$

$k=2\rightarrow x=\pi/2$

$k=3\rightarrow x=3\pi/4$

Nos piden:

Por lo tanto suma de abscisas: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$

14. Calcular la tangente del menor ángulo que forman las rectas normales a las gráficas de las funciones: $f(x)=\text{sen}2x$; $g(x)=\cos x$, en el punto de intersección de éstas. Se conoce además que el dominio para ambas funciones es $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Resolución:

Hallando el punto de intersección de

$f(x)=\text{sen}2x\wedge g(x)=\cos x$

Resolvamos la ecuación:

$f(x)=g(x)$

$\text{sen}2x=\cos x$, $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

$2\text{sen}x\cos x=\cos x$

$2\text{sen}x\cos x-\cos x=0$

$\cos x(2\text{sen}x-1)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\text{no cumple}\\ \text{sen}x=\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\rightarrow$ Abscisas del punto de intersección.

Hallando las pendientes de las rectas normales que pasan por el punto de abscisa $x=\pi/6$.

Siendo $f(x)=\text{sen}2x\Rightarrow f'(x)=2\cos2x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$ Pendiente de recta tangente

Luego: $\underbrace{\text{pendiente de recta normal}}_{m_1}=-\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow m_1=-1$ ... (1)

Siendo $g(x)=\cos x$

$\Rightarrow g'(x)=-\text{sen}x$

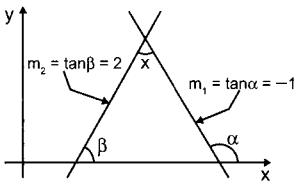
$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\text{sen}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

Luego:

$\underbrace{\text{pendiente de recta normal}}_{m_2}=-\dfrac{1}{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow m_2=2$ ...(2)

Considerando (1) y (2), graficamos:



Vemos que: $\alpha = \beta + x \Rightarrow x = \alpha - \beta$

$\tan x = \tan(\alpha - \beta)$

$\tan x = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \quad \therefore \tan x = \dfrac{-1-2}{1+(-1)2} = 3$

15. Evaluar: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x - \arctan 2x}{x^3}\right)$

Resolución:

Sea: $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x - \arctan 2x}{x^3}\right)$

Evaluando para x = 0, resulta 0/0.

Apliquemos la regla de L'Hospital:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{D_x(2x - \arctan 2x)}{D_x(x^3)}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2 - \dfrac{2}{1+(2x)^2}}{3x^2} \Rightarrow L = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2(1+4x^2)-2}{1+4x^2}}{3x^2}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{3x^2(1+4x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{8}{3(1+4x^2)}$$

Evaluando para x = 0, $\quad \therefore L = 8/3$.

16. Determinar la ecuación de la recta normal a la gráfica f(x) = arctan2x + arctan3x, en el punto de abscisa 1.

Resolución:

Datos: f(x) = arctan2x + arctan3x

Abscisa del punto de tangencia = 1

La ecuación de la recta normal es:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) \qquad ...(1)$$

$f(1) = \arctan 2 + \arctan 3$

$$f(1) = \pi + \arctan\frac{2+3}{1-2\times 3} = \pi + \arctan(-1)$$

$$f(1) = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(1) = \frac{3\pi}{4} \qquad ...(2)$$

Si: $\quad f(x) = \arctan 2x + \arctan 3x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} + \frac{3}{1+(3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{3}{1+9x^2}$$

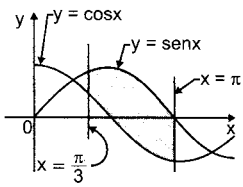
$$f'(1) = \frac{2}{1+4} + \frac{3}{1+9}$$

$$f'(1) = \frac{7}{10} \qquad ...(3)$$

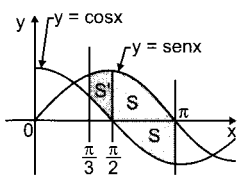
Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$y - \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\frac{7}{10}}(x-1) \quad \therefore y = -\frac{10}{7}x + \frac{10}{7} + \frac{3\pi}{4}$$

17. Considerando la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada.



Resolución:



A su vez el área S es la mitad del área bajo la curva y = senx en el tramo [0; π], luego:

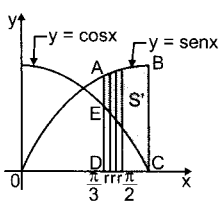
$$S = \frac{1}{2}(2) \Rightarrow S = 1$$

Nos piden:

$A_{sombreada} = S' + S + S = S' + 2S$

$A_{sombreada} = S' + 2 \qquad ...(1)$

Cálculo de S', en el tramo $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$



Dividamos el segmento $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ en n partes iguales.

Cada parte: $r = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{n} \Rightarrow r = \dfrac{\pi}{6n}$

También: $nr = \dfrac{\pi}{6}$

Notemos que: $n \to \infty$; equivale a: $r \to 0^+$

Luego:

$S' = A_{ABCD} - A_{ECD}$

$$S' = \lim_{r\to 0^+}\left[\sum A_{\substack{\text{rectang.}\\ \text{bajo senx}}} - \sum A_{\substack{\text{rectang.}\\ \text{bajo cosx}}}\right]$$

$$S' = \lim_{r\to 0^+}\left[\sum r\,\text{sen}\,x_i - \sum r\cos x_i\right]$$

donde x_i representa a:

$\frac{\pi}{3} + r;\ \frac{\pi}{3} + 2r;\ \frac{\pi}{3} + 3r;\ ...;\ \frac{\pi}{3} + nr$

$$S' = \lim_{r\to 0^+}\sum(r\,\text{sen}x_i - r\cos x_i)$$

$$S' = \lim_{r\to 0^+}\sum r(\text{sen}x_i - \cos x_i)$$

$$S' = \lim_{r\to 0^+}\sum r\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x_i - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$S' = \lim_{r\to 0^+} \sqrt{2}\, r \underbrace{\sum \operatorname{sen}\left(x_i - \frac{\pi}{4}\right)}_{E} \qquad ...(2)$$

Sea $E = \sum \operatorname{sen}\left(x_i - \frac{\pi}{4}\right)$

$$E = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + r - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2r - \frac{\pi}{4}\right) + ... + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + nr - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$E = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + r - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + nr - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$E = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + \frac{nr}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$$

Pero: $nr = \pi/6$

$$E = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)$$

Reemplazando en (2):

$$S' = \lim_{r\to 0^+} \sqrt{2}\, r \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$S' = 2\sqrt{2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{r}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$S' = 2\sqrt{2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}(1) \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow S' = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)\frac{1}{2}$$

$$S' = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Reemplazando en (1):

$$A_{sombreada} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$$

18. Determinar la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función: $y = 6\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$ en el punto de ordenada $-\pi$.

Resolución:

Sea $y = f(x) = 6\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$ ...(1)

Nos dicen un punto de ordenada $-\pi$: $(\alpha; -\pi)$

Reemplazando en (1):

$$-\pi = 6\operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} = \operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = -1$$

Aplicando la ecuación de la recta normal:

$$y - f(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}(x - \alpha)$$

donde α es abscisa del punto de tangencia.

La ecuación de la recta normal que nos piden es:

$$y - f(-1) = -\frac{1}{f'(-1)}[x - (-1)] \qquad ...(2)$$

No hay necesidad de calcular $f(-1)$ porque desde el principio es dato:

$-\pi = f(-1)$ ...(3)

Si $f(x) = 6\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow f'(x) = 6\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \quad f'(x) = \frac{6}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(-1) = \frac{6}{\sqrt{4 - (-1)^2}}$$

$f'(-1) = 2\sqrt{3}$ ...(4)

Reemplazando (3) y (4) en (2)

$$y - (-\pi) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x + 1)$$

$$2\sqrt{3}\,y + 2\pi\sqrt{3} = -x - 1$$

$$\therefore\ x + 2\sqrt{3}\,y + 1 + 2\pi\sqrt{3} = 0$$

19. Evaluar: $P = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x\right)^{\frac{1}{x}}$

Resolución:

Haciendo transformaciones:

$$P = \lim_{x\to 0}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$P = \lim_{x\to 0}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1\right)^{\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1\right)}{\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1\right)x}}$$

$$P = \lim_{x\to 0}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1\right)^{\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)}$$

Sea: $\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1 = \blacktriangle$

$$P = \lim_{x\to 0}(1 + \blacktriangle)^{\frac{1}{\blacktriangle}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)}$$

$$P = \lim_{x\to 0}\left[(1 + \blacktriangle)^{\frac{1}{\blacktriangle}}\right]^{\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)}$$

$$P = \left[\lim_{x\to 0}(1 + \blacktriangle)^{\frac{1}{\blacktriangle}}\right]^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)}$$

Pero $\blacktriangle = \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1$

Si $x \to 0 \Rightarrow \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1\right) \to 0 \Rightarrow \blacktriangle \to 0$

Luego:

$$P = \left[\lim_{\blacktriangle\to 0}(1 + \blacktriangle)^{\frac{1}{\blacktriangle}}\right]^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)}$$

$$P = \left[e\right]^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)} \qquad ...(1)$$

Sea: $A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1}{x}\right)$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - (1-\cos x)}{x}$$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1 - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\left(1 - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}(1)(1) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en (I): $\therefore\ P = (e)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

20. Siendo f(x) = senx − cosx, hallar el equivalente de:

$$E = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Resolución:

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f(x-h) + f(x)}{2h}$$

$$E = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [f(x-h) - f(x)]}{h}$$

$$E = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right\}$$

$$E = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]}_{f'(x)} + \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right]\right\}$$

$$E = \frac{1}{2}\left\{f'(x) + \lim_{n\to 0}\left[\frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right]\right\}$$

Haciendo: $-h = t$

$$E = \frac{1}{2}\left\{ f'(x) + \underbrace{\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right]}_{f'(x)} \right\}$$

$$E = \frac{1}{2}\{f'(x) + f'(x)\} = \frac{1}{2}2f'(x)$$

$E = f'(x)$

Como:

$f(x) = \operatorname{sen}x - \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - (-\operatorname{sen}x)$

$f'(x) = \cos x + \operatorname{sen}x \quad \therefore\ E = f'(x) = \operatorname{sen}x + \cos x$

21. Si la recta: $y = \frac{1}{2}x + b$ es tangente a la gráfica de la función: g(x) = arctan2x , calcular el valor de b.

Resolución:

La recta $y = \frac{1}{2}x + b$ es tangente a la gráfica de g(x) = arctan2x.

pendiente de recta tangente: $g'(x) = \frac{1}{2}$

Hallemos dicha abscisa x resolviendo: $g'(x) = \frac{1}{2}$

Como g(x) = arctan2x

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{1+4x^2} = \frac{1}{2}$$

De donde: $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \vee\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$ es un punto de tangencia

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$ es otro punto de tangencia

Como hay dos puntos donde la pendiente de la recta tangente es 1/2. En consecuencia, hay dos rectas tangentes con ecuación de la forma:

$y = \frac{1}{2}x + b$

Luego: Si $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \in y = \frac{1}{2}x + b$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$

Si $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{3}\right) \in y = \frac{1}{2}x + b$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b \Rightarrow b = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ b = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \ \vee\ b = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$

22. Calcular: $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{x\cos x - \operatorname{sen}x}}$

Resolución:

Evaluando resulta $1^{\frac{0}{0}}$.

Hagamos transformaciones:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\tan x}{x} - 1\right)^{\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{x\cos x - \operatorname{sen}x}}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}x}{x\cos x} - 1\right)^{\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{x\cos x - \operatorname{sen}x}}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x\cos x}\right)^{-\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x - x\cos x}}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x\cos x}\right)^{\left(\frac{x\cos x}{\operatorname{sen}x - x\cos x}\right)\left(-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}$$

Sea $\frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x\cos x} = \ast$, entonces:

$$L = \lim_{x\to 0}(1+\ast)^{\frac{1}{\ast}\left(-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left[(1+\ast)^{\frac{1}{\ast}}\right]^{\left(-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}$$

$$L = \left[\lim_{x\to 0}(1+\ast)^{\frac{1}{\ast}}\right]^{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}$$

$$L = \left[\lim_{x\to 0}(1+\ast)^{\frac{1}{\ast}}\right]^{-1}$$

Pero: $\ast = \frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x\cos x} = \frac{\tan x}{x} - 1$

Si: $x \to 0 \Rightarrow \left(\frac{\tan x}{x} - 1\right) \to 0 \Rightarrow \ast \to 0$

Luego: $L = \left[\lim_{\ast\to 0}(1+\ast)^{\frac{1}{\ast}}\right]^{-1} \quad \therefore\ L = (e)^{-1} = e^{-1}$

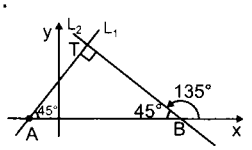
23. Sabiendo que la recta: $y = 2x + 2\sqrt{3}$ es tangente a la gráfica de la función:
$f(x) = 2\sqrt{3} + 4\text{sen}(x - \alpha)$, $x \in \langle \alpha, \pi + \alpha \rangle$
calcular la ecuación de la recta normal que pasa por el punto de tangencia.

Resolución:

La recta: $y = 2x + 2\sqrt{3}$ es tangente a la gráfica de:
$f(x) = 2\sqrt{3} + 4\text{sen}(x - \alpha)$, $\alpha < x < \pi + \alpha$.
$\Rightarrow$ pendiente de recta tangente: $= f'(x) = 2$
Resolvamos ésta ecuación:
$[2\sqrt{3} + 4\text{sen}(x - \alpha)]' = 2$
$4\cos(x - \alpha) = 2$
$\cos(x - \alpha) = \frac{1}{2}$
Como: $\alpha < x < \pi + \alpha \Rightarrow 0 < x - \alpha < \pi$
Luego: $x - \alpha = \frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \alpha$, abscisa del punto de tangencia
Si $x = \frac{\pi}{3} + \alpha \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 2\sqrt{3} + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha - \alpha\right)$
$f\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 4\sqrt{3}\}$ Ordenada del punto de tangencia
Luego:
$T\left(\frac{\pi}{3} + \alpha; 4\sqrt{3}\right)$ punto de tangencia
Pero T pertenece a $y = 2x + 2\sqrt{3}$
Reemplazando: $4\sqrt{3} = 2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + 2\sqrt{3}$
$\Rightarrow \alpha = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \wedge T = (\sqrt{3}; 4\sqrt{3})$ ...(1)
Entonces:
Pendiente de recta tangente = 2
Pendiente de recta normal $= -\frac{1}{2}$ ...(2)
De (1) y (2), la ecuación de la recta normal que pasa por T es:
$y - 4\sqrt{3} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{3}) \quad \therefore y = -\frac{x}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{3}$

24. La recta tangente y la normal en un punto de la gráfica de la función: $f(x) = 5\arctan(2x - 1)$, $x \in \mathbb{R}^+$ forman un triángulo rectángulo isósceles con el eje x. Calcular la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo.

Resolución:



Pendiente de L_1: $m_1 = \tan 45° = 1$
Pendiente de L_2 : $m_2 = \tan 135° = -1$
Sea: $f(x) = 5\arctan(2x - 1)$
$\Rightarrow f'(x)$ = pendiente de recta tangente.
Luego:
$f'(x) = (5)\dfrac{2}{1 + (2x - 1)^2} = \dfrac{10}{1 + (2x - 1)^2} = 1$
Donde: $x = 2 \vee x = -1$
$x \in \mathbb{R}^+$, $\Rightarrow x = 2$
Si $x = 2 \Rightarrow f(2) = 5\arctan(2(2) - 1)$
$f(2) = 5\arctan(3)$
Es decir: $T = (2; 5\arctan(3))$
Ecuación de L_1:
Considerando punto de paso T y $m_1 = 1$
$y - 5\arctan(3) = 1(x - 2)$
$y = x - 2 + 5\arctan(3)$
Para hallar A, hacemos $y = 0$
$0 = x - 2 + 5\arctan(3)$
$x = 2 - 5\arctan(3)$
$\Rightarrow A = (2 - 5\arctan(3); 0)$ ...(1)
Ecuación de L_2:
Considerando punto de paso T y $m_2 = -1$
$y - 5\arctan(3) = -1(x - 2)$
$y = -x + 2 + 5\arctan(3)$
Para hallar B, hacemos $y = 0$
$0 = -x + 2 + 5\arctan(3)$
$x = 2 + 5\arctan(3)$
$\Rightarrow B = (2 + 5\arctan(3); 0)$ ...(2)
De (1) y (2):
$AB = |2 + 5\arctan(3) - (2 - 5\arctan(3))|$
$\therefore AB = |10\arctan(3)| = 10\arctan(3)$

25. Hallar el equivalente de:

$$P = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}f(x + h) - \text{sen}f(x)}{h}$$

Resolución:

Transformando a producto:

$$P = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{f(x+h) + f(x)}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right)}{h}$$

$$P = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{f(x+h) + f(x)}{2}\right)}{1} \frac{\text{sen}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right)}{h}$$

$$P = \underbrace{\lim_{h \to 0} 2\cos\left(\frac{f(x+h) + f(x)}{2}\right)}_{2\cos f(x)} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\text{sen}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right)}{1}$$

$$P = 2\cos f(x) \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right]}{h} \frac{\text{sen}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right]}{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right]}$$

$$P = 2\cos f(x) \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right]}{h} \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right]}{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2}\right]}}_{1}$$

$$P = 2\cos f(x) \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{2h}\right] 1$$

$$P = 2\cos f(x) \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]}_{f'(x)}$$

$P = \cos f(x) f'(x) \quad \therefore P = f'(x)\cos f(x)$

26. Calcular la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $\pi/2$ que pertenece a la gráfica de la función: $f(x) = \cos^3\frac{x}{3} + \text{sen}^2 2x + \cos^3\frac{x}{2}$.

Resolución:

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $\pi/2$ es $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Luego:

$$f'(x) = 3\cos^2\frac{x}{3}\left(-\text{sen}\frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 2\text{sen}2x\cos 2x(2) + 3\cos^2\frac{x}{2}\left(-\text{sen}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = -\cos^2\frac{x}{3}\text{sen}\frac{x}{3} + 4\text{sen}2x\cos 2x - \frac{3}{2}\cos^2\frac{x}{2}\text{sen}\frac{x}{2}$$

Evaluando para $x = \frac{\pi}{2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos^2\frac{\pi}{6}\text{sen}\frac{\pi}{6} + 4\text{sen}\pi\cos\pi - \frac{3}{2}\cos^2\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 - \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad \therefore\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{8}(1+\sqrt{2})$$

27. Si la función:

$$f(x)\begin{cases} a\cos(\text{sen}x), & x \le 0 \\ x + b\cos\pi x, & 0 < x < 1 \\ a - b\text{sen}\pi x, & x \ge 1 \end{cases}$$

es continua en todo su dominio, calcular:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

Resolución:

Para que f sea continua en todo su dominio, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \qquad ...(I)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \qquad ...(II)$$

Analizando el caso (I):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a\cos(\text{sen}x)$$

$$x < 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a\cos(\text{sen}0) = a\cos(0) = a(1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a \qquad ...(1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + b\cos\pi x)$$

$$x > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + b\cos 0 = b(1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) y (2) en (I):

$a = b = f(0)$

pero: $f(0) = a\cos(\text{sen}0) = a$

$\Rightarrow a = b = a$

$a = b \qquad ...(3)$

Analizando el caso (II):

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + b\cos\pi x)$$

$$x < 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + b\cos\pi = 1 + b(-1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - b \qquad ...(4)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (a - b\text{sen}\pi x)$$

$$x > 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a - b\text{sen}\pi = a - b(0)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a \qquad ...(5)$$

Reemplazando: (4) y (5) en (II):

$1 - b = a = f(1)$

Pero: $f(1) = a - b\text{sen}\pi = a$

$\Rightarrow 1 - b = a = a$

$1 - b = a \Rightarrow a + b = 1 \qquad ...(6)$

De (3) y (6), obtenemos: $a = b = \frac{1}{2}$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(\text{sen}x), & x \le 0 \\ x + \frac{1}{2}\cos\pi x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{sen}\pi x, & x \ge 1 \end{cases}$$

Piden:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{2}$$

28. Sean : $f(x) = a\text{sen}x + b\cos x$

y $g(x) = af(x) + bf'(x)$

Calcular el máximo valor de $g'(x)$.

Resolución:

Hallando $g'(x)$:

Como: $g(x) = af(x) + bf'(x)$

$\Rightarrow g'(x) = [af(x) + bf'(x)]'$

$g'(x) = af'(x) + bf''(x) \qquad ...(1)$

Si: $f(x) = a\text{sen}x + b\cos x$

$\Rightarrow f'(x) = a\cos x + b(-\text{sen}x)$

$f'(x) = a\cos x - b\text{sen}x \qquad ...(2)$

Luego: $f''(x) = [f'(x)]'$

$f''(x) = [a\cos x - b\text{sen}x]'$

$f''(x) = a(-\text{sen}\,x) - b\cos x$

$f''(x) = -a\text{sen}x - b\cos x \qquad ...(3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$g'(x) = a(a\cos x - b\text{sen}x) + b(-a\text{sen}x - b\cos x)$

$g'(x) = a^2\cos x - ab\text{sen}x - ab\text{sen}x - b^2\cos x$

$g'(x) = -2ab\text{sen}x + (a^2 - b^2)\cos x$

Aplicando: Si $E = A\text{sen}x + B\cos x$

$\Rightarrow E_{máx} = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad E_{mín} = -\sqrt{A^2 + B^2}$

Valor máximo de $g'(x)$:

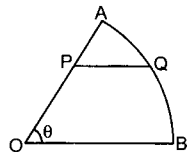
$$g'(x) = \sqrt{(-2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2}$$

$g'(x) = \sqrt{4a^2b^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2}$

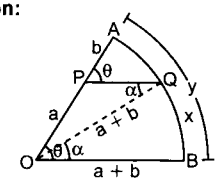
$g'(x) = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = |a^2 + b^2|$

$\therefore\ g'(x) = a^2 + b^2$

29. En el sector circular mostrado se tiene que PQ//OB, OP = a y PA = b. Las longitudes de los arcos BQ y BA son respectivamente x e y. Calcular la relación x/y cuando θ tiende a 0°.



Resolución:



De la figura: $x = \alpha(a + b)$ ...(I)

($\alpha \to$ n.° rad)

Aplicando ley de senos en el ΔOPQ:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}a} = \frac{a+b}{\operatorname{sen}\theta}$$

De donde: $\operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta$

Luego $\alpha = \operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]$

Reemplazando en (I):

$x = (a + b)\operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]$

Como $y = \theta(a + b) \Rightarrow (\theta \to$ n.° rad)

Luego:

$$\frac{x}{y} = \frac{(a+b)\operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]}{\theta(a+b)}$$

Nos piden:

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{x}{y} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta}{\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]}{\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]}\left(\frac{a}{a+b}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)\underbrace{\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{arcsen}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]}{\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)\operatorname{sen}\theta\right]}}_{1}\underbrace{\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}_{1}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)(1)(1) \qquad \therefore\ \lim_{\theta\to 0^+}\frac{x}{y} = \frac{a}{a+b}$$

30. Calcular:

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{\tan x} + \frac{\operatorname{sen}(\cot x)}{\cot x}\right]$$

Resolución:

Sea: $\tan x = h \Rightarrow \cot x = \frac{1}{h}$

Si: $x \to 0 \Rightarrow h \to 0$

Reemplazando:

$$K = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{\frac{1}{h}}\right]$$

$$K = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}h}{h} + h\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right]$$

$$K = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}}_{1} + \underbrace{\lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\frac{1}{h}}_{0}$$

$\therefore\ K = 1 + 0 = 1$

31. Calcular: $A = \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}kx - \operatorname{sen}ka}{x - a}$

Resolución:

Evaluando para x = a:

$$A = \frac{\operatorname{sen}ka - \operatorname{sen}ka}{a - a} = \frac{0}{0}$$

Hagamos transformaciones en B:

$$A = \lim_{x\to a}\left[\frac{2\cos\left(\frac{kx + ka}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{kx - ka}{2}\right)}{x - a}\right]$$

$$A = 2\lim_{x\to a}\left[\frac{\cos\frac{k(x+a)}{2}\operatorname{sen}\frac{k(x-a)}{2}}{x - a}\right]$$

$$A = 2\lim_{x\to a}\left[\cos\frac{k(x+a)}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{k(x-a)}{2}}{(x-a)}\right]$$

$$A = 2\left[\lim_{x\to a}\cos\frac{k(x+a)}{2}\right]\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{k(x-a)}{2}}{(x-a)}\right]$$

$$A = 2\cos\frac{k(2a)}{2}\left[\lim_{x\to a}\frac{k}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{k(x-a)}{2}}{\frac{k(x-a)}{2}}\right]$$

Ojo: Si: $x \to a \Rightarrow (x - a) \to 0$

$\Rightarrow \frac{k(x-a)}{2} \to 0$

$$A = 2\cos ka\frac{k}{2}\left[\lim_{\frac{k(x-a)}{2}\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{k(x-a)}{2}}{\frac{k(x-a)}{2}}\right]$$

$\therefore\ A = k\cos ka[1] = k\cos ka$

32. Evaluar: $T = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{5}}\left(\dfrac{\tan 2x + \tan 3x}{\cos 2x + \cos 3x}\right)$

Resolución:

Evaluando para $x = \frac{\pi}{5}$, se obtiene:

$$T = \frac{\tan\frac{2\pi}{5} + \tan\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}} = \frac{\tan\frac{2\pi}{5} + \left(-\tan\frac{2\pi}{5}\right)}{\cos\frac{2\pi}{5} + \left(-\cos\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{0}{0}$$

Hagamos algunas transformaciones para levantar la indeterminación:

$$T = \lim_{x\to\frac{\pi}{5}} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(2x+3x)}{\cos 2x\cos 3x}}{2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$T = \lim_{x\to\frac{\pi}{5}} \frac{\operatorname{sen}5x}{2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos 2x\cos 3x}$$

$$T = \lim_{x\to\frac{\pi}{5}} \frac{2\operatorname{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2}}{2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos 2x\cos 3x}$$

$$T = \lim_{x\to\frac{\pi}{5}} \frac{\operatorname{sen}\frac{5x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos 2x\cos 3x}$$

Evaluando para $x = \frac{\pi}{5}$, se obtiene:

$$T = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}$$

$$T = \frac{1}{\cos 18^\circ\cos 72^\circ\cos 108^\circ} = \frac{1}{\cos 18^\circ\operatorname{sen}18^\circ(-\cos 72^\circ)}$$

$$T = \frac{2}{2\operatorname{sen}18^\circ\cos 18^\circ(-\cos 72^\circ)} = \frac{2}{\operatorname{sen}36^\circ(-\operatorname{sen}18^\circ)}$$

$$\therefore\ T = \frac{2}{\left(-\frac{1}{\csc 36^\circ}\right)\left(\frac{1}{\csc 18^\circ}\right)} = -2\csc 36^\circ\csc 18^\circ$$

33. Calcular: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}t}{\ln(2e^t - 1)}$

Resolución:

$\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{sen}t = 0$ y $\lim\limits_{t\to 0}\ln(2e^t - 1) = 0$

Aplicando L'Hospital tenemos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{\ln(2e^t - 1)} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\dfrac{2e^t}{2e^t - 1}} = \lim_{t\to 0}\frac{(2e^t - 1)\cos t}{2e^t}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{\ln(2e^t - 1)} = \lim_{t\to 0}\frac{(2e^t - 1)\cos t}{2e^t} = \frac{1}{2}$$

34. Hallar f'(x)

$f(x) = 4\sec x - 2\csc x$

Resolución:

$f'(x) = 4D_x(\sec x) - 2D_x(\csc x)$

$\therefore\ f'(x) = 4\sec x\tan x + 2\csc x\cot x$

35. Hallar f'(t)

$f(t) = 2t\cos t$

Resolución:

$f'(t) = 2tD_x(\cos t) + 2\cos tD_x(t)$

$f'(t) = 2t(-\operatorname{sen}t) + 2\cos t$

$\therefore\ f'(t) = 2(\cos t - t\operatorname{sen}t)$

36. Hallar f'(x)

$f(x) = 4x^2\cos x$

Resolución:

$f'(x) = 4x^2D_x(\cos x) + 4\cos xD_x(x^2)$

$f'(x) = 4x^2(-\operatorname{sen}x) + 4\cos x(2x)$

$f'(x) = -4x^2\operatorname{sen}x + 8x\cos x$

$\therefore\ f'(x) = 4x(2\cos x - x\operatorname{sen}x)$

37. Hallar g'(x)

$g(x) = x\operatorname{sen}x + \cos x$

Resolución:

$g'(x) = xD_x(\operatorname{sen}x) + \operatorname{sen}xD_x(x) + D_x(\cos x)$

$g'(x) = x\cos x + \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x \quad \therefore\ g'(x) = x\cos x$

38. Hallar: g'(y)

$g(y) = 3\operatorname{sen}y - y\cos y$

Resolución:

$g'(y) = 3D_y(\operatorname{sen}y) - yD_y(\cos y) - \cos yD_y(y)$

$g'(y) = 3\cos y + y\operatorname{sen}y - \cos y$

$\therefore\ g'(y) = 2\cos y + y\operatorname{sen}y$

39. Hallar: h'(x)

$h(x) = 4\operatorname{sen}x\cos x$

Resolución:

$h'(x) = 4\operatorname{sen}xD_x(\cos x) + 4\cos xD_x(\operatorname{sen}x)$

$h'(x) = 4\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x) + 4\cos x(\cos x)$

$h'(x) = -4\operatorname{sen}^2x + 4\cos^2x$

$h'(x) = 4(\cos^2x - \operatorname{sen}^2x) \quad \therefore\ h'(x) = 4\cos 2x$

40. Hallar f'(x)

$f(x) = x^2\operatorname{sen}x + 2x\cos x$

Resolución:

$f'(x) = x^2D_x(\operatorname{sen}x) + \operatorname{sen}xD_x(x^2) +$
$\quad 2xD_x(\cos x) + 2\cos xD_x(x)$

$f'(x) = x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x - 2x\operatorname{sen}x + 2\cos x$

$\therefore\ f'(x) = \cos x(x^2 + 2)$

41. Hallar f'(x)

$f(x) = x^2\cos x - 2x\operatorname{sen}x - 2\cos x$

Resolución:

$f'(x) = x^2D_x(\cos x) + \cos xD_x(x^2) - 2xD_x(\operatorname{sen}x) -$
$\quad 2\operatorname{sen}xD_x(x) - 2D_x(\cos x)$

$f'(x) = -x^2\text{sen}x + 2x\cos x - 2x\cos x - 2\text{sen}x + 2\text{sen}x$

$\therefore f'(x) = -x^2\text{sen}x$

42. Hallar h'(y)

$h(y) = y^3 - y^2\cos y + 2y\text{sen}y + 2\cos y$

Resolución:

$h'(y) = 3y^2 - y^2D_y(\cos y) - \cos_yD_y(y^2) + 2yD_y(\text{sen}y) + 2\text{sen}yD_y(y) + 2D_y(\cos y)$

$h'(y) = 3y^2 + y^2\text{sen}y - 2y\cos y + 2y\cos y + 2\text{sen}y - 2\text{sen}y$

$\therefore h'(y) = y^2(3 + \text{sen}y)$

43. Hallar f'(x)

$f(x) = 3\sec x\tan x$

Resolución:

$f'(x) = 3\sec xD_x(\tan x) + 3\tan xD_x(\sec x)$

$f'(x) = 3\sec x(\sec^2x) + 3\tan x(\sec x\tan x)$

$\therefore f'(x) = 3\sec^3x + 3\sec x\tan^2x$

44. Hallar f'(t)

$f(t) = \text{sen}t\tan t$

Resolución:

$f'(t) = D_t(\text{sen}t)\tan t + \text{sen}tD_t(\tan t)$

$f'(t) = \cos t\tan t + \text{sen}t(\sec^2t)$

$f'(t) = \text{sen}t + \text{sen}t\sec^2t$

$\therefore f'(t) = \text{sen}t(1 + \sec^2t)$

45. Hallar: $D_x(\cos x\cot x)$

Resolución:

$g'(x) = \cos xD_x(\cot x) + \cot xD_x(\cos x)$

$g'(x) = \cos x(-\csc^2x) + \cot x(-\text{sen}x)$

$g'(x) = -\cos x\csc^2x - \text{sen}x\cot x$

$\therefore g'(x) = -\cos x(\csc^2x + 1)$

46. Hallar: $D_z\left(\dfrac{2\cos z}{z+1}\right)$

Resolución:

$$g'(z) = \frac{(z+1)D_z(2\cos z) - 2\cos zD_z(z+1)}{(z+1)^2}$$

$$g'(z) = \frac{2(z+1)(-\text{sen}z) - 2\cos z}{(z+1)^2}$$

$$\therefore g'(z) = -\frac{2(z+1)\text{sen}z - 2\cos z}{(z+1)^2}$$

47. Hallar: $D_t\dfrac{(\text{sen}t)}{t}$

Resolución:

$$h'(t) = \frac{tD_t(\text{sen}t) - \text{sen}tD_t(t)}{t^2} \therefore h'(t) = \frac{t\cos t - \text{sen}t}{t^2}$$

48. Hallar: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen}x}{1-\cos x}\right)$

Resolución:

$$f'(x) = \frac{(1-\cos x)D_x(\text{sen}x) - \text{sen}xD_x(1-\cos x)}{(1-\cos)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-\cos x)\cos x - \text{sen}x(\text{sen}x)}{(1-\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \cos^2x - \text{sen}^2x}{(1-\cos x)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x - 1}$$

49. Hallar: $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1+\text{sen}y}{1-\text{sen}y}\right)$

Resolución:

$$f'(y) = \frac{(1-\text{sen}y)D_y(1+\text{sen}y) - (1+\text{sen}y)D_y(1-\text{sen}y)}{(1-\text{sen}y)^2}$$

$$f'(y) = \frac{(1-\text{sen}y)\cos y - (1+\text{sen}y)(-\cos y)}{(1-\text{sen}y)^2}$$

$$f'(y) = \frac{\cos y - \text{sen}y\cos y + \cos y + \text{sen}y\cos y}{(1-\text{sen}y)^2}$$

$$\therefore f'(y) = \frac{2\cos y}{(1-\text{sen}y)^2}$$

50. Hallar: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen}x - 1}{\cos x + 1}\right)$

Resolución:

$$f'(x) = \frac{(\cos x+1)D_x(\text{sen}x-1) - (\text{sen}x-1)D_x(\cos x+1)}{(\cos x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x+1)\cos x - (\text{sen}x-1)(-\text{sen}x)}{(\cos x+1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1 + \cos x - \text{sen}x}{(1+\cos x)^2}$$

51. Hallar

$D_z(z^2 + \cos z)(2z - \text{sen}z)$

Resolución:

$f'(z) = (z^2 + \cos z)D_x(2z - \text{sen}z) + (2z - \text{sen})D_z(z^2 + \cos z)$

$\therefore f'(z) = (z^2 + \cos z)(2 - \cos z) + (2z - \text{sen}z)(2z - \text{sen}z)$

52. Hallar: $D_t\dfrac{2\csc t - 1}{\csc t + 2}$

Resolución:

$$g'(t) = \frac{(\csc t+2)D_t(2\csc t-1) - (2\csc t-1)D_t(\csc t+2)}{(\csc t+2)^2}$$

$$g'(t) = \frac{(\csc t+2)(-2\csc t\cot t) - (2\csc t-1)(-\csc t\cot t)}{(\csc t+2)^2}$$

$$g'(t) = \frac{-2\csc^2 t\cot t - 4\csc t\cot t + 2\csc^2 t\cot t - \csc t\cot t}{(\csc t + 2)^2}$$

$$\therefore\ g'(t) = \frac{-5\csc t\cot t}{(\csc t + 2)^2}$$

53. Hallar: $D_z \dfrac{\text{Tan}z + 1}{\text{Tan}z - 1}$

Resolución:

$$f'(z) = \frac{(\tan z - 1)D_z(\tan z + 1) - (\tan z + 1)D_z(\text{Tan}z - 1)}{(\tan z - 1)^2}$$

$$f'(z) = \frac{(\tan z - 1)\sec^2 z - (\tan z + 1)\sec^2 z}{(\tan z - 1)^2}$$

$$f'(z) = \frac{\tan z\sec^2 z - \sec^2 z - \tan z\sec^2 z - \sec^2 z}{(\tan z - 1)^2}$$

$$\therefore\ f'(z) = \frac{-2\sec^2 z}{(\tan z - 1)^2}$$

54. Hallar: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \text{sen}\theta}{\tan^3\theta}$

Resolución:

$\lim\limits_{\theta \to 0} \theta - \text{sen}\theta = 0$ y $\lim\limits_{\theta \to 0} \tan^3\theta = 0$

Aplicando L'Hopital tenemos:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta - \text{sen}\theta}{\tan^3\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{3\tan^2\theta\sec^2\theta}$$

Como:

$$\frac{1 - \cos\theta}{\dfrac{3\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)} = \frac{\cos 4\theta(1 - \cos\theta)}{3(1 - \cos^2\theta)} = \frac{\cos^4\theta}{3(1 + \cos\theta)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta - \text{sen}\theta}{\tan^3\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^4\theta}{3(1 + \cos\theta)} = \frac{1}{6}$$

55. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x}$

Resolución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x}$$

$$\therefore\ \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} \lim_{x \to 0} \text{sen}x = 1(0) = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Marcar lo incorrecto:

A) $y = \cot x - \tan x \Rightarrow y' = -4\csc^2 2x$

B) $y = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x \Rightarrow y' = 3\cos 3x$

C) $y = \csc x - \cot x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

D) $y = \tan 2x \tan x \Rightarrow y' = 2\sec 2x \tan 2x$

E) $y = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x \Rightarrow y' = 2\operatorname{sen}2x$

2. Si $H(x) = x^3\operatorname{sen}x + 3x^2\cos x - 6\cos x - 6x\operatorname{sen}x$. calcular: $H'(x)$

A) $x^3\cos x$ B) $x^3\operatorname{sen}x$ C) $-x^3\cos x$
D) $-x^3\operatorname{sen}x$ E) $x^2\cos x$

3. Si $F(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, calcular M sabiendo que:

$F(x) + 2F'(x) = M\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

A) $2\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $-\sqrt{2}$ E) 2

4. Calcular:

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x - \cos a}{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}a}$$

A) $-\tan a$ B) $-\cot a$ C) $\tan a$
D) $\cot a$ E) 1

5. Si $G(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 4x}{16}$, calcular: $G''(x)$.

A) $2\operatorname{sen}^2 3x$ B) $2\operatorname{sen}^2 x$ C) $2\operatorname{sen}^2 2x$
D) $2\operatorname{sen}^2 6x$ E) $2\operatorname{sen}^2 4x$

6. Si $F(x) = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x$, calcular $F'(\pi/2)$.

A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) 0

7. Si $F(x) = \operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}2x + 3\operatorname{sen}3x + \ldots + n\operatorname{sen}nx$. Calcular: $F'(0)$.

A) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ B) $\frac{n(n+1)}{2}$

C) $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ D) $\frac{n(n-1)}{2}$

E) $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$

8. Si $F(x) = 4\operatorname{sen}^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$, calcular $F'(x)$

A) $-6\cos 2x\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

B) $-6\cos 2x\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

C) $-6\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

D) $-6\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

E) $6\cos 2x\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

9. Calcular:

$$T = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}x}$$

A) -1 B) -2 C) 0
D) 1 E) 2

10. Si $G(x) = \operatorname{sen}x(A\operatorname{sen}x + B\cos x)$, calcular la suma del mínimo valor de $G(x)$ y la mitad del máximo valor de $G'(x)$.

A) $A/2$ B) $-A/2$ C) $B/2$
D) $-B/2$ E) 0

11. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 5x}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

12. Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos \pi x + 1}{(x-1)^2}$$

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) π^2 C) $\frac{\pi^2}{4}$

D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

13. Calcular:

$$S = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \cot x\right)$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

14. Calcular:

$$T = \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}(2x-a) - \operatorname{sen}a}$$

A) $\cos a$ B) $\tan a$ C) $\cot a$
D) $\sec a$ E) $\operatorname{sen}a$

15. Calcular:

$$V = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}x - 1}{1 - \sqrt{2}\cos x}$$

A) 1 B) -1 C) 0
D) $\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{2}$

16. Si $F(x) = 16\operatorname{sen}^5 x - 20\operatorname{sen}^3 x$, calcular $A + B$ sabiendo que: $F'(x) = A\cos x + B\cos 5x$

A) 0 B) 10 C) −10
D) 12 E) −12

17. Calcular:

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$$

A) $-4\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ B) $4\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ C) $4\cos\frac{a}{2}$
D) $-4\cos\frac{a}{2}$ E) $-2\operatorname{sen}\frac{a}{2}$

18. El área de la región comprendida por la curva y = senx y el eje x en [0; 2π] se calcula de la siguiente manera:

$$S=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$

Calcular S.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

19. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x^2}$$

A) −1/2 B) 1/2 C) 1/4
D) −1/4 E) 1

20. Si F(x) = Asen2x + Bcos3x, calcular: A + B sabiendo que $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=10$ y F''(2π) = 18.

A) −10 B) −12 C) 8
D) 10 E) 0

21. Calcular:

$$S=\lim_{x\to\pi}\frac{\tan 4x-\tan 2x}{\tan 3x-\tan x}$$

A) 0 B) 1 C) −1
D) 2 E) −2

22. Si F(x) = 1 + senx + cosx, calcular:
F(x) + F'(x) + F'' (x) + F''' (x)

A) 1 B) 2senx C) 2cosx
D) −2senx E) −2cosx

23. Si $G(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2x\cos^2x$, calcular G'(x).

A) sen4x B) −sen4x C) cos4x
D) −cos4x E) −sen2x

24. Si

$$H(x)=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+1,$$

calcular: H'(x)

A) $2\operatorname{sen}^5x$ B) $-2\operatorname{sen}^5x$ C) $2\operatorname{sen}^6x$
D) 2senx E) sen^5x

25. Calcular:

$$S=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-0,5\pi}{\cos x}$$

A) 1 B) −1 C) 0
D) 2 E) −2

26. Calcular:

$$T=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) −1 E) 0

27. Calcular:

$$V=\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{\tan x-\tan a}$$

A) $\cos^3a$ B) sen^3a C) $\cos^2a$
D) sen^2a E) 1

28. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 4x}{x\operatorname{sen}3x}$$

A) 4/3 B) 8/3 C) 16/3
D) 1/3 E) 2/3

29. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}4x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\operatorname{sen}x}$$

A) 8 B) 6 C) 4,25
D) 4,5 E) 4,8

30. Si $H(x) = \operatorname{sen}^6x + \cos^6x+1$, calcular el valor de A, sabiendo que H'(x) = Asen4x

A) −8 B) −12 C) 10
D) 16 E) −16

31. Calcular:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

A) $e^{\frac{\pi}{2}}$ B) $e^{\frac{\pi}{3}}$ C) $e^{\frac{2}{\pi}}$
D) $e^{\frac{3}{\pi}}$ E) e^{π}

32. Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[2(1+\operatorname{sen}x)\operatorname{versx}\right]^{\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen}2x}}$

A) $e^{\sqrt{2}}$ B) $e^{-2\sqrt{2}}$ C) $e^{-\sqrt{2}}$
D) $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ E) $e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

33. Calcular:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}3x+\cos\frac{x}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x-1}$$

A) −9 B) −8 C) −3
D) −4 E) 0

34. Si se cumple la siguiente condición:
$2\cot 2x = m(x) + \cot x$
Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} 3 - m(x)$

A) 0 B) 2 C) 3
D) 4 E) −1

35. Calcular el límite de la siguiente expresión:

$$M = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(2\cos\theta)}{-\operatorname{sen}\left(\frac{99\pi}{2}+\theta\right)}$$

A) −1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

36. Se define la siguiente función:

$f(x) = \dfrac{\tan(mx) - \operatorname{sen}(mx)}{m^2x^3}$, / m es una constante.

Determinar el valor de f(x) cuando x se aproxima a 0 tanto por la derecha como por la izquierda.

A) −m B) 0 C) m
D) $\frac{m}{2}$ E) $\frac{m}{3}$

37. Calcular el límite de la siguiente expresión:

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1-\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

38. Evaluar R para x = 0,

sí $R = \dfrac{x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos x(\operatorname{sen}2x)^2}$

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

39. Si $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, calcular:

$$E = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x)$$

A) π B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{5\pi}{2}$

40. Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

41. Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x\sqrt{\csc x - \cot x}}{3x\tan x\sqrt{\operatorname{sen}x}}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{7}$

42. Sea la siguiente función:

$$f(\theta) = \frac{2\cot 2\theta + \sec^2\theta - 2\csc 2\theta}{1+\cos 4\theta}$$

calcular:

$A = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}} f(\theta)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

43. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(x+3)\operatorname{sen}\pi x}$$

A) $-\pi$ B) $-\pi^2$ C) $-\pi^{-1}$
D) $-\pi^{-3}$ E) $-\pi^{1/2}$

44. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva cuya ecuación es $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$, en el punto de abscisa $\frac{\pi}{6}$.

A) $y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right); y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

B) $y = -\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right); y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

C) $y = -\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right); y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

D) $y = x - \frac{\pi}{6}; y = \frac{\pi}{6} - x$

E) $y - 1 = \sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right);\ y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

45. Calcular el valor de M cuando x se aproxima a cero.

$$M = \frac{3x^2\tan x}{(\operatorname{sen}3x)^3}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{9}$

46. Calcular la expresión M siendo:

$$M = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}\right)}{\operatorname{sen}\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1

D) $\frac{1}{2}$ E) -1

47. Sea la función: $f(x) = 2\text{sen}x + 4$,

calcular: $M = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{f(x-\theta) - f(x)}{\theta}$

A) cosx B) senx C) cosx

D) −senx E) 2cosx

48. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}3x - 3\tan x + 4\text{sen}^3 x}{x^2}$$

A) −2 B) −3 C) 0

D) $-\frac{5}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

49. Calcular la siguiente expresión:

$$M = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{4\text{sen}^2 \frac{x}{2} - 1}{2 - 3\text{sen}\frac{x}{2} - \cos x}$$

A) −5 B) −4 C) −2

D) −1 E) 0

50. Calcular: $N = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\text{sen}(\tan\alpha)}{\text{sen}\alpha}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5/2

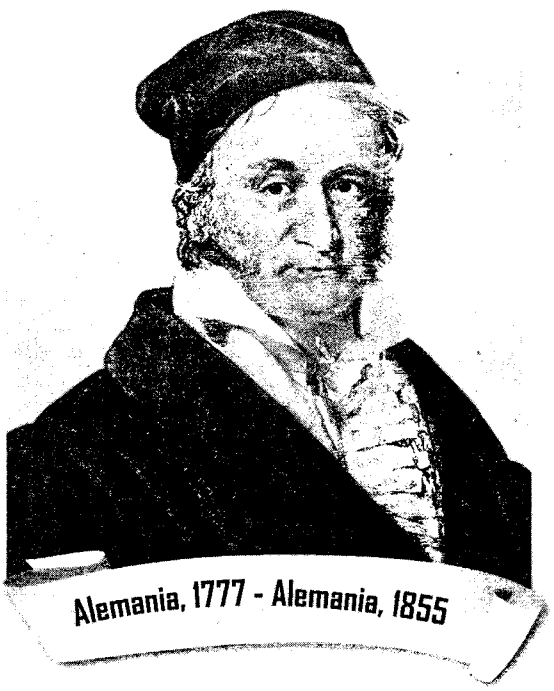
CLAVES

1. E	8. A	15. A	22. A	29. A	36. E	43. C	50. A
2. A	9. A	16. A	23. B	30. B	37. B	44. A	
3. A	10. A	17. A	24. A	31. C	38. A	45. E	
4. A	11. C	18. B	25. B	32. B	39. A	46. C	
5. C	12. A	19. B	26. A	33. A	40. A	47. E	
6. C	13. C	20. A	27. A	34. C	41. D	48. C	
7. A	14. E	21. C	28. C	35. E	42. B	49. B	

Números complejos aplicados a la trigonometría

14 capítulo

Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 30 de abril de 1777-Gotinga, 23 de febrero de 1855) fue un matemático, astrónomo, geodesta y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluido la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado «el príncipe de los matemáticos» y «el matemático más grande desde la antigüedad», Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la Historia.



Carl Gauss

Fue el primero en utilizar el nombre de números complejos. En 1799 se doctoró en Filosofía por la Universidad de Helmstedt con una tesis titulada «Nueva demostración del teorema que dice que toda función algebraica racional puede descomponerse en factores de primer o segundo grado con coeficientes reales». Pero en realidad, no se trataba de una nueva demostración, sino de la primera demostración completa de la historia del teorema fundamental del álgebra. Ese teorema afirma que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz compleja, de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, la raíz cuadrada de -1.

Fuente: Wikipedia

NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo z es cualquier número de la forma a + bi donde "a" y "b" son números reales, "i" es la unidad imaginaria con la propiedad de que $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$). Generalmente "a" un número complejo se le representa por "z", al número real a se le denomina parte real de "z" y se le denota por Re(z) y al número real "b" se le denomina parte imaginaria de "z" y se le denota por Im(z).

Número Complejo : z = a + bi
Parte Real : Re(z) = a
Parte Imaginaria : Im(z) = b

Si a = 0 y b ≠ 0 entonces z = bi. En este caso se dice que "z" es un número imaginario puro.

Si a ≠ 0 y b = 0 entonces z = a. En este caso se dice que "z", es un número real puro o simplemente un número real.

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dos números complejos son iguales si y solo si sus partes reales e imaginarias son respectivamente iguales:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Se dice que dos números complejos son conjugados si y solo sí difieren en el signo de su partes imaginarias. El conjugado de un número complejo "z" se representa por $\bar{z} \vee z^*$.

Si: z = a + bi; su conjugado es: $\bar{z} = a - bi$

Ejemplos:

- $z_1 = 2 + 3i$; su conjugado es: $\bar{z}_1 = 2 - 3i$
- $z_2 = 5i$; su conjugado es $\bar{z}_2 = -5i$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

I. Adición: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

II. Sustracción: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

III. Multiplicación: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

IV. División: $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \dfrac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

Nota

La multiplicación y división de números complejos obedece a las reglas del álgebra, teniendo presente que: $i^2 = -1$.

Ejemplos:

1. Hallar la suma y diferencia de: $6 + 4i \wedge -7 + 3i$
   a) $(6 + 4i) + (-7 + 3i) = (6 - 7) + (4 + 3)i = -1 + 7i$
   b) $(6 + 4i) - (-7 + 3i) = (6 + 7) + (4 - 3)i = 13 + i$

2. Si: $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 3 + 5i$, calcular el producto y la división: a) $z_1 z_2$ b) z_1/z_2

   a) $z_1z_2 = (2 + 3i)(3 + 5i) = 6 + 9i + 10i + 15i^2 = 6 + 19i - 15 = -9 + 19i$

   b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 + 3i}{3 + 5i}$ En este caso se multiplica al numerador y denominador por el conjugado del denominador:

   $$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2 + 3i}{3 + 5i}\right)\left(\frac{3 - 5i}{3 - 5i}\right) = \frac{6 + 9i - 10i - 15i^2}{9 + 15i - 15i - 25i^2}$$

   $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6 - i + 15}{9 + 25} = \frac{21 - i}{34}$$

3. $z_1 = 1 + i \wedge z_2 = 3 + 4i$; calcular: $E = \dfrac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 + z_2}$

   Resolución:

   $$E = \frac{(1 - i) + (3 - 4i)}{(1 + i) + (3 + 4i)} = \left(\frac{4 - 5i}{4 + 5i}\right)\left(\frac{4 - 5i}{4 - 5i}\right) = \frac{16 - 20i - 20i + 25i^2}{16 + 20i - 20i - 25i^2}$$

   $$E = \frac{16 - 40i - 25}{16 + 25} = \frac{-9 - 40i}{41} = -\frac{9 + 40i}{41}$$

Nota

La raíz cuadrada de un número real negativo es un número imaginario puro.

$\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{-b} = i\sqrt{b}$; $b \in \mathbb{R}^+$

Por ejemplo: $\sqrt{-9} = i\sqrt{9} = 3i$

$\sqrt{-8} = i\sqrt{8} = 2\sqrt{2}i$

Hay que destacar que es diferente $x^2 = -9 \wedge x = \sqrt{-9}$, en el primer caso hay dos soluciones $x_1 = -3i \wedge x = 3i$, en el segundo caso x = 3i.

Ejemplos:

1. Calcular a y b, sí: $3a - 4bi = 9 + 12i$
   En el caso de igualdad de números complejos se igualan las partes reales e imaginarias respectivamente:
   $$3a - 4bi = 9 + 12i \Rightarrow \begin{cases} 3a = 9 \Rightarrow a = 3 \\ -4b = 12 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

2. Calcular "m" y "n", si $m^2 - n^2 + 2mni = 24 + 10i$
   Procedemos igual que en el caso anterior:
   $\begin{cases} m^2 - n^2 = 24 \\ 2mn = 10 \end{cases}$ Resolviendo el sistema se obtiene dos soluciones:
   $$\begin{cases} m_1 = 5 \\ n_1 = 1 \end{cases} \wedge \begin{cases} m_2 = -5 \\ n_2 = -1 \end{cases}$$

3. Si: $z_1 = 2 - 3i \wedge z_2 = -1 + i$
   Calcular: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $2z_1 - 3z_2$; z_1z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$
   $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-1 + i) = 1 - 2i$
   $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-1 + i) = 3 - 4i$
   $2z_1 - 3z_2 = (4 - 6i) - (-3 + 3i) = 7 - 9i$
   $z_1z_2 = (2 - 3i)(-1 + i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 = 1 + 5i$
   $$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2 - 3i}{-1 + i}\right)\left(\frac{-1 - i}{-1 - i}\right) = \frac{-2 + 3i - 2i + 3i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{-5 + i}{2}$$

4. Si $z = \frac{1-4i}{3+4i}$, hallar: $Re(\bar{z})$ y $Im(\bar{z})$

$$z = \left(\frac{1-4i}{3+4i}\right)\left(\frac{3-4i}{3-4i}\right) = \frac{3-12i-4i+16i^2}{9+12i-12i-16i^2}$$

$$= \frac{-13-16i}{25}$$

$$z = \frac{-13}{25} - \frac{16}{25}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{-13}{25} + \frac{16}{25}i$$

$$\therefore\ Re(\bar{z}) = -\frac{13}{25} \wedge Im(\bar{z}) = \frac{16}{25}$$

POTENCIAS DE i

Sabemos que: $i^2 = -1$

Entonces:

$i^3 = i^2 i = (-1)i \Rightarrow i^3 = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) \Rightarrow i^4 = 1$

$i^5 = i^4 i = (1)i \Rightarrow i^5 = i$

$i^6 = i^4 i^2 = (1)(-1) \Rightarrow i^6 = -1$

$i^7 = i^6 i = (-1)(i) \Rightarrow i^7 = -i$

$i^8 = i^4 i^4 = (1)(1) \Rightarrow i^8 = 1$

En general se cumple que: $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

$i^{4n} = 1;\quad i^{4n+1} = i;\quad i^{4n+2} = -1;\quad i^{4n+3} = -i$

i^{36} (como 36 es $\overset{\circ}{4}$) $\Rightarrow i^{36} = 1$

i^{27} (como 27 es $\overset{\circ}{4} + 3$) $\Rightarrow i^{27} = -i$

i^{42} (como 42 es $\overset{\circ}{4} + 2$) $\Rightarrow i^{42} = -1$

i^{55} (como 55 es $\overset{\circ}{4} + 1$) $\Rightarrow i^{55} = i$

i^{-7} (como -7 es $\overset{\circ}{4} + 1$) $\Rightarrow i^{-7} = i$

i^{-12} (como -12 es $\overset{\circ}{4}$) $\Rightarrow i^{-12} = 1$

Nota

Algunas de las aplicaciones de las potencias de "i" la observamos al elevar un número complejo "z" a una potencia "n" positiva.

Sea: $z = a + bi$

$$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2$$
$$= a^2 + 2abi + b^2(-1)$$
$$\Rightarrow z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3$$
$$= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + 3ab^2i^2 + b^3i^3$$
$$= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2(-1) + b^3(i)$$
$$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 + b^3i$$
$$\Rightarrow z^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b + b^3)i$$

Ejemplos:

1. Si: $z = 2 - i$, calcular: $z^2 - 3z + 1$

   Reemplazamos:

   $z^2 - 3z + 1 = (2-i)^2 - 3(2-i) + 1 = 4 - 4i + i^2 - 6 + 3i + 1$

   $= 4 - 4i + (-1) - 6 + 3i + 1 = -2 - i$

2. Si: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcular: $z^3 + 1$

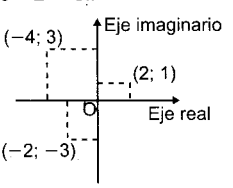
$$z^3 + 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 + 1$$
$$= \frac{1}{8} + 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 + 1$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}i^2\right) + \frac{3\sqrt{3}}{8}i^3 + 1$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8}(-1) - \frac{3\sqrt{3}}{8}i + 1$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{9}{8} + 1 = 0$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Todo número complejo $z = a + bi$ se puede presentar gráficamente (en un sistema bidimensional de coordenadas) como un punto cuyas coordenadas son (a; b).

Al sistema bidimensional de coordenadas en el cual los puntos se interpretan como números complejos (y viceversa) se le denomina "plano complejo o diagrama de Argand". En este sistema al eje horizontal se le denomina eje real y al eje vertical se le denomina eje imaginario.

Por ejemplo (en la figura adjunta) al número $2 + i$, le corresponde el punto (2; 1), al número $-4 + 3i$ le corresponde el punto $(-4; 3)$. También es correcto afirmar (en el plano complejo) que al punto $(-2; -3)$ le corresponde el número $-2 - 3i$.

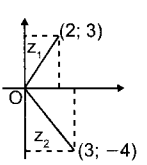


MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi$, entonces el módulo o valor absoluto de "z", se representa por $|z| \vee |a + bi|$ y es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Geométricamente este valor se interpreta como la distancia del origen (plano complejo) a la gráfica del número:

Ejemplos:



a) $z_1 = 2 + 3i$

$\Rightarrow |z_1| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 13$

b) $z_2 = 3 - 4i$

$\Rightarrow |z_2| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Observaciones

1. El módulo de un número complejo "z" es igual al módulo de su conjugado.

$$z = |\bar{z}|$$

Ejemplo:

$z = 5 + 12i \Rightarrow |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$\bar{z} = 5 - 12i \Rightarrow |5 - 12i| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$

2.° El producto de un número complejo "z" por su conjugado $\bar{z}$ es igual al cuadrado del módulo del número complejo: $z\bar{z} = |z|^2$

Ejemplo:

Sea: $z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 4i$

$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 12i - 12i - 16i^2 = 25$

$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = |3 + 4i|^2 = |\sqrt{3^2 + 4^2}|^2 = 25$

3. Cuando un número complejo z, se representa por a + bi se le denomina forma rectangular, forma cartesiana o forma biónica de un número complejo.

4. Otras propiedades de un número complejo y su conjugado son los siguientes:

Sea z, z_1 y z_2 números complejos cualquiera se cumple que:

a) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ b) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

c) $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ d) $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

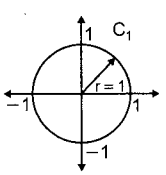
e) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ f) Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

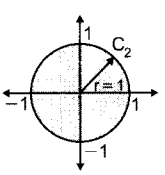
g) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{(\lambda z)} = \lambda \bar{z}$ h) $\forall n \in z, z \neq 0$ $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O GEOMÉTRICA DE CONJUNTO ESPECIALES

1. Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de todos los números complejos $C_1 = \{z/z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| = 1\}$ es el conjunto de puntos de una circunferencia con radio igual a 1 y centro 0.

2. $C_2 = \{z/z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| = 1\}$ es el conjunto de puntos de un círculo con radio 1 y centro 0.





3. $\{z/z \in \mathbb{C} \wedge |z - z_0| = r, r > 0\}$ es el conjunto de puntos de una circunferencia de centro z_0 y radio "r".

Ejemplos:

- $|z - 2i| = 2$

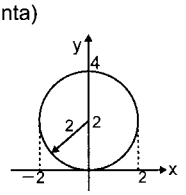
  Representa a una circunferencia de radio 2 y centro (0; 2) (ver figura adjunta)

  En forma cartesiana es:

  $|x + yi - 2i| = 2$

  $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 2$

  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



- $|z + 1| = 3$

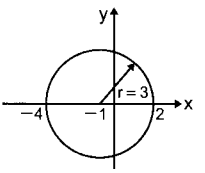
  Representa a una circunferencia de radio 3 y centro (−1; 0).

  En forma cartesiana:

  $|x + yi + 1| = 3$

  $\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 3$

  $(x + 1)^2 + y^2 = 9$



4. $\{z/z \in \mathbb{C} \wedge |z - z_0| \leq r, r > 0\}$ es el conjunto de puntos de un círculo de centro z_0 y radio "r".

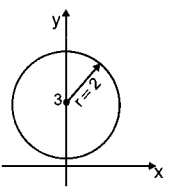
Ejemplo:

- $|z - 3i| \leq 2$

  Representa un círculo de radio 2, centro (0; 3)

  En forma cartesiana:

  $x^2 + (y - 3)^2 \leq 4$



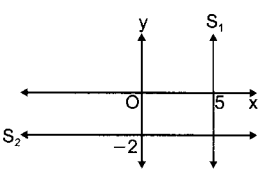
5. $\{z/z \in \mathbb{C} \wedge \text{Re}(z) = a\}$ representa a una recta vertical, cuya ecuación es x = a

$\{z/z \in \mathbb{C} \wedge \text{Im}(z) = b\}$ representa a una recta horizontal, cuya ecuación es y = b

Ejemplo:

$S_1 = \{z/z \in \mathbb{C} \wedge \text{Re}(z) = 5\}$

$S_2 = \{z/z \in \mathbb{C} \wedge \text{Im}(z) = -2\}$



Existen otros casos cuya representaciones geométricas requieren del conocimiento de conceptos previos de álgebra y geometría analítica.

Aplicaciones:

1. Representar gráficamente:

   $S = \{z/z \in \mathbb{C} \wedge |z - 2| + |z + 2| = 8\}$

   Resolución:

   Sabemos que: Si z = x + yi, entonces:

   $z - 2 = (x - 2) + yi \Rightarrow |z - 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

   $z + 2 = (x + 2) + yi \Rightarrow |z + 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

   Entonces: $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 8$

   $\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 8 - \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

   Elevando al cuadrado:

   $x^2 + 4x + 4 + y^2 = 64 - 16\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + x^2 - 4x + 4 + y^2$

   Simplificando y ordenando:

   $16\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 64 - 8x$

   $2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 8 - x$

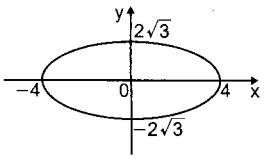
   Elevando al cuadrado:

   $4(x^2 - 4x + 4 + y^2) = 64 - 16x + x^2$

   $4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = 64 - 16x + x^2$

   $3x^2 + 4y^2 = 48 \Rightarrow \frac{3x^2}{48} + \frac{4y^2}{48} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

Esta es la ecuación de una elipse, con centro en (0; 0):
Eje mayor: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$
Eje menor: $b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Representación Gráfica:



$|z - 2| + |z + 2| = 8$

2. Si "z" es una número complejo y satisface: $\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = 1$ ¿qué se puede afirmar de z?

Resolución:

Sea: $z = x + yi$

$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = 1 \Rightarrow |1 - z| = |1 + z|$

$\Rightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$(1 - x)^2 + y^2 = (1 + x)^2 + y^2 \Rightarrow (1 - x)^2 = (1 + x)^2$

$\Rightarrow 1 - 2x + x^2 = 1 + 2x + x^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

Esto significa que: $z = 0 + yi = yi$

Entonces: "z" es número imaginario puro.

3. Hallar el número complejo "z" que satisface simultáneamente las igualdades:

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \wedge \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$

Resolución:

Sea: $z = a + bi$, entonces:

$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1 \Rightarrow |z - 4| = |z - 8|$

$\Rightarrow |a + bi - 4| = |a + bi - 8|$

$\Rightarrow \sqrt{(a-4)^2 + b^2} = \sqrt{(a-8)^2 + b^2}$, elevando al cuadrado:

$a^2 - 8a + 16 + b^2 = a^2 - 16a + 64 + b^2 \Rightarrow 8a = 48$

$\Rightarrow a = 6$

Analizamos la otra igualdad, observemos que:

$z = 6 + bi$

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \Rightarrow \left|\frac{6+bi-12}{6+bi-8i}\right| = \frac{5}{3}$

$\frac{\sqrt{(-6)^2 + b^2}}{\sqrt{6^2 + (b-8)^2}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{36 + b^2}{36 + (b-8)^2} = \frac{25}{9}$

$\Rightarrow 324 + 9b^2 = 900 + 25(b^2 - 16b + 64)$

Simplificando y ordenando:

$16b^2 - 400b + 2176 = 0$

$b^2 - 25b + 136 = 0 \Rightarrow (b - 17)(b - 8) = 0$

Dos soluciones: $b = 17 \vee b = 8$

Por la tanto hay dos números complejos que satisfacen ambas igualdades:

$z_1 = 6 + 17i \wedge z_2 = 6 + 8i$

4. Hallar el número complejo "z", tal que:
$|z - 1| = |z + 1| = |z - i\sqrt{3}|$

Resolución:

Sea: $z = a + bi$

$\Rightarrow |z - 1| = |z + 1| \Rightarrow |a + bi - 1| = |a + bi + 1|$

$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$, elevando al cuadrado:

$a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow z = 0 + bi$

Ahora resolvemos: $|z + 1| = |z - i\sqrt{3}|$

$\Rightarrow |bi + 1| = |bi - i\sqrt{3}|$

$\Rightarrow \sqrt{1 + b^2} = \sqrt{(b - \sqrt{3})^2} \Rightarrow 1 + b^2 = b^2 - 2\sqrt{3}b + 3$

$\Rightarrow 2b\sqrt{3} = 2 \Rightarrow b\sqrt{3} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ El número complejo es: $z = \frac{\sqrt{3}}{3}i$

5. Representar geométricamente $z \leq |z + i| \leq 3$

Resolución:

Sea: $z = x + yi \Rightarrow |z + i| \leq 3 \Rightarrow |x + yi + i| \leq 3$

$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 3 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 9$ es un círculo

Con centro (0; −1) y radio 3. (Figura 1).

$2 \leq |z + i| \Rightarrow 2 \leq |x + yi + i| \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

$4 \leq x^2 + (y+1)^2$.

Representa el conjunto de puntos exteriores a la circunferencia de centro (0; −1) y radio 2 (Figura 2).

La respuesta del problema será la intersección de estos dos conjuntos (Figura 3).

$|z + i| \leq 3$

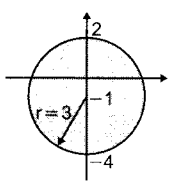


Figura 1

$|z + 1| \geq 2$

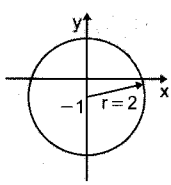


Figura 2

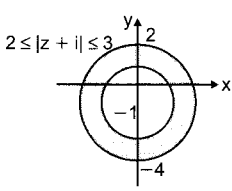
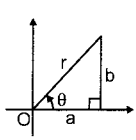


Figura 3

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO



Sea $z = a + bi$ un número complejo diferente de cero y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Observamos del gráfico que:

$$a = r\cos\theta \wedge b = r\,\text{sen}\theta$$

Entonces el número $z = a + bi$

se convierte en: $z = r\cos\theta + (r\,\text{sen}\theta)i$

Ordenando: $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ ...(1)

A la expresión se le denomina forma polar o trigonométrica de "z". Recordar que "r" es el módulo o valor absoluto de "z" y el ángulo θ se le denomina argumento de z y se le representa por arg(z).

Ejemplo:

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$ (forma cartesiana de z) lo queremos expresar en su forma polar entonces primero graficamos y hallamos su módulo y luego calculamos el argumento.

$|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$

$\theta = \arg(z) = \arctan \sqrt{3}/1 = 60°$

Entonces: $z = 1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}60°)$

$\Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

Observaciones

1. Otra notación que se emplea frecuentemente al expresar un número complejo en su forma polar es:
   $z = r\text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$
   Por ejemplo:
   $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ es igual a $z = 5\text{cis}\frac{\pi}{4}$
   y viceversa, $z = 3\text{cis}50°$ es igual a
   $z = 3(\cos 50° + i\text{sen}50°)$
2. El argumento de $z(\theta)$ puede tomar diferentes valores, ya en el capítulo de coordenadas polares quedó establecido que de no haber alguna condición especial, los valores principales de θ son aquellos comprendidos en $\langle -\pi; \pi]$
   Es decir: $-\pi < \theta \leq \pi \;\vee\; -180° < \theta \leq 180°$
3. De la definición dada para ángulos coterminales y sus propiedades (capítulo 3) se deduce que:
   Si $z = r\text{cis}\theta \Rightarrow z = r\text{cis}(\theta + 2k\pi) = r\text{cis}(\theta + 360°k)$, $\forall\; k \in \mathbb{Z}$
   Por ejemplo:
   $z = 5\text{cis}30° = 5\text{cis}(30° + 360°k)$, $\forall\; k \in \mathbb{Z}$
   Asignando valores a "k" se obtiene:
   $z = 5\text{cis}30° = 5\text{cis}(390°) = 5\text{cis}750° = ...$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Sean $z_1 = r_1\text{cis}\theta_1 \wedge z_2 = r_2\text{cis}\theta_2$

I. Multiplicación:
$z_1z_2 = (r_1\text{cis}\theta_1)(r_2\text{cis}\theta_2) = r_1r_2\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

II. División: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\text{cis}\theta_1}{r_2\text{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

III. Potenciación: $(z_1)^n = r_1^n\text{cis}(n\theta_1)$

Ejemplos:

$z_1 = 6\text{cis}\frac{\pi}{4} \wedge z_2 = 2\text{cis}\frac{\pi}{6}$

a) $z_1z_2 = \left(6\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)\left(2\text{cis}\frac{\pi}{6}\right) = 12\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 12\text{cis}\frac{5\pi}{12}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6\text{cis}(\pi/4)}{2\text{cis}(\pi/6)} = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 3\text{cis}\frac{\pi}{12}$

c) $z_2^4 = \left(2\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4 = 2^4\text{cis}\left(4\frac{\pi}{4}\right) = 16\text{cis}\pi$

d) $z_1^2 = \left(6\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^2 = 6^2\text{cis}\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 36\text{cis}\frac{\pi}{2}$

Propiedades del argumento:

Sean z_1 y z_2 dos números complejos no nulos, tal que: $\theta_1 = \arg z_1$, y $\theta_2 = \text{Arg}z_2$

Entonces:

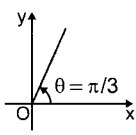
1. $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$
2. $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\theta_1 = -\arg z_1$
3. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$
4. $\forall\; n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z_1)^n = n\theta_1 = n\arg z_1$

Ejemplos:

1. Representar gráficamente todos los números complejos (z), tal que $\arg z = \frac{\pi}{3}$

   Resolución:

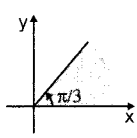
   Hay infinitos números complejos cuyo argumento es igual a $\frac{\pi}{3}$. Su representación es un rayo que parte del origen y forma con el eje $\overrightarrow{OX}$ un ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{3}$ rad.



2. Representar geométricamente el conjunto:
   $S = \left\{z/z \in \mathbb{C} \text{ y } \theta = \arg z, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}$

   Resolución:

   En este caso hay infinitos números complejos cuyo argumento cumplen con la desigualdad indicada. Su representación es la región comprendida por el eje X y el rayo que forma $\frac{\pi}{3}$ rad con dicho eje.

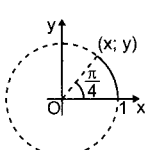


3. Representar geométricamente el conjunto:
   $\left\{z \in \mathbb{C} / 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \wedge |z| = 1\right\}$

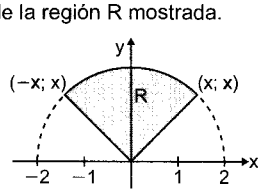
   Resolución:

   Como $|z| = 1$ representa una circunferencia de radio 1 y centro en (0; 0). Como $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ entonces se obtiene el arco de circunferencia comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{4}$

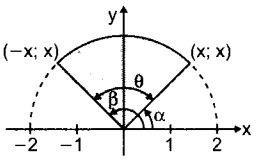
   $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



4. Determinar a qué conjunto de números complejos corresponde la región R mostrada.



Resolución:



Observar del gráfico que: $\alpha = \frac{\pi}{4} \wedge \beta = \frac{3\pi}{4}$

Entonces los valores de θ son: $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

Además como el radio dé la circunferencia es 2 y su centro es (0; 0) entonces el módulo de cualquier complejo de R cumple: $|z| \leq 2$.

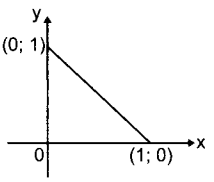
Por tanto el conjunto es:

$$\left\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$$

5. Representar gráficamente el conjunto:

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Resolución:



Si $z = x + yi$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) = y$

$\Rightarrow |x| + |y| = 1$

como $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ entonces x e y son positivos.

Luego: $x + y = 1$

(segmento de recta)

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi$ un número complejo diferente de cero y cuya representación en forma polar es $z = r\operatorname{cis}\theta$.

A la expresión $z = re^{i\theta}$ se le conoce como forma exponencial de "z"; donde "e" es la base de los logaritmos neperianos, "r" es el módulo de "z" y θ es el argumento de "z" medido en radianes.

Si comparamos la forma polar con la forma exponencial de un número complejo se obtiene la siguiente relación: $e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta$ o también $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ a esta expresión se le conoce como fórmula de Euler.

Ejemplo:

Expresar en forma exponencial.

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ c) $z_3 = 5\operatorname{cis}(\pi/3)$

b) $z_2 = 1 + i$ d) $z_4 = -2\operatorname{cis}30°$

Resolución:

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r_1 = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\Rightarrow \theta_1 = \arg(z) = \operatorname{argtan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

b) $z_2 = 1 + i \Rightarrow r_2 = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \theta_2 = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

c) $z_3 = 5\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_3 = 5e^{\frac{i\pi}{3}}$

d) $z_4 = -2\operatorname{cis}30° = -2\operatorname{cis}(\pi/6) \Rightarrow z_4 = -2e^{\frac{i\pi}{6}}$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA EXPONENCIAL

Sean: $z_1 = r_1e^{i\theta_1} \ \wedge \ z_2 = r_2e^{i\theta_2}$

I) Multiplicación: $z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})\, r_2e^{i\theta_2}) = (r_1r_2e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

II) División: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

III) Potenciación: $(z_1)^n = (r_1e^{i\theta_1})^n = r_1^ne^{in\theta_1}$

TEOREMA DE ABRAHAM DE MOIVRE

Sabemos que sí:

$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n$ ...(1)

Además:

$z^n = (re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen}n\theta)$ ...(2)

Igualando (1) y (2) se obtiene:

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen}n\theta$$

A esta expresión se le conoce como fórmula de Moivre. Esta relación es muy importante por la efectividad que tiene en la resolución de diversos problemas.

Ejemplos:

1. Hallar $\cos2\theta$ y $\operatorname{sen}2\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$

Resolución:

Sabemos que: $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^2 = \cos2\theta + i\operatorname{sen}2\theta$

Desarrollando el primer término se obtiene:

$\cos^2\theta + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta + i^2\operatorname{sen}^2\theta = \cos2\theta + i\operatorname{sen}2\theta$

$(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + i(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = \cos2\theta + i\operatorname{sen}2\theta$

Igualando las partes reales e imaginarias respectivamente se obtiene:

$\cos2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \ \wedge \ \operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

2. Si $\cos\theta + \cos\phi + \cos\alpha = 0 \ \wedge \ \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\alpha = 0$

Calcular:

a) $\cos3\theta + \cos3\phi + \cos3\alpha - 3\cos(\theta + \phi + \alpha)$

b) $\operatorname{sen}3\theta + \operatorname{sen}3\phi + \operatorname{sen}3\alpha - 3\operatorname{sen}(\theta + \phi + \alpha)$

Resolución:

Para resolver este problema debemos recordar que:

si: $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ ...(1)

Sea: $x = \operatorname{cis}\theta$; $y = \operatorname{cis}\phi$; $z = \operatorname{cis}\alpha$

Por dato sabemos que: $\operatorname{cis}\theta + \operatorname{cis}\phi + \operatorname{cis}\alpha = 0$

Reemplazamos en (1):

$(\operatorname{cis}\theta)^3 + (\operatorname{cis}\phi)^3 + (\operatorname{cis}\alpha)^3 - 3\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi\operatorname{cis}\alpha = 0$ ...(1)

$\operatorname{cis}3\theta + \operatorname{cis}3\phi + \operatorname{cis}3\alpha - 3\operatorname{cis}(\theta + \phi + \alpha) = 0$

$\cos3\theta + i\operatorname{sen}3\theta + \cos3\phi + i\operatorname{sen}3\phi + \cos3\alpha +$

$i\text{sen}3\alpha - 3\cos(\theta + \phi + \alpha) - 3i\text{sen}(\theta + \phi + \alpha) = 0$

$[(\cos 3\theta + \cos 3\phi + \cos 3\alpha - 3\cos(\theta + \phi + \alpha)] +$

$i[(\text{sen}3\theta + \text{sen}3\phi + \text{sen}3\alpha - 3\text{sen}(\theta + \phi + \alpha)] = 0$ ...(2)

Sabemos que $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$

Entonces en (2), igualamos a cero la parte real e imaginaria.

a) $\cos 3\theta + \cos 3\phi + \cos 3\alpha - 3\cos(\theta + \phi + \alpha) = 0$

b) $\text{sen}3\theta + \text{sen}3\phi + \text{sen}3\alpha - 3\text{sen}(\theta + \phi + \alpha) = 0$

3. Demostrar que: $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

a partir de: $F = (5 - i)^4(1 + i)$

Demostración:

$F = (5 - i)^4(1 + i) = (25 - 10i - 1)^2(1 + i) = (24 - 10i)^2(1 + i)$

$F = (576 - 480i - 100)(1 + i) = (476 - 480i)(1 + i) = 476 - 480i + 476i + 480$

$F = 956 - 4i = 4(239 - i)$

Lo expresamos en forma polar:

$F = 4\sqrt{(239)^2 + (-1)^2}\,\text{cis}\theta$, donde $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{239}\right)$

$F = 676\sqrt{2}\,\text{cis}\theta$, $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{239}\right)$ ...(1)

$F = (5 - i)^4(1 + i)$

Expresamos cada uno de los factores en forma polar:

$5 - i = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2}\,\text{cis}\alpha_1 = \sqrt{26}\,\text{cis}\alpha_1$

Donde: $\alpha_1 = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right)$

$1 + i = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}\,\text{cis}\alpha_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\alpha_2$

Donde: $\alpha_2 = \arctan(1)$

Entonces:

$F = (\sqrt{26}\,\text{cis}\alpha_1)^4(\sqrt{2}\,\text{cis}\alpha_2) = (676\text{cis}4\alpha_1)(\sqrt{2}\,\text{cis}\alpha_2)$

$F = 676\sqrt{2}\,\text{cis}(4\alpha_1 + \alpha_2)$ ...(2)

Igualamos: (1) = (2)

$676\sqrt{2}\,\text{cis}\theta = 676\sqrt{2}\,\text{cis}(4\alpha_1 + \alpha_2)$

Entonces: $\theta = 4\alpha_1 + \alpha_2$

$\Rightarrow \arctan\left(-\frac{1}{239}\right) = 4\arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + \arctan(1)$

Despejando se obtiene:

$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

Nota

De la fórmula de Euler se deduce:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$ ...(1)

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\text{sen}\theta$ ...(2)

Sumando: $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Restando: $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Ejemplo:

Demostrar que: $2\cos a\cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

Demostración:

$2\cos a\cos b = 2\left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right)$

$2\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} + e^{-i(a+b)}\}$

Agrupando en forma conveniente:

$= \left\{\underbrace{\frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2}}_{\cos(a+b)} + \underbrace{\frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2}}_{\cos(a-b)}\right\}$

$\therefore 2\cos a\cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sea "z" un número complejo, tal que expresado en forma polar es: $z = r\text{cis}\theta$.

Para hallar la enésima raíz de "z" sumamos $2k\pi$ al argumento y procedemos de la siguiente manera:

$z = r\text{cis}\theta = r\text{cis}(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$z^{1/n} = [r\text{cis}(\theta + 2k\pi)]^{1/n} = r^{1/n}\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$,

$k = 0; 1; 2; ....; n - 1$

Ejemplos:

1. Sea $z = 8\text{cis}30°$, entonces para calcular $z^{1/3}$

$z = 8\cos[(30° + k(360°)]$

$\Rightarrow z^{1/3} = 8^{1/3}\text{cis}\left(\frac{30° + 360°k}{3}\right)$, $k = 0; 1; 2$

Entonces: $z^{1/3} = 2\text{cis}(10° + 120°k)$, $k = 0; 1; 2$.

Para: $k = 0 \Rightarrow z^{1/3} = 2\text{cis}(10°)$

Para: $k = 1 \Rightarrow z^{1/3} = 2\text{cis}(10° + 120°) = 2\text{cis}130°$

Para: $k = 2 \Rightarrow z^{1/3} = 2\text{cis}(10° + 240°) = 2\text{cis}250°$

Por lo tanto, las 3 raíces de $z^{1/3}$ son:

$2\text{cis}10°$; $2\text{cis}130°$ y $2\text{cis}250°$

2. Calcular todos los valores de "z" para que $z^5 = -32$

Resolución:

$z^5 = -32$

Esta expresión es igual a: $z^5 = 32\text{cis}(\pi + 2k\pi)$

Entonces:

$z = [32\text{cis}(\pi + 2k\pi)]^{1/5} = 32^{1/5}\text{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)$

$k = 0; 1; 2; 3; 4$

$z = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right)$ $k = 0; 1; 2; 3; 4.$

Si: $k = 0 \Rightarrow z = z_1 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 0}{5}\right) = 2\text{cis}\frac{\pi}{5}$

Si: $k = 1 \Rightarrow z = z_2 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 2\pi}{5}\right) = 2\text{cis}\frac{3\pi}{5}$

Si: $k = 2 \Rightarrow z = z_3 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 4\pi}{5}\right) = 2\text{cis}\pi$

Si: $k = 3 \Rightarrow z = z_4 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 6\pi}{5}\right) = 2\text{cis}\frac{7\pi}{5}$

Si: $k = 4 \Rightarrow z = z_5 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi + 8\pi}{5}\right) = 2\text{cis}\frac{9\pi}{5}$

Observar que:

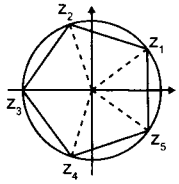
$z_4 = 2\text{cis}\frac{7\pi}{5} = 2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{5} - 2\pi\right) \Rightarrow z_4 = 2\text{cis}\left(\frac{-3\pi}{5}\right)$

$z_5 = 2\text{cis}\frac{9\pi}{5} = 2\text{cis}\left(\frac{9\pi}{5} - 2\pi\right) \Rightarrow z_5 = 2\text{cis}\left(\frac{-\pi}{5}\right)$

Si comparamos z_1 y z_5, z_2 y z_4 observamos que son números complejos conjugados.

Además z_3 en número real $= -2$.

Si graficamos las cinco raíces en el plano complejo observaremos que determinan un polígono regular, en este caso de cinco lados, inscrito en una circunferencia cuyo radio es igual al módulo una circunferencia cuyo radio es igual al módulo de $z^{1/5}$, en este caso el módulo es igual a 2.



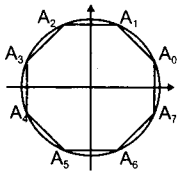
3. Calcular $\sqrt[8]{\text{cis}200°}$ y graficar las soluciones en el diagrama de Argand.

Resolución:

$\sqrt[8]{\text{cis}200°} = [\text{cis}(200° + 360°k)]^{1/8}$

$\Rightarrow \text{cis}\left(\frac{200° + 360°k}{8}\right) k = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.$

Si: $k = 0 \Rightarrow A_0 = \text{cis}25°$
Si: $k = 1 \Rightarrow A_1 = \text{cis}70°$
Si: $k = 2 \Rightarrow A_2 = \text{cis}115°$
Si: $k = 3 \Rightarrow A_3 = \text{cis}160°$
Si: $k = 4 \Rightarrow A_4 = \text{cis}205°$
Si: $k = 5 \Rightarrow A_5 = \text{cis}250°$
Si: $k = 6 \Rightarrow A_6 = \text{cis}295°$
Si: $k = 7 \Rightarrow A_7 = \text{cis}340°$



Las raíces son A_0; A_1; ....A_7, al graficar se obtiene un octógono regular, además observar que el módulo es igual a 1.

RAÍCES ENÉSIMAS DE LA UNIDAD

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ se llaman las raíces enésimas de la unidad y están dadas por:

$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2k\pi}{n} = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ ... $k = 0; 1; 2; ...; (n - 1)$

Si hacemos $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2\pi}{n} = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$; entonces las "n" raíces de la unidad son: $1, w, w^2, w^3, ..., w^{n-1}$ geométricamente estas raíces representan los "n" vértices de un polígono regular de "n" lados inscrito en una circunferencia de radio unidad de centro en el origen.

Propiedad:

La suma de las "n" raíces de la unidad es cero:
Es decir: $1 + w + w^2 + w^3 + ... + w^{n-1} = 0$

Ejemplos:

1. Resolver: $z_3 - 1 = 0$

Resolución:

$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = \text{cis}(2k\pi) \Rightarrow z = [\text{cis}(2k\pi)]^{1/3}$

$z = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0; 1; 2$

Si: $k = 0 \Rightarrow z = w_0 = \text{cis}0 \Rightarrow w_0 = 1$

Si: $k = 1 \Rightarrow z = w = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si: $k = 2 \Rightarrow z = w^2 = \text{cis}\frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow w^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Las raíces cúbicas de la unidad son:

$1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Calcular

$A = \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$,

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ / n \geq 2$

$B = \text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{4\pi}{n} + \text{sen}\frac{6\pi}{n} + ... + \text{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$,

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ / n \geq 2$

Resolución:

Sabemos: $1 + w + w^2 + w^3 + ... + w^{n-1} = 0$ ...(1)

Además:

$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2\pi}{n}$; $w^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\text{sen}\frac{4\pi}{n}$; ...

...; $w^{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$

Reemplazamos en (1) y separamos la parte real e imaginaria:

$$\underbrace{\left[1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]}_{A} + i\underbrace{\left[\text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{4\pi}{n} + ... + \text{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]}_{B} = 0$$

Para que $(1 + A) + iB = 0$

$\Rightarrow 1 + A = 0 \wedge B = 0$

Luego:

$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

$\text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{4\pi}{n} + \text{sen}\frac{6\pi}{n} + ... + \text{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el módulo del número complejo:

$$z = \frac{1-\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}, \theta \in \langle 0; \pi\rangle \text{ es:}$$

Resolución:

Sea: $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{\theta i}$

$\Rightarrow \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = e^{-\theta i}$

Reemplazamos:

$$z = \frac{1-e^{-\theta i}}{1+e^{\theta i}} \Rightarrow z = \frac{e^{-\frac{\theta i}{2}}\left(e^{\frac{\theta i}{2}} - e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)}{e^{\frac{\theta i}{2}}\left(e^{-\frac{\theta i}{2}} + e^{\frac{\theta i}{2}}\right)}$$

$$z = e^{-\theta i}\left[\frac{2i\operatorname{sen}(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}\right] \Rightarrow z = i\tan\frac{\theta}{2}e^{-\theta i}$$

Luego:

$$|z| = \left|i\tan\frac{\theta}{2}e^{-\theta i}\right| \Rightarrow |z| = |i|\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\underbrace{\left|e^{-\theta i}\right|}_{1}$$

$$\therefore |z| = \left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$$

Como: $\theta \in \langle 0; \pi\rangle \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Así: $\tan\frac{\theta}{2} > 0 \quad \therefore |z| = \tan\frac{\theta}{2}$

2. Si $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, $-\frac{5\pi}{2} < \theta < -2\pi$,

Calcular: $\left|\frac{1-(\bar{z})^2}{1+z^2}\right|$

Resolución:

Dado: $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{\theta i}$

$\Rightarrow \bar{z} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = e^{-\theta i}$

Se pide:

$$w = \left|\frac{1-(\bar{z})^2}{1+z^2}\right| \Rightarrow w = \left|\frac{1-e^{-2\theta i}}{1+e^{2\theta i}}\right|$$

Factorizamos:

$$w = \left|\frac{e^{-\theta i}(e^{\theta i} - e^{-\theta i})}{e^{\theta i}(e^{-\theta i} + e^{\theta i})}\right| \Rightarrow w = \left|e^{-2\theta i}\left(\frac{2i\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta}\right)\right|$$

$w = |e^{-2\theta i}||i||\tan\theta| \Rightarrow w = |\tan\theta|$; $|e^{-2\theta i}| = 1$

Como: $\theta \in \left\langle -\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right\rangle \Rightarrow \theta \in$ IVC

$\therefore |\tan\theta| = -\tan\theta$; así: $w = -\tan\theta$

3. Calcular la parte real del número complejo:

$$z = \frac{e^{i2x}-1}{e^{i4x}-1}$$

Resolución:

$$z = \frac{e^{i2x}-1}{e^{i4x}-1} = \frac{(e^{2xi}-1)}{(e^{2xi}-1)(e^{2xi}+1)}$$

$$z = \frac{1}{e^{xi}\underbrace{(e^{xi}+e^{-xi})}_{2\cos x}} = \frac{e^{-xi}}{2\cos x} = \frac{\cos x - i\operatorname{sen}x}{2\cos x}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan x \quad \therefore \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

4. Hallar la parte imaginaria del número complejo:

$$z = \frac{-1}{e^{2ix}+1}$$

Resolución:

$$z = \frac{1}{e^{2ix}+1} = \frac{1}{e^{xi}\underbrace{(e^{xi}+e^{-xi})}_{2\cos x}} = -\frac{e^{-xi}}{2\cos x}$$

$$z = -\frac{1}{2\cos x}(\cos x - i\operatorname{sen}x) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan x$$

Luego: $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}\tan x$

5. Hallar la parte real del número complejo:

$$z = \left(\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right)e^{\frac{ix}{2}}$$

Resolución:

Factorizamos:

$$z = \frac{e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{\frac{-inx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right)}e^{\frac{ix}{2}}$$

$$z = \frac{e^{\frac{inx}{2}}2i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}e^{\frac{inx}{2}}$$

$$z = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right)$$

$$z = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} + \frac{i\operatorname{sen}^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Luego: $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

6. Simplificar la expresión: $P = \dfrac{e^{i2x}+e^{i4x}+e^{i6x}+e^{i8x}}{e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x}+e^{i4x}}$

Resolución:

Factorizamos:

$$P = \frac{e^{5xi}\left(e^{-3xi}+e^{-xi}+e^{xi}+e^{3xi}\right)}{e^{\frac{5xi}{2}}\left(e^{\frac{-3xi}{2}}+e^{\frac{-xi}{2}}+e^{\frac{xi}{2}}+e^{\frac{3xi}{2}}\right)}$$

$$P = \frac{e^{\frac{5xi}{2}}(2\cos 3x + 2\cos x)}{2\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{5xi}{2}}(\cos 3x + \cos x)}{\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}}$$

$$P = \frac{e^{\frac{5xi}{2}}2\cos 2x\cos x}{2\cos x\cos\frac{x}{2}} \quad \therefore P = \left[\frac{\cos 2x}{\cos(x/2)}\right]e^{\frac{5xi}{2}}$$

7. Sea: $\dfrac{1+\cos(2\alpha)+i\text{sen}(2\alpha)}{2-\cos(2\alpha)-i\text{sen}(2\alpha)}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

Si: $w-\tan^2\alpha = z$, hallar: $|\overline{w}|$

Resolución:

Conocemos que: $e^{2\alpha i} = \cos 2\alpha + i\text{sen}2\alpha$

$\Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1+e^{2\alpha i}}{1-e^{2\alpha i}}$

Factorizamos: $\overline{z} = \dfrac{e^{\alpha i}(e^{-\alpha i}+e^{\alpha i})}{e^{\alpha i}(e^{-\alpha i}-e^{\alpha i})}$

$\overline{z} = \dfrac{2\cos\alpha}{-2i\text{sen}\alpha} \Rightarrow \overline{z} = \underbrace{\left(-\dfrac{1}{i}\cot\alpha\right)\left(\dfrac{i}{i}\right)}_{-1}$

Luego: $\overline{z} = i\cot\alpha = 0 + i\cot\alpha$

$\Rightarrow \overline{z} = 0 - i\cot\alpha \Rightarrow z = -i\cot\alpha$

Tenemos también:

$w = \tan^2\alpha = z \Rightarrow w\tan^2\alpha = -i\cot\alpha$

$w = -i\cot^3\alpha$

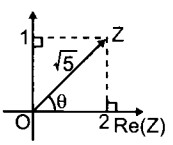
Como: $w = 0 - i\cot^3\alpha \Rightarrow \overline{w} = 0 + i\cot^3\alpha$

$\Rightarrow \overline{w} = i\cot^3\alpha$; ahora: $|\overline{w}| = |\cot^3\alpha|$

Como: $0<\alpha<\pi/4 \Rightarrow |\overline{w}| = \cot^3\alpha$

8. Si $z = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{5}$; $\theta = \arctan\dfrac{1}{2}$, hallar $|e^{iz^3}|$

Resolución:



$z = re^{\theta i}$; donde: $r = \sqrt{5} \wedge \tan\theta = \dfrac{1}{2}$

Del gráfico: $z = 2 + i$

Se pide $w = |e^{iz^3}|$

Tenemos: $z^3 = (2+i)^3 = 2^3 + 3(2i)(2+i) + i^3$

$z^2 = 8 + 12i + 6i^2 - i$

$\Rightarrow z^3 = 2 + 11i \Rightarrow iz^3 = 2i + 11i^2$

$\Rightarrow iz^3 = -11 + 2i$

Luego: $w = |e^{-11+2i}| = |e^{-11}||e^{2i}| \quad \therefore w = e^{-11}$

9. Si $z = \dfrac{\text{sen}(3\theta)+i\cos(3\theta)}{\text{sen}(3\theta)+i\cos(3\theta)}$, hallar $\arg(-z)$

Resolución:

$z = \left(\dfrac{\text{sen}3\theta - i\cos 3\theta}{\text{sen}3\theta + i\cos 3\theta}\right)\left(\dfrac{i}{i}\right) = \dfrac{i\text{sen}3\theta - i\cos 3\theta}{i\text{sen}3\theta - i\cos 3\theta}$

$-z = \dfrac{\cos 3\theta + i\text{sen}3\theta}{\cos 3\theta - i\text{sen}3\theta} = \dfrac{e^{3\theta i}}{e^{-3\theta i}}$

$\Rightarrow -z = e^{6\theta i} \quad \therefore \arg(-z) = 6\theta$

10. Hallar un número complejo, en forma exponencial, que al multiplicarle a $(\sqrt{3}i+1)^6$, de otro número complejo, tal que su módulo sea 8 y su argumento 270°.

Resolución:

Sea "z" el número pedido:

Por dato: $z(\sqrt{3}i+1)^6 = 8(\cos 270° + i\text{sen}270°)$ ...(1)

Observamos que:

$\sqrt{3}i + 1 = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sqrt{3}i + 1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{3}i + 1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ...(2)

(2) en (1): $z(2e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = 2^3[\cos(3\pi/2) + i\text{sen}(3\pi/2)]$

$z(2^6)(e^{i2\pi}) = 2^3e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2^{-3}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)}$

$\therefore z = \dfrac{1}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

11. Calcular el área de la región limitada por el polígono triangular cuyos, vértices son las raíces cúbicas del número complejo. $z = 7 + i\sqrt{15}$

Resolución:

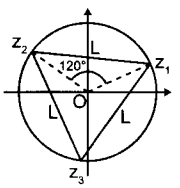
Se sabe que las raíces cúbicos de un número complejo "z" forman un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia cuyo radio es igual al módulo de $\sqrt[3]{z}$:

Atención: $R = |\sqrt[3]{z}| = \sqrt[3]{|z|}$

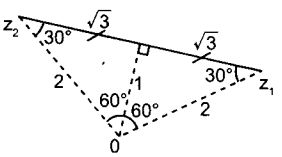
Como $z = 7 + i\sqrt{15}$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{7^2 + \sqrt{15}^2}$

$\Rightarrow |z| = 8 \Rightarrow R = 2$



Luego:



Es decir: $L = 2\sqrt{3}$

$A_{\triangle z_1 z_2 z_3} = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore A_{\triangle z_1 z_2 z_3} = 3\sqrt{3}$

12. Sea "z" un número complejo, determine el argumento del número complejo definido por: $T = \dfrac{\text{Im}(iz)}{i\text{Re}(z)}$

Resolución:

Sea: $z = x + iy$ ...(1)

Luego: $iz = i(x+iy) = ix + i^2y$

$iz = -y + ix$ ...(2)

De (1) y (2): $\text{Re}(z) = x$, $I_m(iz) = x$

Reemplacemos en: $T = \dfrac{\text{Im}(iz)}{i\text{Re}(z)} = \dfrac{x}{ix} = \left(\dfrac{1}{i}\right)\left(\dfrac{i}{i}\right)$

$T = -i$

El cual equivale a:

$T = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore \arg(T) = -\dfrac{\pi}{2}$

13. Indica verdadero (V) o falso (F):

i. Si $z = \text{sen}(2x) + i\cos(2x)$, entonces un argumento de "z" es $(\pi/2 - 2x)$.

II. Si $z = -i\cos x + \text{sen}x$, entonces un argumento de "z" es $(\pi/2 + x)$.

III. Si $z = 1 + i\tan x$; y "x" está en el 2.°, cuadrante, entonces $|z| = \sec x$

Resolución:

I. $z = \text{sen}(2x) + i\cos(2x) \Rightarrow$ un valor de θ es:

$\theta = \frac{\pi}{2} - 2x$

$z = i[\cos(2x) - i\text{sen}(2x)]$

$z = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}e^{-i2x} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - 2x,\ k \in \mathbb{Z}$

para $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2} - 2x$ $\Rightarrow$ I es (V)

II. $z = -i\cos x + \text{sen}x \Rightarrow$ un valor de $\theta = \frac{\pi}{2} + x$

$z = -i(\cos x + i\text{sen}x) = e^{\left(-\frac{\pi}{2}i+2k\pi\right)i}e^{ix}$

$\Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + x \Rightarrow$ II es (F)

III. $z = 1 + i\tan x,\ x \in \text{IIC} \Rightarrow |z| = \sec x$

$|z| = \sqrt{1 + \tan^2 x} = |\sec x|$, como $x \in \text{IIC}$

Luego: $|z| = -\sec x \Rightarrow$ III es (F)

$\therefore$ VFF

14. Para el número complejo: $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$ en radianes; se cumple:

$(z/\bar{z})^2 + (\bar{z}/z)^2 = 1 \ \wedge\ 0 < \arg(-iz) < \pi/4$

Hallar el valor de θ que pertenece al intervalo dado.

Resolución:

$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = 1$

$z = re^{i\theta} \Rightarrow \left(\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}\right)^2 + \left(\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\right)^2 = 1$

$e^{4\theta i} + e^{-4\theta i} = 1 \Rightarrow 2\cos(4\theta) = 1$

$\cos(4\theta) = 1/2 \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12};\ k \in \mathbb{Z}$ ...(1)

Además: $-iz = e^{-\frac{\pi}{2}i}re^{i\theta} = re^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}$

Por dato: $0 < \arg(-iz) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ ...(2)

De (1) y (2):

Para: $k = 0$; $\theta = \pm\frac{\pi}{12}$; no cumple (2)

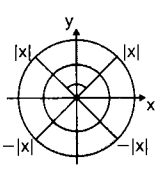
Para: $k = 1$; $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$; sí cumple (2):

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{12}$

15. Hallar el área de la región R del plano complejo definida por:

$R = \{z \in \mathbb{C} / 1 \le |z| \le 2 \ \wedge\ |\text{Im}(z)| \ge |\text{Re}(z)|\}$

Resolución:



$1 \le |z| \le 2$ (corona cerrada)

$|\text{Im}(z)| \ge |\text{Re}(z)|$

$|y| \ge |x| \Leftrightarrow y \ge |x| \vee y \le -|x|$

$R = R_1 \cup R_2$, como $R_1 = R_2 \Rightarrow$ Área $A = 2A_1$

$A = 2\left(\frac{1}{2}\right)(R^2 - r^2)\theta = (4 - 1)\frac{\pi}{2} = 3\pi/2$

$\therefore A = 3\pi/2$

16. Con "a" entero positivo y "m" incrementando de uno en uno, obtener la suma: $\sum_{m=-a}^{a} e^{-iwm}$

Resolución:

$$\sum_{m=a}^{a} e^{-iwm} = e^{iwa} + \ldots + e^{2iw} + e^{iw} + 1 + e^{-iw} + \ldots + e^{-iwa}$$
$$= 1 + (e^{iw} + e^{-iw}) + \ldots + (e^{wai} + e^{-iwa})$$
$$= 1 + 2\cos w + \ldots + 2\cos(wa)$$
$$= 1 + 2[\cos w + \cos(2w) + \ldots + \cos(wa)]$$

Recordar:

$$\cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-a}^{a} e^{-iwm} = 1 + 2\,\frac{\text{sen}\left(\frac{wa}{2}\right)\cos\left[\frac{(a+1)w}{2}\right]}{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$\sum_{m=-a}^{a} e^{-iwm} = \frac{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right) + \text{sen}\left[\frac{(2a+1)w}{2}\right] - \text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$\sum_{m=-a}^{a} e^{-iwm} = \frac{\text{sen}\left[\frac{w(2a+1)}{2}\right]}{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)}$$

17. Degradar $\cos^5 x$ en términos de cosenos de primer grado y $\text{sen}^5 x$ en términos de senos de primer grado.

Resolución:

$(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^5 = \cos 5\theta + i\text{sen}5\theta$

Efectuando:

$\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\text{sen}\theta + 10i^2\cos^3\theta\text{sen}^2\theta +$
$10i^3\cos^2\theta\text{sen}^3\theta + 5i^4\cos\theta\text{sen}^4\theta + \text{sen}^5\theta = \cos 5\theta + i\text{sen}5\theta$

De donde:

$\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\text{sen}^2\theta + 5\cos\theta\text{sen}^4\theta = \cos 5\theta$

$\text{sen}^5\theta - 10\text{sen}^3\theta\cos^2\theta + 5\text{sen}\theta\cos^4\theta = \text{sen}5\theta$

Del primero:

$\cos 5\theta - 10\cos^3\theta(1 - \cos^2\theta) +$
$5\cos\theta(1 - \cos^2\theta)^2 = \cos 5\theta$

$\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta +$
$5\cos\theta - 10\cos^3\theta + 5\cos^5\theta = \cos 5\theta$

$16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 20\cos^3\theta - 5\cos\theta$

$16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5(\cos 3\theta + 3\cos\theta) - 5\cos\theta$

$16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$

$\therefore \cos^5\theta = \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$

Del segundo:

$\text{Sen}^5\theta - 10\text{sen}^3\theta(1-\text{sen}^2\theta) + 5\text{sen}\theta(1-\text{sen}^2\theta)^2 = \text{sen}5\theta$

$\text{Sen}^5\theta - 10\text{sen}^3\theta + 10\text{sen}^5\theta +$
$5\text{sen}\theta - 10\text{sen}^3\theta + 5\text{sen}^5\theta = \text{sen}\theta$

$16\text{sen}^5\theta = \text{sen}5\theta + 20\text{sen}^3\theta - 5\text{sen}\theta$

$16\text{sen}^5\theta = \text{sen}5\theta + 5(3\text{sen}\theta - \text{sen}3\theta) - 5\text{sen}\theta$

$16\text{sen}^5\theta = \text{sen}5\theta - 5\text{sen}3\theta + 10\text{sen}\theta$

$\therefore\ \text{sen}^5\theta = \frac{1}{16}(\text{sen}5\theta - 5\text{sen}3\theta + 20\text{sen}\theta)$

18. Dado: $z = 1 - \text{sen}x + i\cos x$, $0 < x < \pi/2$, hallar el módulo de $w = \sqrt{2}z$

Resolución:

$z = 1 - \text{sen}x + i\cos x\ ;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$w = \sqrt{2}z \Rightarrow |w| = |\sqrt{2}z| = \sqrt{2}|z|$

$|w| = \sqrt{2}\sqrt{(1-\text{sen}x)^2 + \cos^2 x}$

$|w| = \sqrt{2}\sqrt{1 - 2\text{sen}x + \text{sen}^2x + \cos^2 x}$

$|w| = \sqrt{2}\sqrt{2(1-\text{sen}x)} = 2\sqrt{1 - 2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$|w| = 2\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right)^2}$

$|w| = 2\left|\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right|$

Como: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) > \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

$\therefore\ |w| = 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

19. Si: $w = e^{iz^2} \wedge z = re^{i\theta}$, hallar $|w|$

Resolución:

$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^2 = r^2e^{2\theta i}$

$iz^2 = e^{\frac{\pi}{2}i}r^2e^{2\theta i} = r^2e^{\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)i}$

$iz^2 = r^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)\right]$

$iz^2 = r^2[-\text{sen}(2\theta) + i\cos(2\theta)]$

$w = e^{iz^2} = e^{r^2(-\text{sen}2\theta + i\cos 2\theta)}$
$= e^{-r^2\text{sen}2\theta}e^{r^2c(\cos 2\theta)(i)}$

$\Rightarrow |w| = |e^{-r^2\text{sen}2\theta}||e^{r^2(\cos 2\theta)(i)}| \quad \therefore\ |w| = e^{-r^2\text{sen}2\theta}$

20. Hallar todos los valores de z, tales que $e^z = 1 + i$, si $k \in \mathbb{Z}$

Resolución:

$e^z = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$e^z = e^{\ln\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)i}$

$e^z = e^{\ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)i}$

$z = \ln\sqrt{2} + (8k+1)\frac{\pi}{4}i$; donde $k \in \mathbb{Z}$

21. Sea el número complejo $z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = re^{i\theta}$, hallar $\theta = \arg(z)$, si se cumple:

$\sum_{n=-3}^{3}(-1)^n e^{in\theta} = 1$; $\pi/6 < \theta < 5\pi/6$. Dar como respuesta, la suma de los argumentos hallados.

Resolución:

$z = r\text{cis}\theta = re^{\theta i}$

$\sum_{n=-3}^{3}(-1)^n e^{in\theta} = 1$

$-e^{-3\theta i} + e^{-2\theta i} - e^{-\theta i} + 1 - e^{\theta i} + e^{2\theta i} - e^{3\theta i} = 1$

$-(e^{3\theta i} + e^{-3\theta i}) + (e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}) - (e^{\theta i} + e^{-\theta i}) = 0$

$-2\cos 3\theta + 2\cos 2\theta - 2\cos\theta = 0$

$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 1 - 2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$

$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 = 0$

$(2\cos\theta - 1)(2\cos^2\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \wedge \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}$

$2\cos^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$

Luego, la suma de argumentos:

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{3}$

22. Hallar la parte real de:

$M = \frac{e^{8ix} + e^{4ix} - 2}{1 - e^{8ix}} + 1$

Resolución:

$M = \frac{e^{8xi} + e^{4xi} - 2}{1 - e^{8xi}} + 1 = \frac{e^{8xi} - 1}{1 - e^{8xi}} + \frac{e^{4xi} - 1}{1 - e^{8xi}} + 1$

$M = -1 - \frac{1 - e^{4xi}}{(1 + e^{4xi})(1 - e^{4xi})} + 1$

$M = -\left(\frac{1}{1 + e^{4xi}}\right)\left(\frac{e^{-2xi}}{e^{-2xi}}\right) = -\frac{e^{-2xi}}{e^{2xi} + e^{-2xi}}$

$M = -\frac{\cos 2x - i\text{sen}2x}{2\cos 2x} = -\frac{\cos 2x}{2\cos 2x} + \frac{\text{sen}2x}{2\cos 2x}i$

$M = -\frac{1}{2} + \frac{\tan 2x}{2}i$

$\therefore\ \text{Re}(M) = -1/2$

23. Hallar el número complejo $z = e^{i\theta}$, tal que: $\pi/2 \le \arg z^2 \le \pi$; $|z^2 - \bar{z}^2| = \sqrt{2}$

Resolución:

$z = e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = e^{i2\theta}$

$\Rightarrow z^2 = \cos 2\theta + i\text{sen}2\theta$

$\bar{z}^2 = \cos 2\theta - i\text{sen}2\theta$, luego:

$|z^2 - \bar{z}^2| = \sqrt{2} \Rightarrow |2i\text{sen}2\theta| = \sqrt{2}$

$|2i||\text{sen}2\theta| = \sqrt{2} \Rightarrow 2|\text{sen}2\theta| = \sqrt{2}$

Pero: $\frac{\pi}{2} \le \arg(z^2) < \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \le 2\theta < \pi \Rightarrow \text{sen}2\theta > 0$

Luego: $2\text{sen}2\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen}2\theta = \sqrt{2}/2$

$\Rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8} \quad \therefore\ z = e^{i\frac{3\pi}{8}}$

24. Si $\tan(\alpha/2) = 2$, hallar el valor de $e^{i\alpha}$.

Resolución:

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \Rightarrow e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$

$= -1 + 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$= -1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 + \tan\frac{\alpha}{2}i\right)$

Pero: $\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 4 = 5$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$, reemplazando:

$e^{i\alpha} = -1 + 2\left(\frac{1}{5}\right)(1 + 2i)$

$\therefore e^{i\alpha} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

25. Si: $|z|^2 + |z| = 6$; $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{6}$; $z = 2\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)$, hallar la forma polar del número complejo $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Resolución:

$(|z| + 3)(|z| - 2) = 0 \Rightarrow |z| = -3 \vee |z| = 2$

Solo se cumple: $|z| = 2$

$|2\cos\theta + i\operatorname{sen}3\theta| = 2 \Rightarrow |2\cos\theta + i\operatorname{sen}3\theta|^2 = 2^2$

$(2\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}3\theta)^2 = 4 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 3\theta = 4(1 - \cos^2\theta)$

$[\operatorname{sen}\theta(2\cos2\theta + 1)]^2 = 4\operatorname{sen}^2\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta(2\cos2\theta + 1)^2 = 4\operatorname{sen}^2\theta$

Tenemos dos posibilidades:

- $\operatorname{sen}^2\theta = 0$; $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0$ ...(1)

  No hay $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ que cumpla con (1)

- $(2\cos2\theta + 1)^2 = 4$; $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

  $2\cos2\theta + 1 = -2 \vee 2\cos2\theta + 1 = 2$

  $\operatorname{Cos}2\theta = -\frac{3}{2} \vee \cos2\theta = \frac{1}{2}$

Solo es posible: $\cos2\theta = 1/2$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\theta = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$

Luego: $z = 2\cos\theta + i\operatorname{sen}3\theta$

$z = 2\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}$

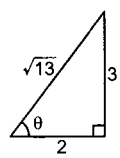
$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i(1) = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

$\therefore z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$

26. Dado el número complejo:
$E = (2 + 3i)^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$, hallar $|E|$

Resolución:



El número complejo E equivale a:

$E = \left[\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + i\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]^{2k}$

Observemos la gráfica:

Luego: $E = [\sqrt{13}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^{2k}$

Aplicando la fórmula de De Moivre tenemos:

$E = \sqrt{13}^{2k}[\cos(2k\theta) + i\operatorname{sen}(2k\theta)]$

$\Rightarrow |E| = 13^k\underbrace{|\cos(2k\theta) + i\operatorname{sen}(2k\theta)|}_{1}$

$\therefore |E| = 13^k$

27. Si $n\theta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, evaluar: $P = \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{in\theta} + 1}$

Resolución:

Se sabe que: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$

Luego, siendo $n\theta = 2\pi k$, tenemos:

$e^{in\theta} = e^{i2\pi k} = \underbrace{\cos(2\pi k)}_{1} + \underbrace{i\operatorname{sen}(2\pi k)}_{0} \Rightarrow e^{in\theta} = 1$

Reemplazando en:

$P = \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{in\theta} + 1} \quad \therefore P = 0$

28. Sea $z \in \mathbb{C}$; $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$; calcular:

$W = \sum_{k=i}^{n}[(1 + \cos2k\theta + i\operatorname{sen}2k\theta)i\tan k\theta]$

Resolución:

$z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{\theta i}$

Tomando la expresión general:

$(1 + \cos2k\theta + i\operatorname{sen}2k\theta)i\tan k\theta$

$(2\cos^2k\theta + i2\operatorname{sen}k\theta\cos k\theta)i\tan k\theta$

$2i\operatorname{sen}k\theta\cos k\theta - 2\operatorname{sen}^2k\theta$

$\cos2k\theta - 1 + i\operatorname{sen}2k\theta$

Luego:

$W = \sum_{k=1}^{n}(\cos2k\theta + i\operatorname{sen}2k\theta - 1)$

$W = \sum_{k=1}^{n}\cos2k\theta + i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}2k\theta - n$

Pero:

$\sum_{k=1}^{n}\cos2k\theta = \cos2\theta + \cos4\theta + ... + \cos2nt$

$= \frac{\operatorname{sen}(2n + 1)\theta - \operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}2k\theta = \operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}4\theta + ... + \operatorname{sen}2n\theta$

$= -\frac{\cos(2n + 1)\theta - \cos\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

$W = \frac{\operatorname{sen}(2n + 1)\theta - \operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta} - i\frac{\cos(2n + 1)\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

$W = \frac{i}{2\operatorname{sen}\theta}[\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos(2n + 1)\theta - i\operatorname{sen}(2n + 1)\theta] - n$

$W = \frac{i}{2}\csc\theta(z - z^{2n+1}) - n$

$W = \frac{i}{2}\csc\theta(z^{-n} - z^n)z^{n+1} - n$

$W = \frac{i}{2}\csc\theta(e^{-n\theta i} - e^{n\theta i})z^{n+1} - n$

$W = \frac{i}{2}\csc\theta(-2i\text{sen}n\theta)z^{n+1} - n$

$\therefore\ W = z^{n+1}(\text{sen}n\theta)(\csc\theta) - n$

29. Sabiendo que: $z = e^{i\theta}$, calcular el mayor valor de:

$N = \dfrac{1 + \text{Re}(z + z^2 + z^3)}{2\cos\theta}$

Resolución:

$Z = e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = e^{2\theta i}$, $z^3 = e^{3\theta i}$

$Z + z^2 + z^3 = e^{\theta i} + e^{2\theta i} + e^{3\theta i}$

$\text{Re}(z + z^2 + z^3) = \cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta$

$1 + \text{Re}(z + z^2 + z^3) = 1 + \cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta$

$= 1 + \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$1 + \text{Re}(z + z^2 + z^3) = 2\cos\theta(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$

$\dfrac{1 + \text{Re}(z + z^2 + z^3)}{2\cos\theta} = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1$

$N = 2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8} - 1$

$N = 2\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$

$-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \le \cos\theta + \frac{1}{4} \le \frac{5}{4}$

$0 \le \left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{25}{16}$

$-\frac{9}{8} \le 2\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \le \frac{25}{8} - \frac{9}{8}$

$\Rightarrow -\frac{9}{8} \le N \le 2 \quad \therefore\ N_{máx} = 2$

30. Evaluar: $A = \left(\dfrac{1 + i\cot\theta}{1 - i\cot\theta}\right)^6$; si $\theta = \pi/12$

Resolución:

$A = \left[\dfrac{i\cot\theta(1 - i\tan\theta)}{-i\cot\theta(1 + i\tan\theta)}\right]^6$

$A = \left(-\dfrac{1 - i\tan\theta}{1 + i\tan\theta}\right)^6 = \left(\dfrac{\cos\theta - i\text{sen}\theta}{\cos\theta + i\text{sen}\theta}\right)^6$

$A = \left[\dfrac{\text{cis}(-\theta)}{\text{cis}\theta}\right]^6 = [\text{cis}(-2\theta)]^6$

$A = \text{cis}(-12\theta) = \text{cis}(-\pi) = \text{cis}\pi$

$\therefore\ A = -1$

31. Hallar $\arg(-z)$, si: $z = \dfrac{\text{sen}(n\theta) - i\cos(n\theta)}{\text{sen}(n\theta) + i\cos(n\theta)}$

Resolución:

Como: $i^2 = -1$

$z = \dfrac{\text{sen}(n\theta) - i\cos(n\theta)}{\text{sen}(n\theta) + i\cos(n\theta)} = \dfrac{i^2\text{sen}(n\theta) - i\cos(n\theta)}{-i^2\text{sen}(n\theta) + i\cos(n\theta)}$

$\Rightarrow z = \dfrac{-i[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]}{i[\cos(n\theta) - i\text{sen}(n\theta)]}$

$z = -\dfrac{[e^{n\theta i}]}{[e^{-n\theta i}]} = -e^{2n\theta i} \Rightarrow -z = e^{2n\theta i}$

$\therefore\ \arg(-z) = 2n\theta$

32. Hallar la suma de los argumentos de los números complejos $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \le \pi$, que cumplen:

$\left|z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right| = \sqrt{2}$

Resolución:

$z = e^{\theta i}$; $-\pi < \theta < \pi$

Además: $\left|z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right| = \sqrt{2}$

Tenemos: $z^2 = (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^2$

$\Rightarrow z^2 = \cos2\theta + i\text{sen}2\theta$ ...(1)

$z^{-2} = (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^{-2}$

$\Rightarrow z^{-2} = \cos2\theta - i\text{sen}2\theta$ ...(2)

Restamos (1) − (2): $z^2 - z^{-2} = 2i\text{sen}2\theta$

$\Rightarrow |z^2 - z^{-2}| = |2i\text{sen}2\theta| = |2\text{sen}2\theta||i|$

De la condición: $|z^2 - z^{-2}| = \sqrt{2} = \underbrace{|2\text{sen}2\theta|}_{|\text{sen}2\theta| = \sqrt{2}/2}$

Luego: $\text{sen}2\theta = \sqrt{2}/2 \ \vee\ \text{sen}2\theta = -\sqrt{2}/2$

$\Rightarrow 2\theta = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\} \ \vee\ 2\theta = \left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$

$\Rightarrow \theta = \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right\} \ \vee\ \theta = \left\{-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right\}$

$\Rightarrow \theta = \left\{-\frac{\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right\} \quad \therefore\ \Sigma\text{valores de } \theta = 0$

33. Hallar el complejo "z" que verifica las relaciones $|z(1 - i)| = 2$ y $\arg[z(1 + i)] = \pi/2$

Resolución:

$|z(1 - i)| = 2$ ...(1)

$\arg[z(1 + i)] = \pi/2$ ...(2)

De (1) y (2):

$z(1 + i) = |z(1 - i)|\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2i$

$z = \dfrac{2i}{1 + i} = \dfrac{(1 + i)^2}{(1 + i)} \quad \therefore\ z = 1 + i$

34. Si: $z = \cos\theta + i\text{sen}\theta$; $-5\pi/2 < \theta < -2\pi$, calcular: $\left|\dfrac{1 - (\bar{z})^2}{1 + z^2}\right|$

Resolución:

$z = \cos\theta + i\text{sen}\theta$; $-5\pi/2 < \theta < -2\pi$

Tenemos: $z^2 = (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^2 = \cos2\theta + i\text{sen}2\theta$

$(\bar{z})^2 = (\cos\theta - i\text{sen}\theta)^2 = \cos2\theta - i\text{sen}2\theta$

Nos piden: $\left|\dfrac{1 - \bar{z}^2}{1 + z}\right| = \left|\dfrac{1 - \cos2\theta + i\text{sen}2\theta}{1 + \cos2\theta + i\text{sen}2\theta}\right|$

$= \left|\dfrac{2\text{sen}^2\theta + i(2\text{sen}\theta\cos\theta)}{2\cos^2\theta + i(2\text{sen}\theta\cos\theta)}\right|$

$= \left|\dfrac{2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta + i\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}\right| = \dfrac{|\tan\theta|\overbrace{|\text{sen}\theta + i\cos\theta|}^{1}}{\underbrace{|\cos\theta + i\text{sen}\theta|}_{1}}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1 - \bar{z}^2}{1 + z^2}\right| = -\tan\theta$

Como: $\theta \in \left\langle -\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right\rangle \Rightarrow \theta \in \text{IVC}$

$\therefore\ \left|\dfrac{1 - \bar{z}^2}{1 + z^2}\right| = -\tan\theta$

35. Si $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N} \wedge w = (1 + z)^n$, hallar: $\arg(w)$

Resolución:

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow z + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow z + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$(z + 1) = e^{\pi i/3} \Rightarrow (z + 1)^n = e^{n\pi i/3}$; $n \in \mathbb{N}$

$\therefore \arg(w) = n\pi/3$

36. Hallar la parte imaginaria del número complejo:

$$E = \frac{1 + \cos(nx) + i\text{sen}(nx)}{1 + \cos x + i\text{sen}x}$$

Resolución:

$$E = \frac{1 + \cos(nx) + i\text{sen}(nx)}{1 + \cos x + i\text{sen}x}$$

Por propiedades del ángulo doble:

$$E = \frac{2\cos^2\left(\frac{nx}{2}\right) + i\left[2\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right]}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + i\left[2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$E = \frac{2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)e^{nxi/2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{xi/2}} \Rightarrow E = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}e^{\left(\frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right)i}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cos(nx/2)}{\cos(x/2)}\left[\cos(n-1)\frac{x}{2} + i\text{sen}(n-1)\frac{x}{2}\right]$$

$$\therefore \text{Im}(E) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\text{sen}(n-1)\frac{x}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

37. Hallar el número complejo $z = e^{i\theta}$, $\theta = \arg(z)$, tal que $\pi/2 \le \arg(z^3) \le \pi$ y $|z^3 - (\bar{z})^3| = \sqrt{2}$

Resolución:

$z = e^{\theta i}$; $\theta = \arg(z)$

Donde: $\pi/2 \le \arg(z^3) \le \pi$ ...(1)

$|z^3 - \bar{z}^3| = \sqrt{2}$ ...(2)

Si: $z = e^{\theta i} \Rightarrow z^3 = e^{3\theta i}$

Como: $z = \cos\theta + i\text{sen}\theta \Rightarrow z = \cos\theta - i\text{sen}\theta$

De (1): $\pi/2 \le 3\theta \le \pi$

De (2): $|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^3 - (\cos\theta - i\text{sen}\theta)^3| = \sqrt{2}$

$|(\cos 3\theta + i\text{sen}3\theta) - (\cos 3\theta - i\text{sen}3\theta)| = \sqrt{2}$

$|2i\text{sen}3\theta| = \sqrt{2}$

$|2\text{sen}3\theta||i| = \sqrt{2} \Rightarrow |\text{sen}3\theta| = \sqrt{2}/2$

Luego: $\text{sen}3\theta = \pm\sqrt{2}/2$

Como: $3\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow 3\theta = 3\pi/4 \Rightarrow \theta = \pi/4$

$\therefore z = e^{\pi i/4}$

38. En la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{3} + i}{i - 1} = \sqrt{2}\,\text{sen}2\theta + \text{sen}2\theta + i\sqrt{2}\cos 2\theta$$

Determinar su solución general para θ, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Resolución:

$$\frac{\sqrt{3} + i}{i - 1} = \sqrt{2}\,\text{sen}2\theta + \text{sen}2\theta + i\sqrt{2}\cos 2a$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{3} + i)(i + 1)}{\underbrace{(i - 1)(i + 1)}_{i^2 - 1}} = \sqrt{2}(\text{sen}2\theta + i\cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{i(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)}{-2\sqrt{2}} = \text{sen}2\theta + i\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow -\left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right] - i\left[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right] = \text{sen}2\theta + i\cos 2\theta$$

$$\text{sen}2\theta = -\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \wedge \cos 2\theta = -\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$$

$\Rightarrow 2\theta \in \text{IIIC} \Rightarrow 2\theta = \pi + \pi/12 \Rightarrow 2\theta = 13\pi/12$

En general: $2\theta = 2k\pi + 13\pi/12$

$\therefore \theta = k\pi + 13\pi/24$, $k \in \mathbb{Z}$

39. Si $\dfrac{(1 + \cos\theta - i\text{sen}\theta)^2}{\cos\theta - i\text{sen}\theta} = (A\cos w\theta)^n$, hallar el valor de la expresión: $\sqrt[n]{\dfrac{A^2 w}{2}}$

Resolución:

$$\frac{(1 + \cos\theta - i\text{sen}\theta)^2}{\cos\theta - i\text{sen}\theta} = (A\cos w\theta)^n$$

$$\frac{\left\{\left[2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] - i\left[2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}^2}{\cos\theta - i\text{sen}\theta} = (A\cos w\theta)^n$$

$$\frac{\left\{\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}^2}{\cos\theta - i\text{sen}\theta} = (A\cos w\theta)^n$$

$$\frac{[4\cos^2(\theta/2)](\cos\theta - i\text{sen}\theta)}{(\cos\theta - i\text{sen}\theta)} = (A\cos w\theta)^n$$

$4\cos^2(\theta/2) = A^n\cos^n(w\theta)$

$\Rightarrow A^n = 4$; $n = 2$; $w = 1/2 \Rightarrow A = 2$

$$\therefore \sqrt[n]{\frac{A^2 w}{2}} = 1$$

40. Si $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, calcular z^6

Resolución:

$$z = \frac{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow z = \frac{\cos(\pi/3) + i\text{sen}(\pi/3)}{\cos(\pi/6) + i\text{sen}(\pi/6)}$$

$$z = \frac{e^{(\pi/3)i}}{e^{(\pi/6)i}} \Rightarrow z = e^{(\pi/3)i - (\pi/6)i} \Rightarrow z = e^{(\pi/6)i}$$

$z^6 = (e^{(\pi/6i)})^6 \Rightarrow z^6 = e^{\pi i} \Rightarrow z^6 = \cos\pi + i\text{sen}\pi$

$z^6 = (-1) + i(0) \quad \therefore z^6 = -1$

41. En la siguiente expresión:

$$E = \frac{\left[3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right](3 + 4i)\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{1 + i}$$

Calcular $|E|$ y $\arg(E)$

Resolución:

Se tiene: $3\cos(\pi/6) + 3i\text{sen}(\pi/6)$

$\Rightarrow 3[\cos(\pi/6) + i\text{sen}(\pi/6)] = 3e^{(\pi/6)i}$

$3 + 4i = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos 53° + i\text{sen}53°) = 5e^{i(53\pi/180)}$

$2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{(\pi/3)i}$

$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{(\pi/4)i}$

$E = \dfrac{[3e^{(\pi/6)i}][5e^{(53\pi/180)i}][2e^{(\pi/3)i}]}{\sqrt{2}e^{(\pi/4)i}} \Rightarrow E = 15\sqrt{2}e^{(49\pi/90)i}$

$\therefore |E| = 15\sqrt{2} \wedge \arg(E) = 49\pi/90$

42. Si $z = \text{sen}2\theta + i\cos 2\theta$ y $\theta \in \langle 0; \pi/2\rangle$, calcular el módulo de $(z + 1)$.

Resolución:

Sea: $z_1 = z + 1$

$\Rightarrow z_1 = (1 + \text{sen}2\theta) + i\cos 2\theta$

Como: $|z_1| = \sqrt{[\text{Re}(z_1)]^2 + [\text{Im}(z_1)]^2}$

$\Rightarrow |z_1| = \sqrt{(1 + \text{sen}2\theta)^2 + (\cos 2\theta)^2}$

$\Rightarrow |z_1| = \sqrt{1 + 2\text{sen}2\theta + \text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta}$

$\Rightarrow |z_1| = \sqrt{2 + 2\text{sen}\theta} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2(1 + 2\text{sen}\theta\cos\theta}$

$\Rightarrow |z_1| = \sqrt{2(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}|\text{sen}\theta + \cos\theta|$

Como $\theta \in \langle 0; \pi/2\rangle$: $|z_1| = \sqrt{2}(\text{sen}\theta + \cos\theta)$

$|z_1| = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\theta\right)$

$\therefore |z_1| = 2\cos(\pi/4 - \theta)$

43. Si $z = \cos 2\theta + i\text{sen}2\theta$, hallar el eθuivalente de $R = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + \cot^2\theta$

Resolución:

Del dato: $R = \left(\frac{1 + 2\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta}{1 - \cos 2\theta - i\text{sen}2\theta}\right)^2 + \cot^2\theta$

$\Rightarrow R = \left[\frac{2\cos^2\theta + i(2\text{sen}\theta\cos\theta)}{2\text{sen}^2\theta - i(2\text{sen}\theta\cos\theta)}\right]^2 + \cot^2\theta$

$\Rightarrow R = \left[\frac{2\cos\theta(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}{2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta - i\cos\theta)}\right]^2 + \cot^2\theta$

$\Rightarrow R = \cot^2\theta\left(\frac{\cos\theta + i\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta - i\cos\theta}\right)^2 + \cot\theta + \cot\theta$

Como:

$\text{sen}\theta - i\cos\theta = \frac{i(\text{sen}\theta - i\cos\theta)}{i} = \frac{\cos\theta + i\text{sen}\theta}{i}$

Luego: $R = (\cot^2\theta)\left(\frac{\cos\theta + i\text{sen}\theta}{\frac{\cos\theta + i\text{sen}\theta}{i}}\right)^2 + \cot^2\theta$

$R = \cot^2\theta(i)^2 + \cot^2\theta \Rightarrow R = -\cot^2\theta + \cot^2\theta$

$\therefore R = 0$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2008 - I)

Sea el número complejo

$$w = \frac{[\cos 12° + i\text{sen}12°]^4[\sqrt{2}(\cos 8° + i\text{sen}8°)]^{11}}{[\cos 6° + i\text{sen}6°]^{11}[\text{sen}80° + i\cos 80°]}$$

La forma polar de "w" es:

A) $8\sqrt{2}e^{i\pi/3}$ B) $16\sqrt{2}e^{i\pi/6}$ C) $16\sqrt{2}e^{i\pi/3}$
D) $32\sqrt{2}e^{i\pi/6}$ E) $32\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

Resolución:

Dado el número complejo:

$$w = \frac{[\cos 12° + i\text{sen}12°]^4[\sqrt{2}(\cos 8° + i\text{sen}8°)]^{11}}{(\cos 6° + i\text{sen}6°)^{11}(\text{sen}80° + i\cos 80°)}$$

$$w = \frac{[\cos 12° + i\text{sen}12°]^4\sqrt{2}^{11}(\cos 8° + i\text{sen}8°)^{11}}{(\cos 6° + i\text{sen}6°)^{11}(\text{sen}10° + i\cos 10°)}$$

$$w = \frac{\sqrt{2}^{11}(e^{\pi i/15})(e^{\pi i/45})^{11}}{(e^{\pi i/30})^{11}(e^{\pi i/18})} = \frac{\sqrt{2}^{11}(e^{\pi i/15})^4(e^{\pi i/45})^{11}}{(e^{11\pi i/30})(e^{\pi i/18})}(e^{\pi i/15})$$

$$w = \frac{\sqrt{2}^{11}(e^{34\pi i/45})}{(e^{38\pi i/30})} = \sqrt{2}^{11}e^{\pi i/3} \quad \therefore w = 32\sqrt{2}e^{i\pi/3}$$

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

La ecuación cuadrática:

$z\bar{z} - (1 + 3i)z - (1 - 3i)\bar{z} = 12$

Representa:

A) una circunferencia B) una hipérbola
C) una recta D) dos puntos
E) un punto

Resolución:

Dato: $z\bar{z} - z - 3iz - \bar{z} + 3i\bar{z} = 12$

$z\bar{z} - (z + \bar{z}) - 3i(z - \bar{z}) = 12$

Como: $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$

Reemplazando: $x^2 + y^2 - 2x - 3i(2iy) = 12$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y = 12$

Completando cuadrados: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 22$

$\therefore$ Es una circunferencia

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Al determinar la forma compleja de la ecuación: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, obtenemos:

A) $z\bar{z} - (1 - i)z - \overline{(1 - i)z} + 1 = 0$
B) $z\bar{z} + (1 + i)z - (1 + i)\bar{z} + 1 = 0$
C) $3z\bar{z} + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} + 1 = 0$
D) $2iz\bar{z} - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} + 1 = 0$
E) $4z\bar{z} - 2(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$

Resolución:

Como: $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Reemplazando:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} - 1\right)^2 = 1$$

$$\frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{4} - 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) - 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{4z\bar{z}}{4} - z - \bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = 0$$

$$\therefore\ z\bar{z} - (1-i)z - \overline{(1-i)z} + 1 = 0$$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

Dada la ecuación en el plano complejo,

$(1 - i)z + \overline{(1-i)z} + 2 = 0$

Determine la ecuación cartesiana.

A) $2x + 2y + 1 = 0$ B) $x + y + 1 = 0$
C) $2x - 2y + 1 = 0$ D) $-x + y + 1 = 0$
E) $-2x + y + 2 = 0$

Resolución:

Números complejos

Si: $(1 - i)z + \overline{(1-i)z} + 2 = 0$

Recordamos: $z = x + iy$

Reemplazando:

$(1 - i)(x + iy) + \overline{(1-i)(x+iy)} + 2 = 0$

$x + iy - ix + y + (x + y - iy + ix) + 2 = 0$

$2x + 2y + 2 = 0 \quad \therefore\ x + y + 1 = 0$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Si $i = \sqrt{-1}$ y $\frac{(1+i)^{20} + (1-i)^{20}}{(1+i)^{40}} = \frac{1}{A}$, entonces

$(A + 500)$ es igual a:

A) -12 B) -10 C) -8
D) 10 E) 12

Resolución:

En su forma exponencial:

$1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$; $1 - i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

Reemplazando: $\frac{2^{10}e^{i(5\pi)} + 2^{10}e^{i(5\pi)}}{2^{20}e^{i(10\pi)}} = \frac{1}{A}$

$$\frac{-2^{10} - 2^{10}}{2^{20}} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = -2^9$$

Pide: $A + 500 = -2^9 + 500 = -12$

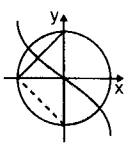
Clave: A

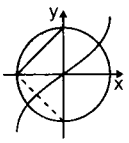
PROBLEMAS PROPUESTOS

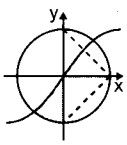
1. Determinar el conjunto de números complejos "z", tal que se verifica $k \in \mathbb{Z}$;
$1 - \cosh(2iz) = i(\text{sen}2z + 2\text{sen}z)$

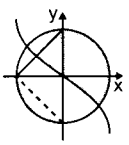
A) $k\pi$ B) $k\pi + \ln 2$ C) $\frac{k\pi}{2} + \ln(4)$
D) $\frac{k\pi}{2} + \ln 2$ E) $2k\pi - \ln 2$

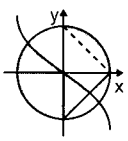
2. Identificar la gráfica de la siguiente expresión:
$R = \{z \in \mathbb{C}/\text{Im}(z) - \text{Re}^3(z) \geq 0;\ |z| \leq k;$
$\frac{\pi}{4} \leq |\arg(z + k)| \leq \pi\}$; además $k \in \mathbb{R}^+$

A)


B)


C)


D)


E)


3. Si $\theta \in [0; 2\pi]$ y $n \in \mathbb{N}$
$$\left(\frac{1 + \text{sen}\theta + i\cos\theta}{1 + \text{sen}\theta - i\cos\theta}\right)^n = \cos x + i\text{sen}x$$
Hallar $F = \cot\left(\frac{x}{n}\right) - \tan\left(\frac{x}{n}\right)$

A) $2\csc 2\theta$ B) $\tan 2\theta$ C) $\cot 2\theta$
D) $-2\cot 2\theta$ E) $\sec 2\theta$

4. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, simplificar:
$$S = \binom{n}{0}\cos n\theta + \binom{n}{1}\cos(n-2)\theta + \binom{n}{2}\cos(n-4)\theta \ldots \binom{n}{n}$$

A) $2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ B) $2^n\text{sen}^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{n\theta}{2}\right)$
C) $2^n\cos^n\theta$ D) $2^n\cos^n\theta\,\text{sen}^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$
E) $2^n\tan\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

5. Simplificar: $$F = \frac{(\cos 2a - i\text{sen}2a)(\cos b + i\text{sen}b)^2}{\cos(a+b) + i\text{sen}(a+b)} + \frac{(\cos 2a + i\text{sen}2a)(\cos b - i\text{sen}b)^2}{\cos(a+b) - i\text{sen}(a+b)}$$

A) $2\text{sen}(a + b)$ B) $2\cos(a + b)$
C) $2\cos(2a + 2b)$ D) $2\text{sen}(b - 3a)$
E) $2\cos(b - 3a)$

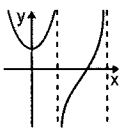
6. Siendo: $z = \cot\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)22$
Calcular: $F = |z| + 17z - 15i$

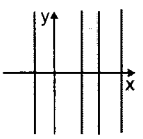
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

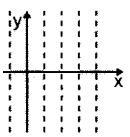
7. Sabiendo que: $z_1 = \ln i^{i^2}$; $z_2 = x + iy$; $z_3 = i^i$
Señalar la proposición correcta:
I. $\text{sen}z_1 = 1$ II. $\cos z_1 = 0$
III. $\text{Im}(e^{z_2^2}) = e^{x^2 - y^2}\text{sen}2xy$ IV. $|z_3| = e^{\pi/2}$
V. $\text{Re}(z_2) = e^x\text{sen}y$

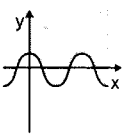
A) I y II B) I, II y III C) I, II, IV y V
D) I, II y V E) todas son correctas

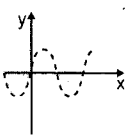
8. Graficar el conjunto de números complejos que verifican el conjunto R, si.
$R = \{z = x + yi \,/\, \arg(e^{i\cos z}) > 0\}$

A)


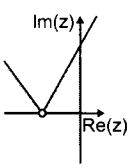
B)


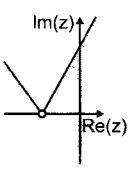
C)


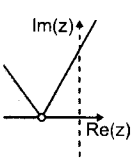
D)


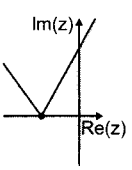
E)


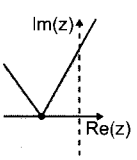
9. Si α es el argumento del complejo: $z = x + iy$, además: $\cos\alpha < 0$, graficar: $|z + \bar{z} + 1| > y$

A)


B)


C)


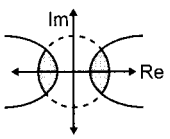
D)


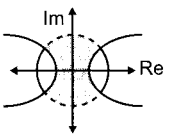
E)


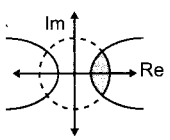
10. Calcular el área de la región correspondida en:
$E = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| \leq 3;\ \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{6}\}$

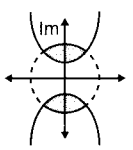
A) $\frac{5\pi}{3}\pi$ B) 3π C) $\frac{2\pi}{3}$
D) 2π E) $\frac{3\pi}{2}$

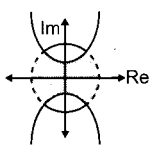
11. Grafique: $M = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 2;\ Re(z^2) \leq 1\}$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

12. Hallar la ecuación de la recta: $L: x - \sqrt{3}y - 4 = 0$
Después de una rotación según un ángulo de 30°.

A) $y' - 2 = 0$ B) $x' + 2 = 0$ C) $x' - 3 = 0$
D) $y' + 2 = 0$ E) $x' + 3 = 0$

13. Si al efectuar una rotación de ejes según un ángulo agudo θ, la pendiente de la recta:
$L: 3x - y - 4\sqrt{2} = 0$, es 1/2
Hallar el ángulo de rotación θ.

A) 45° B) 30° C) 90°
D) arctan(2/3) E) arctan(1/5)

14. Sea el número complejo: $z = 6e^{\frac{i\pi}{3}}$. Calcular: $|e^{iz}|$
Siendo: $z_1 = 3e^{2i\theta}$; $z_2 = 4e^{5i\theta}$; $z_3 = 2e^{3i\theta}$

A) $e^{\frac{1}{2}}$ B) $e^{-3\sqrt{3}}$ C) $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
D) $e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ E) $e^{-\frac{1}{2}}$

15. Señalar la parte real de $z_4 = \frac{z_1^2 z_2^3}{z_3^4}$

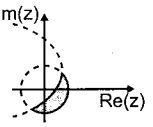
A) $18\cos 4\theta$ B) $18\cos 7\theta$ C) $36\cos 7\theta$
D) $36\cos 4\theta$ E) $18\cos 3\theta$

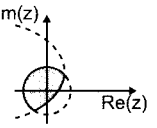
16. Si: $E = e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + e^{i4x} + e^{i5x} + e^{i6x}$, calcular el valor de A + B, tal que:

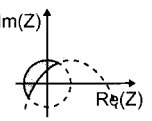
$$Re(E) = \frac{\cos\left(\frac{Bx}{A}\right)\text{sen}3x}{\text{sen}\left(\frac{x}{A}\right)}$$

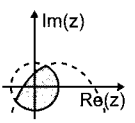
A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

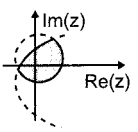
17. Sean: $R_1 = \{z \in \mathbb{C}\ |z| \leq 3\}$
$R_2 = \{z \in \mathbb{C}\ |iz + 3 - i| \geq |Re(z) - 4|\}$
Represente gráficamente: $R_1 \cap R_2$

A) 

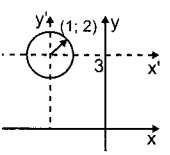
B) 

C) 

D) 

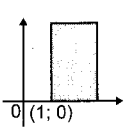
E) 

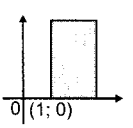
18. En el gráfico mostrado, se pide hallar la ecuación de dicha circunferencia en el sistema xy, si se realizó una traslación de ejes.

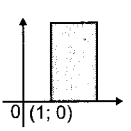


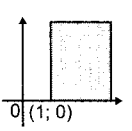
A) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 12 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

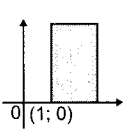
19. Determinar la región de todos los números complejos $z = a + ib$, para los cuales se cumple que:
$\log_{\frac{1}{2}}|z - 2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

20. Hallar el valor de la expresión: $\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{77}$

A) 1 B) −1 C) −i
D) i E) 1 + i

21. Hallar el módulo del complejo:

$$W = \frac{iz+1}{iz-1} + \frac{iz-1}{iz+1}$$

Donde: $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \ \wedge\ \theta \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

A) $\tan\theta$ B) $\cot\theta$ C) $2\tan\theta$
D) $2\cot\theta$ E) $4\tan\theta$

22. Resolver: $(z-1)^{2n} = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)$; $n \in \mathbb{Z}$
$k = 0; 1; 2; 3; 4; \ldots (2n-1)$

A) $\left|2\cos\left(\frac{n\theta+2k\pi}{4n}\right)\right| e^{i\left(\frac{n\theta+2k\pi}{4n}\right)}$

B) $\left|2\cos\left(\frac{n\theta+2k\pi}{2n}\right)\right| e^{i\left(\frac{n\theta+2k\pi}{2n}\right)}$

C) $\left|2\cos\left(\frac{n\theta+k\pi}{4n}\right)\right| e^{i\left(\frac{n\theta+k\pi}{4n}\right)}$

D) $\left|2\cos\left(\frac{n\theta-k\pi}{4n}\right)\right| e^{i\left(\frac{n\theta+k\pi}{4n}\right)}$

E) $\left|2\cos\left(\frac{n\theta-k\pi}{4n}\right)\right| e^{i\left(\frac{n\theta+k\pi}{2n}\right)}$

23. Calcular el valor de: $\operatorname{sen}(i\ln\sqrt{i})$

A) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

24. Reducir:

$$W = 2\operatorname{sen}\theta + \sum_{i=1}^{n} C_i^n[\operatorname{sen}(i\theta+\theta) - \operatorname{sen}(i\theta-\theta)]$$

A) $2^{n+1}\operatorname{sen}\theta\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$

B) $2^{n+1}\operatorname{sen}\theta\cos^n\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}$

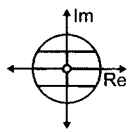
C) $2^{n-1}\operatorname{sen}\theta\cos^n\theta\cos\frac{n\theta}{2}$

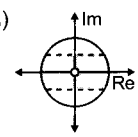
D) $2^{n-1}\operatorname{sen}\theta\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\theta$

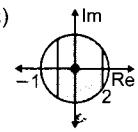
E) $2^n\operatorname{sen}\theta\cos\frac{n\theta}{2}$

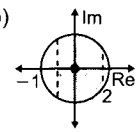
25. Hallar el conjunto de los puntos "z" en el plano complejo, tales que:

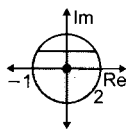
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{1}{|z|} \geq 1 \ \wedge\ |\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{2} \right\}$$

A)


B)


C)


D)


E)


26. Siendo:
$\cos\alpha + 2\cos\beta + 3\cos\theta = 0$
$\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\beta + 3\operatorname{sen}\theta = 0$,

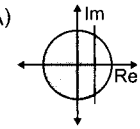
hallar: $J = \dfrac{\cos 3\alpha + 8\cos 3\beta + 27\cos 3\theta}{\cos(\alpha+\beta+\theta)}$

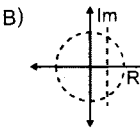
A) 15 B) 9 C) 18
D) 24 E) 27

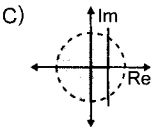
27. Si: $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, hallar: $A = \dfrac{1+z^n}{1+z^{-n}} + \dfrac{1-z^{-n}}{1-z^n}$

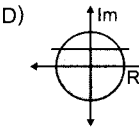
A) $2i\cos n\theta$ B) $2i\cos n\theta$ C) $2i\operatorname{sen} n\theta$
D) $-2i\operatorname{sen} n\theta$ E) $-2\cos n\theta$

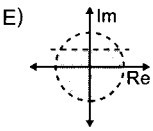
28. Graficar: $C = \left\{ z \in \mathbb{C} / |Z| < 1;\ \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \right\}$

A)


B)


C)


D)


E)


29. Señalar verdadero (V) o falso (F), según corresponda en:

I. $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$

II. $-2 + 2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$

III. $-4 - 4\sqrt{3}i = 8\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FFV E) FVV

30. Si: $\dfrac{(1+\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} = (A\cos w\theta)^n$, hallar el valor de la expresión: $\sqrt[n]{\dfrac{A^2 w}{2}}$

A) 0 B) 1 C) 1/2
D) 2 E) 4

31. Identificar el lugar geométrico de los puntos que representan los números complejos: $z = x + yi$, tales que:
I. $|z-2| = 2|z+1|$
II. $|z| = \operatorname{Re}(z) + 1$

A) Recta, recta.
B) Recta, circunferencia.
C) Circunferencia, recta.
D) Circunferencia, parábola.
E) Parábolas.

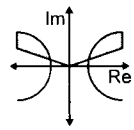
32. Resolver la ecuación:
$|z| + z = \cos^2 x + i\text{sen}^2 x;\ z \in \mathbb{C}$
Luego, señalar: $W = \dfrac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}$

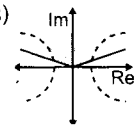
A) $2\cot^2 2x$ B) $2\tan 2x\sec 2x$
C) $\frac{1}{2}\tan 2x\sec 2x$ D) $2\cot 2x\csc 2x$
E) $\frac{1}{2}\cot 2x\cos 2x$

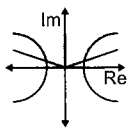
33. Si: $z = \cos\theta + i\text{sen}\theta$, exprese en forma polar:
$w = 1 + z^2;\ 0 < \theta < \pi/2$

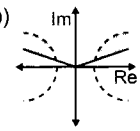
A) $2\cos\theta\,\text{cis}\theta$ B) $2\cos\theta\,\text{cis}(\theta/2)$
C) $2\cos\theta\,\text{cis}2\theta$ D) $\cos\theta\,\text{cis}\theta$
E) $\cos\theta\,\text{cis}2\theta$

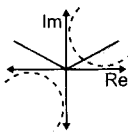
34. Representar gráficamente:
$C = \{z \in \mathbb{C} / \frac{\pi}{18} \le \arg(z) \le \frac{17\pi}{18} \wedge$
$\text{Re}[(z+1)^2 + (z-1)^2] > 4\}$

A) 

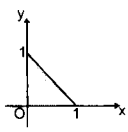
B) 

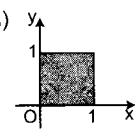
C) 

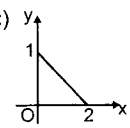
D) 

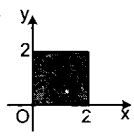
E) 

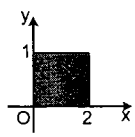
35. ¿Cuál de los gráficos siguientes corresponde a la región?
$R = \{z \in \mathbb{C} / |\text{Re}z| + |\text{Im}z| \le 1;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\}$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

36. Si: $\theta \in \langle 0°; 90° \rangle$, exprese en forma polar:
$z = 1 + \text{sen}\theta + i\cos\theta$

A) $\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$
B) $2\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$
C) $\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)$
D) $\cos\left(45° + \frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)$
E) $2\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)$

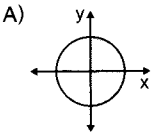
37. Mediante una rotación de los ejes de un sistema de coordenadas, con ángulo de rotación: $\theta = \arctan 2$, en sentido antihorario, la ecuación de una cónica se transforma en:
$$x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{5}x' - 1 = 0$$
Hallar la ecuación original de esta cónica.

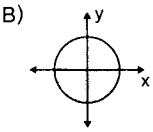
A) $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x + 20y - 5 = 0$
B) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 10x - 20y - 5 = 0$
C) $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$
D) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$
E) $9x^2 - 4xy - 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$

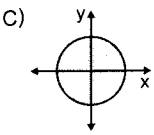
38. Si: $|\bar{z}i| = 4;\ \arg[z(1+i)] = \pi/2$
Expresar el número complejo "z" en su forma polar.

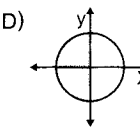
A) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ B) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
C) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ D) $-\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
E) $-2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

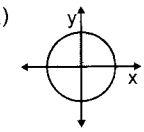
39. Indicar gráficamente todos los puntos del plano que verifican las relaciones: $|e^z| \le 1 \wedge |z| \le 1$
Donde: $z = x + iy$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

40. Siendo: $z = 1 + \sqrt{3}i$, hallar: $\ln z$

A) $\ln 2 + \frac{i\pi}{6}$ B) $\ln 4 + \frac{i\pi}{6}$ C) $\ln 2 + \frac{i\pi}{3}$
D) $\ln 4 + \frac{i\pi}{3}$ E) $\ln 2 + 3i\pi$

41. Si: $z = x + iy$; hallar: $\text{Re}[e^{i\text{Im}(z^2)}]$

A) $\cos(x^2 - y^2)$ B) $\cos(2xy)$ C) $\cos(x^2 + y^2)$
D) $-\cos(2xy)$ E) $\cos(xy)$

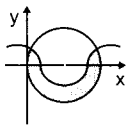
42. Hallar el área de la región R, definida por:

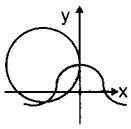
$$R = \left\{z \in \mathbb{C} / |z| \in [1;3] \wedge \arg(z^2) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

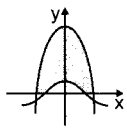
A) $\pi/2$ B) $\pi/3$ C) $\pi/4$
D) π E) 2π

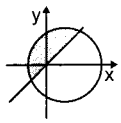
43. Graficar:

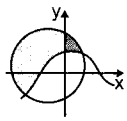
$$A = \left\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\left(\frac{z-2+i}{z+1-i}\right) \le 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \ge \mathrm{Re}(z)\right\}$$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

44. Sabiendo que $z \in \mathbb{C}$, hallar el equivalente de $f(z) = \ln z$; $k = \{...-1; 0; 1...\}$; $z \neq 0$

A) $\ln|z| + i(\arg z + k\pi)$ B) $\ln|z| + i$
C) $\ln|z| + i\arg\frac{z}{2}$ D) $\ln|z| + i(2\arg z)$
E) $\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$

45. Calcular el valor de:

$$S = \mathrm{sen}^2(i\ln\sqrt{-i}) + \mathrm{sen}^2(i\ln\sqrt{i}) + \cos^2(3i\ln\sqrt{i})$$

A) 3/2 B) 7/4 C) 5/2
D) −1/4 E) 9/2

46. Sabiendo que:
$z_1 = \ln i^{i^2}$; $z_2 = x + iy$; $z_3 = i^i$
Señalar la proposición correcta:

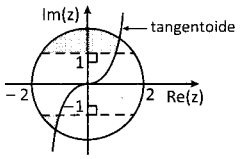
I. $\mathrm{sen}z_1 = 1$
II. $\cos z_1 = 0$
III. $\mathrm{Im}(e^{z_2^2}) = e^{x^2-y^2}\mathrm{sen}2xy$
IV. $|z_3| = e^{\pi/2}$
V. $\mathrm{Re}(z_2) = e^x \mathrm{sen}y$

A) I y II B) I, II y III
C) I, II, IV y V D) I, II y V
E) Todas son correctas

47. Si $z = a + ib$, determinar $2\mathrm{Re}(\mathrm{arcsen}z)$, si $i^2 = -1$

A) $\sqrt{(a+1)^2+b^2} - \sqrt{(a-1)^2+b^2}$
B) $\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{(a-1)^2+b^2}$
C) $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(a-1)^2+b^2}$
D) $\sqrt{a+(b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$
E) $\sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{(a+1)^2-b^2}$

48. Indicar la regla de correspondencia para el región sombreada:



A) $\{z \in \mathbb{C} / |z| \le 2 \wedge |\mathrm{Im}(z)| > 1 \wedge \mathrm{Im}(z) \ge \tan[\mathrm{Re}(z)]\}$
B) $\{z \in \mathbb{C} / 1 \le |z| \le 2 / |\mathrm{Im}(z)| \ge \tan[\mathrm{Re}(z)]\}$
C) $\{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 2 / |\mathrm{Im}(z)| > \tan[\mathrm{Re}(z)]\}$
D) $\{z \in \mathbb{C} / 1 \le |z| \le 2 / |\mathrm{Im}(z)| \le \tan[\mathrm{Re}(z)]\}$
E) $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 2 \wedge |\mathrm{Im}(z)| < \tan[\mathrm{Re}(z)] \wedge |\mathrm{Im}(z)| < 1\}$

49. Determinar la parte real del complejo: $\left(\frac{e^{n\alpha i}-1}{e^{\alpha i}-1}\right)e^{i\alpha/2}$

A) $0{,}5\mathrm{sen}(n\alpha)\csc(\alpha/2)$ B) $\mathrm{sen}(n\alpha)\csc(\alpha/2)$
C) $2\mathrm{sen}(n\alpha)\csc(\alpha/2)$ D) $2\cos(n\alpha)\csc\alpha$
E) $2\mathrm{sen}(n\alpha)\mathrm{sen}(\alpha/2)$

50. Sean z_1, z_2 y z_3 números complejos que verifican:

$|\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3| = b$ ...(1)

$\sqrt{\sqrt{z_1\bar{z}_1} + \sqrt{z_2\bar{z}_2} + \sqrt{z_3\bar{z}_3}} = -a$ ...(2)

Determinar: $M = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$

A) $a^4 - 2b$ B) 0 C) $-a^2 + b^4$
D) $2b - a^4$ E) −1

51. Hallar el módulo de $z = \mathrm{arcsen}(i)\arccos(i)$, si $i^2 = -1$

A) $\ln\sqrt{2}$ B) $\ln(\sqrt{2}-1)$ C) $\ln(\sqrt{2}+1)$
D) 1 E) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

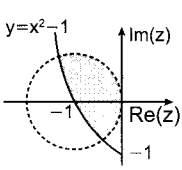
52. Resolver: $(e^{iz} + e^{-iz})(e^{2zi} - 1) = 4i(i\cos z - \mathrm{sen}z)$

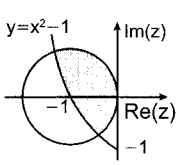
A) $(-i/2)\ln(-2 \pm \sqrt{5}) + k\pi$
B) $(-i)\ln(-2 + \sqrt{5}) + 2k\pi$
C) $(-i/2)\ln(-2 - \sqrt{5}) + 4k\pi$
D) $(-i/2)\ln(-2 \pm \sqrt{5}) + k\pi$
E) $(i)\ln(-2 \pm \sqrt{5})$

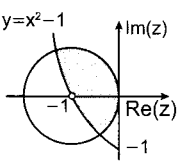
53. Sea $z = 8 + i15$; hallar los valores de $w = \ln z$; $k \in \mathbb{Z}$; $i^2 = -1$

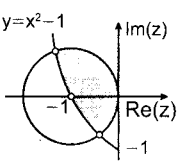
A) $\ln 17 + i[2\pi k + \arctan(15/8)]$
B) $\ln 17 + i[\pi k + \mathrm{arccot}(15/8)]$
C) $\ln 17 + i(2k\pi + \arctan 4)$
D) $\ln 15 + i[k\pi + \mathrm{arcsen}(8/17)]$
E) $\ln 15 + i[2k\pi + \arccos(8/17)]$

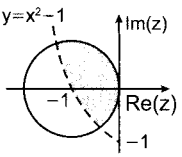
54. Identificar geométricamente el conjunto de números complejos z que tiene las condiciones:
$|z + 1| < 1 / \mathrm{Im}(z) \ge [\mathrm{Re}(z)]^2 - 1$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

55. Determinar:

$$L = \left|\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t}{t+4i} - \frac{3it}{t+1}\right)\right|;\ i^2 = -1$$

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{7}$ E) 4

56. Determinar:

$$\lim_{z\to(3-i)} \frac{z^3 + z + (i-3)z^2 - 3 + i}{z + i - 3}$$

A) $2 + i$ B) $9 - 6i$ C) $3 + 6i$
D) $18 - 5i$ E) 0

57. Expresar en forma polar el siguiente complejo:

$$z = \cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{i^3} + i\cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{i^4}$$

Si: $a - \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

A) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$

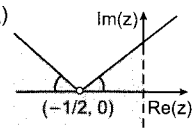
B) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$

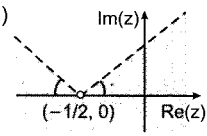
C) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]}$

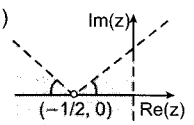
D) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \theta\right)}$

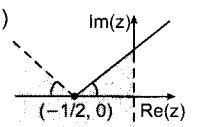
E) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \theta\right)}$

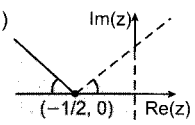
58. Si α es el argumento del complejo $z = x + iy$; además $\cos\alpha < 0$. Graficar; $|z + \bar{z} + 1| > y$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

CLAVES

1. A	9. C	17. A	25. B	33. A	41. B	49. A	57. A
2. B	10. B	18. B	26. C	34. D	42. D	50. A	58. C
3. D	11. B	19. C	27. C	35. A	43. D	51. B	
4. A	12. D	20. D	28. C	36. E	44. E	52. A	
5. E	13. A	21. C	29. B	37. C	45. A	53. A	
6. C	14. B	22. A	30. B	38. A	46. B	54. D	
7. B	15. C	23. C	31. D	39. B	47. A	55. C	
8. C	16. D	24. A	32. D	40. C	48. A	56. B	

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
situados en av. Las Lomas 1600, urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344